

取引費用を伴うオプションの数値解析

中 村 正 彰

1. 序

Black-Schols 方程式は資産価格に対する基本的な対数正規分布モデルに各種の条件を付けて得られた方程式であり種々の形で扱われてきた。原方程式は取引に伴う費用を考慮せずに導入され解析されてきた。

$$(1) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \\ = \kappa \sigma S^2 \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \\ \text{in } (S, t) \in (0, \infty) \times (0, T) \\ V(S, T) = V_0(S) \quad \text{for } S \geq 0,$$

現実の実務家にとって取引費用の影響は重要なもので無視する訳にはいかず、その効果を含めた解析がいろいろ実行されてきた。

本論文では T. Hoggard, A. E. Whalley, P. Wilmott によって取引費用を考慮して Black-Schols 方程式を拡張して得られた Hoggard-Whalley-Wilmott 方程式を解析する。

ここで S は原資産の価格、 $V(S, t)$ は S に付随するオプションの価格であり、満期データ $V_0(S) (\geq 0)$ は非負定数 α に対して $S \rightarrow \infty$ のとき指数的に $V_0(S) \simeq \alpha S$ を満たすものとする。

特に我々は、 $V_0(0) = V(0, t) = 0$ を仮定した場合を扱うことにする。

定数 r と σ はそれぞれ無リスク利率 (risk-free interest rate) と資産ヴォラティリティ (the asset volatility) を表し、 δt は時間ステップを表す。

方程式 (1) の右辺は取引費用の存在を考慮したことによって現れる項である。

ポートフォリオは単位時間 δt 毎に常に更新されるものとする。このモデルにおいては取引費用は比例定数 κ で取引額に比例するものと仮定する。

この方程式の導出の詳細は参考文献を参照されたい。

この非線形方程式の解析はそのままではなかなか難しく、非線形項を数学的に取り扱うために、従来は解が凸、あるいは下に凸という仮定の下に解析されてきた。しかしその様な解の存在を仮定するのは現実的ではないのは明らかであろう。

我々は解の凹凸を仮定せずに κ , σ , δt に対する仮定の下に解の存在を示した。

定理 1. κ , σ , δt が条件 $2\kappa\sqrt{2/\sigma^2\pi\delta t} < 1$ を満たすならば、 $S \rightarrow \infty$ のとき指数オーダーで $V_0(S) \simeq \alpha S$ ($\alpha \geq 0$) を満たす任意の滑らかな初期値 $V_0(S) (\geq 0)$ に対して Hoggard-Whalley-Wilmott 方程式 (1) は $S \rightarrow \infty$ のとき指数オーダーで $V_0(S) \simeq \alpha S$ ($\alpha \geq 0$) となる解を持つ。

注意 1. $V_0(S) = \alpha S$ ならば $V(S, t) = \alpha S$ が解となる。

注意 2. $V(S, t) = \beta S$ は定常解である。

本論文はこの方程式の解を数値的に求めて理論と比較して解析することが目的である。

2. 方程式の変換

Hoggard-Whalley-Wilmott 方程式を数値的に扱う際、次の点が難しい。

1. 領域が無限領域である。
2. 解が無限に大きな値に増大する。すなわち非有界な解が出現する。
3. 非線形項絶対値の項がある。

この難点を克服するために次のような工夫を必要とする。

1. 無限領域を変換して有界領域で解析する。
2. 非有界な解を有界な解に変換して扱う。
3. 非線形項が絶対値の項であるので、スキームは時間に関して陽スキームで計算する。

さらにこの方程式の特徴を考慮して次の独立変数の変換をほどこして扱う。

4. 時間に関して逆にたどる。すなわち変換 $t \mapsto T-t$ を施して得られる次の方程式 (2) を扱う。

$$(2) \quad \frac{\partial V_2}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} - \kappa\sigma S^2 \sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}} \left| \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} \right| + rS \frac{\partial V_2}{\partial S} - rV_2$$

$$\text{in } (S, t) \in (0, \infty) \times (0, T),$$

$$V_2(S, 0) = V_0(S) \quad \text{for } S \geq 0,$$

$$V_2(0, t) = 0 \quad \text{for } 0 \leq t < T.$$

ここで

$$V_0(S) \geq 0, \quad V_0(0) = 0,$$

$$V_0(S) \simeq \alpha S \quad \text{exponentially as } S \rightarrow \infty.$$

注意 1.1. 方程式 (1) と方程式 (2) の解の間には $V(S, t) = V_2(S, T-t)$ の関係がある。

注意 1.2. 放物型方程式を時間に関して逆に解くのは問題が適切でなくなる可能性が高いので、一般には用いられない方法であるが、この方程式の場合は問題の本質からこのようにして逆問題を解かざるを得ない。

更に方程式の理論解析で得られた結果 $V(S, t) \simeq \alpha S$ exponentially as $S \rightarrow \infty$ を考慮して次の変換を施す。

$$(BT1) \quad V_3(S, \tau) = V_2(S, \tau) - \alpha S.$$

$$(BT2) \quad V_4(S, \tau) = 1 - \frac{V_2(S, \tau)}{\alpha(\varepsilon + S)}, \quad \varepsilon > 0.$$

注意 1.3. この変換によって得られた $V_3(S, \tau)$, $V_2(S, \tau)$ は共に有界な関数である。

注意 1.4. $V_3(S, \tau)$, $V_2(S, \tau)$ はそれぞれ次の性質をもつ。

$$\begin{cases} V_3(S, \tau) \simeq 0 \quad \text{exponentially as } S \rightarrow \infty, \\ V_4(S, \tau) \simeq O\left(\frac{1}{S}\right) \quad \text{as } S \rightarrow \infty. \end{cases}$$

注意 1.5. $V(S, t)$ (or $V_2(S, \tau)$) の挙動は未知であるため解析には変換

$$V_2(S, \tau) = \frac{v(S, \tau)}{1 - v^2(S, \tau)}$$

が必要になる。

以上の変換によって得られた $V_3(S, \tau)$, $V_2(S, \tau)$ はそれぞれ次の方程式をの解となる。

$$(3) \quad \frac{\partial V_3}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_3}{\partial S^2} - \kappa\sigma S^2 \sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}} \left| \frac{\partial^2 V_3}{\partial S^2} \right| + rS \frac{\partial V_3}{\partial S} - rV_3$$

$$\text{in } (S, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$$

$$V_2(S, 0) = V_0(S) - \alpha S \quad \text{for } S \geq 0,$$

$$V_2(0, t) = 0 \quad \text{for } 0 \leq t < T.$$

注意 1.6. $V_3(S, t) \simeq 0$ exponentially as $S \rightarrow \infty$.

注意 1.7. $V_2(S, t) = V_3(S, t) + \alpha S$.

注意 1.8. $V_0(S) = \alpha S$ ならば $V_3(S, t) = 0$ (i.e. $V_2(S, t) = \alpha S$) が解となる。

$$(4) \quad \frac{\partial V_4}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_4}{\partial S^2} + \kappa\sigma S^2 \sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}} \left| \frac{\partial V_4}{\partial S^2} + \frac{2}{\varepsilon + S} \frac{\partial V_4}{\partial S} \right|$$

$$+ \left\{ \frac{\sigma^2 S^2}{\varepsilon + S} + rS \right\} \frac{\partial V_4}{\partial S} - \frac{r\varepsilon V_4}{\varepsilon + S} + \frac{r\varepsilon}{\varepsilon + S}$$

in $(S, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$,

$$V_4(S, 0) = 1 - \frac{V_0(S)}{\alpha(\varepsilon + S)} \quad \text{for } S \geq 0,$$

$$V_4(0, t) = 1 \quad \text{for } 0 < t < T.$$

注意 1.9. $V_4(S, t) \simeq O\left(\frac{1}{S}\right)$ as $S \rightarrow \infty$.

注意 1.10. $V_2(S, t) = \alpha(\varepsilon + S)(1 - V_4(S, \tau))$

注意 1.11. $V_0(S) = \alpha S$ ならば $V_4(S, t) = 1 - \frac{S}{\varepsilon + S}$.

(i.e. $V_2(S, \tau) = \alpha S$) が解である.

更に無限領域のままでは数値計算が出来ないので次の変換 (BT3) を施して有界区間に変換して計算する.

$$(BT3) \quad S = \frac{x}{1-x^2}.$$

この変換 S によって無限領域 $(-\infty, +\infty)$ は区間 $(-1, 1)$ 上に、 0 は 0 に変換される.

$$\text{注意 1.12. } x = \frac{2S}{1 + \sqrt{1 + 4S^2}}$$

$$\text{注意 1.13. } \frac{dS}{dx} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}, \quad \frac{dx}{dS} = \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{注意 1.14. } \frac{\partial}{\partial S} &= \frac{dx}{dS} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial^2}{\partial S^2} &= \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \\ &= \left\{ \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} \right\}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &\quad - 2x(3+x^2) \frac{(1-x^2)^3}{(1+x^2)^3} \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

3. 問題

以上の変換によっては Hoggard-Whalley-Wilmott 方程式 (1) の数値解を求めるためには次の問題を解けば良い.

問題 1 (MHWW1: Modified HWW Problem 1.)

次の条件を満たす $u_3(x, \tau)$ ($\equiv V_3\left(\frac{x}{1-x^2}, \tau\right)$) を求めよ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial \tau} &= \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{x^2(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \\ &\quad - \kappa \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^3} \left| (1-x^2)(1+x^2) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. - 2x(3+x^2) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right| + \frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^3} \{r(1+x^2) \\ &\quad - \sigma^2 x^2(3+x^2)\} \frac{\partial u_3}{\partial x} - r u_3 \end{aligned}$$

in $(x, \tau) \in (0, 1) \times (0, T)$

$$u_3(x, 0) = V_0\left(\frac{x}{1-x^2}\right) - \alpha \frac{x}{1-x^2} \quad \text{for } 0 < x < 1$$

$$u_3(0, \tau) = 0, \quad u_3(1, \tau) = 0 \quad \text{for } 0 \leq \tau < T$$

注意. $V_0\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \alpha \frac{x}{1-x^2}$ ならば $u_3(x, \tau) = 0$ は解である.

問題 2 (MHWW2: Modified HWW Problem 2.)

$\varepsilon > 0$ に対して次の条件を満たす

$u_4(x, \tau)$ ($\equiv V_4\left(\frac{x}{1-x^2}, \tau\right)$) を求めよ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_4}{\partial \tau} &= \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{x^2(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + \frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)} \\ &\quad \left\{ -\sigma^2 \frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{\sigma^2 x}{\varepsilon(1-x^2) + x} + r \right\} \frac{\partial u_4}{\partial x} \\ &\quad + \kappa \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^3} \left| (1-x^2)(1+x^2) \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left\{ \frac{(1+x^2)^2}{\varepsilon(1-x^2) + x} - x(3+x^2) \right\} \frac{\partial u_4}{\partial x} \right| \\ &\quad - \frac{r\varepsilon(1-x^2)}{\varepsilon(1-x^2) + x} u_4 + \frac{r\varepsilon(1-x^2)}{\varepsilon(1-x^2) + x} \end{aligned}$$

in $(x, \tau) \in (0, 1) \times (0, T)$

$$u_4(x, 0) = 1 - \frac{(1-x^2)V_0\left(\frac{x}{1-x^2}\right)}{\alpha\varepsilon(1-x^2) + x} \quad \text{for } 0 < x < 1$$

$$u_4(0, \tau) = \varepsilon, \quad u_4(1, \tau) = 0 \quad \text{for } 0 \leq \tau \leq T$$

注意. $V_0\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \alpha \frac{x}{1-x^2}$ ならば $u_4(x, \tau) =$

$$\left(\Rightarrow \frac{2\kappa}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} = \frac{1}{2} < 1 \right)$$

$\frac{\varepsilon(1-x^2)}{\varepsilon(1-x^2)+x}$ は解である.

$$r = 0.1$$

$$\varepsilon = 1 \text{ for } u_4$$

初期値 $V_0(S)$

4. 数値シミュレーションの実行

数値シミュレーションは以下のパラメータと初期値の下に実行した.

各定数の値

$$\alpha = 1$$

$$\sigma = 1, \quad \kappa = \frac{1}{4}, \quad \delta t = \frac{2}{\pi}$$

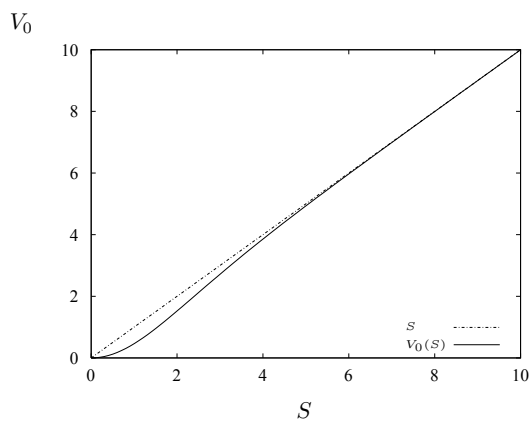
$$(IC1) \quad V_0(S) = S \cdot \tanh\left(\frac{S}{2}\right) \text{ for } u_3, u_4$$

$$(IC2) \quad V_0(S) = \frac{1}{2} (S + \sqrt{(S-10)^2 + 4} - \sqrt{104})$$

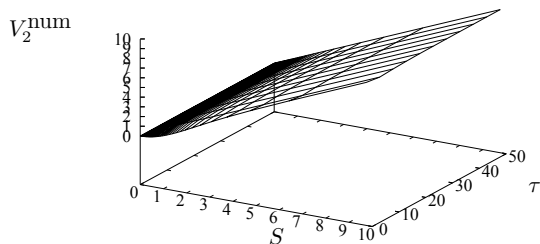
for u_4

Numerical results for (MHWW1)

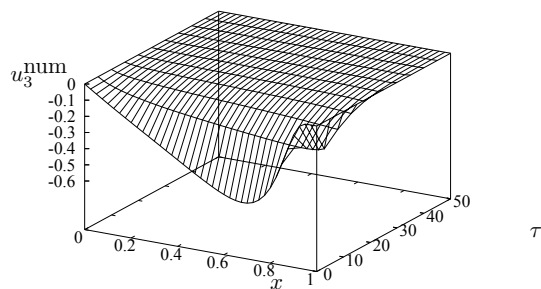
- $V_0(S) = S \cdot \tanh\left(\frac{S}{2}\right)$ ($\simeq S$ exponentially as $S \rightarrow \infty$)
- Double precision
- Explicit Euler method in time \oplus 2nd order FDM in space
- $T = 50$



Profile of $V_0(S)$



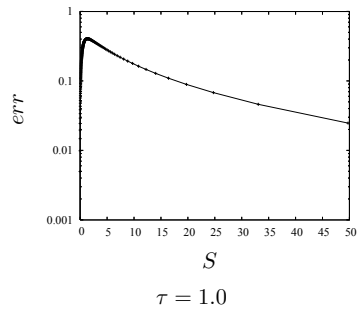
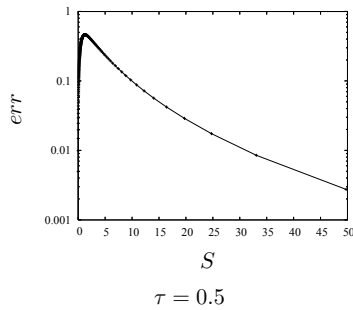
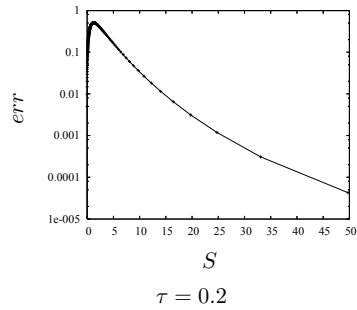
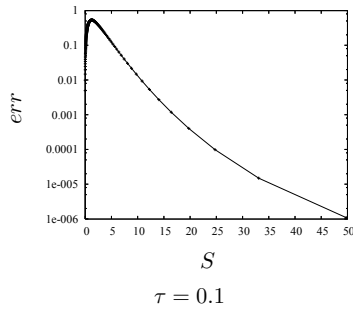
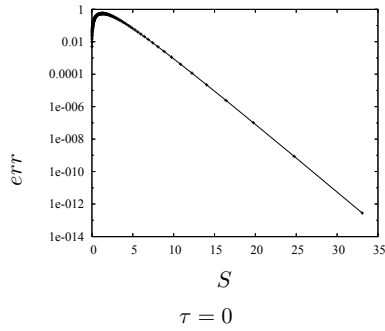
(a) Profile of V_2



(b) Profile of u_3

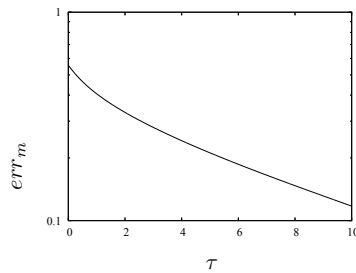
Profiles of numerical solutions ($\Delta x = 1/200$, $\Delta \tau = 10^{-5}$)

Numerical results for (MHW1)–2



Convergence of $V_2^{\text{num}}(S, \tau)$ to S as S increases

$$(err(S, \tau) = |V_2^{\text{num}}(S, \tau) - S|, \Delta\tau = 10^{-5}, \Delta x = 1/200)$$

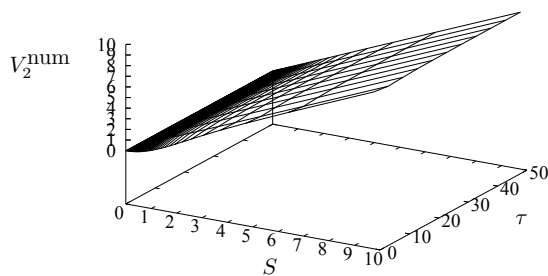
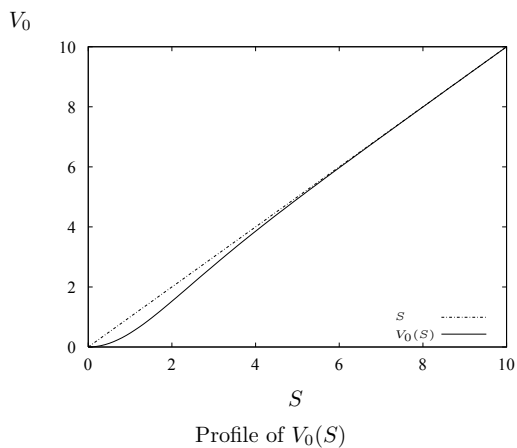


Convergence of $V_2^{\text{num}}(S, \tau)$ to S as τ increases

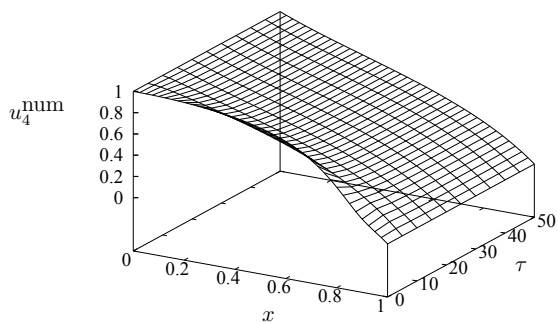
$$(err_m(\tau) = \max_{0 \leq i \leq n_x-1} |V_2^{\text{num}}(S_i, \tau) - S_i|, \Delta\tau = 10^{-5}, \Delta x = 1/200, S_i = x_i/(1 - x_i^2), x_i = i \cdot \Delta x)$$

Numerical results for (MHWW2)

- $V_0(S) = S \cdot \tanh\left(\frac{S}{2}\right) (\simeq S \text{ exponentially as } S \rightarrow \infty)$
- Double precision
- Explicit Euler method in time \oplus 2nd order FDM in space
- $T = 50$



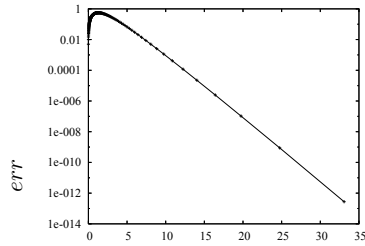
(a) Profile of V_2



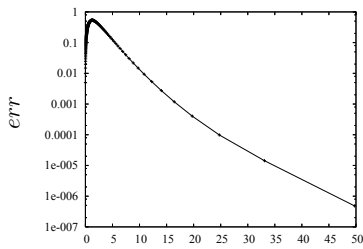
(b) Profile of u_4

Profiles of numerical solutions ($\Delta x = 1/200, \Delta \tau = 10^{-5}$)

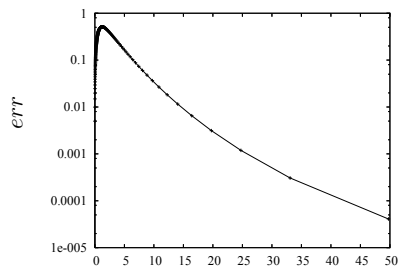
Numerical results for (MHW2)–2



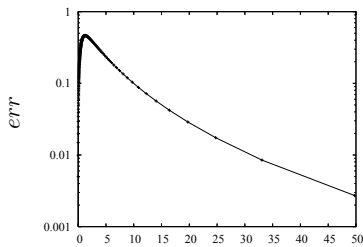
S
 $\tau = 0$



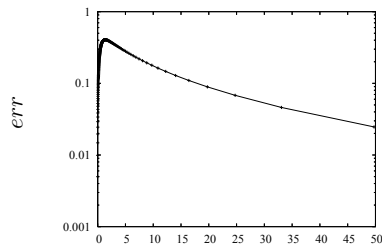
S
 $\tau = 0.1$



S
 $\tau = 0.2$



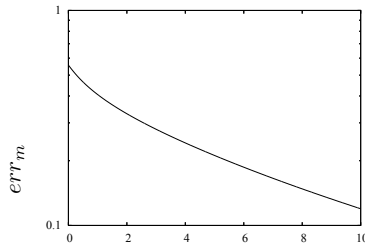
S
 $\tau = 0.5$



S
 $\tau = 1.0$

Convergence of $V_2^{\text{num}}(S, \tau)$ to S as S increases

$$(err(S, \tau) = |V_2^{\text{num}}(S, \tau) - S|, \Delta\tau = 10^{-5}, \Delta x = 1/200)$$



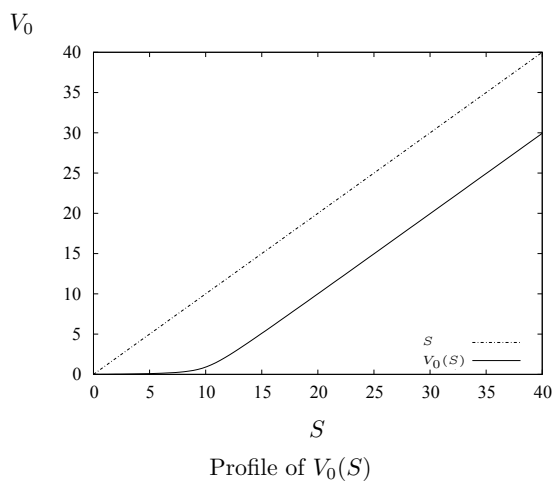
τ

Convergence of $V_2^{\text{num}}(S, \tau)$ to S as τ increases

$$(err_m(\tau) = \max_{0 \leq i \leq n_x - 1} |V_2^{\text{num}}(S_i, \tau) - S_i|, \Delta\tau = 10^{-5}, \Delta x = 1/200, S_i = x_i / (1 - x_i^2), x_i = i \cdot \Delta x)$$

Numerical results for (MHWW2)–3

- $V_0(S) = (S + \sqrt{(S-10)^2 + 4} - \sqrt{104})/2$
- Double precision
- Explicit Euler method in time \oplus 2nd order FDM in space
- $T = 50$

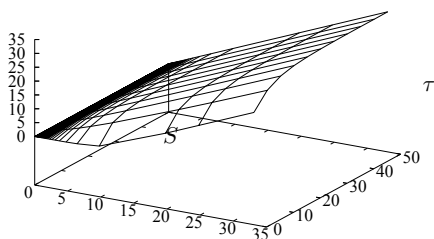


注意. 境界条件: $u_4(1, \tau) = 0, \tau \geq 0$ であるので

- (1) A solution of (MHWW2) is assumed to be $\frac{V_2(S, \tau)}{S} \rightarrow 1$ as $S \rightarrow +\infty$.
- (2) S is selected as a stationary solution in (MHWW2).

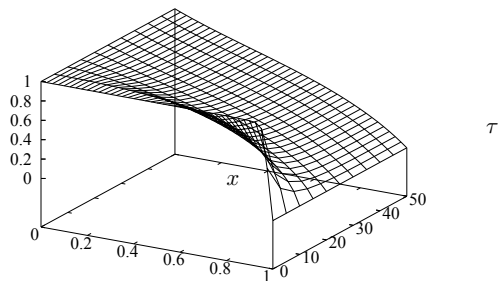
Numerical results for (MHW2) - 3

V_2^{num}



(a) Profile of V_2

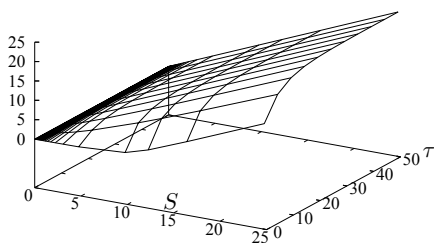
u_4^{num}



(b) Profile of u_4

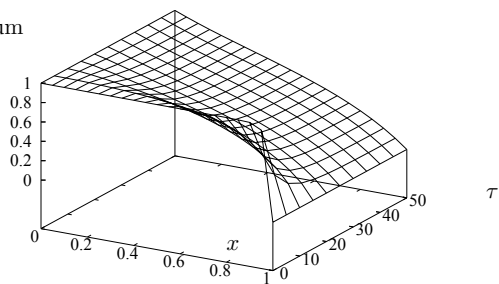
Profiles of numerical solutions ($\Delta x = 1/200, \Delta \tau = 10^{-5}$)

V_2^{num}



(a) Profile of V_2

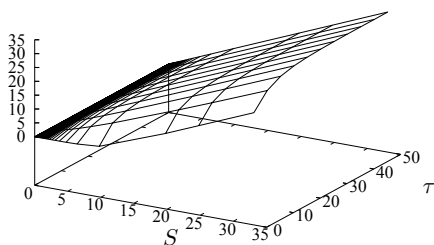
u_4^{num}



(b) Profile of u_4

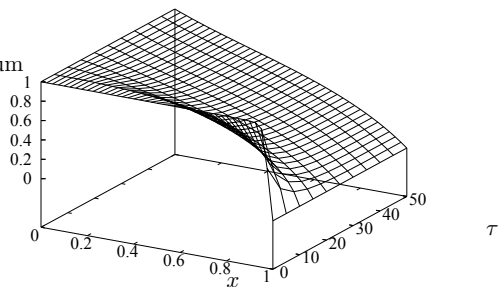
Profiles of numerical solutions ($\Delta x = 1/100, \Delta \tau = 10^{-5}$)

V_2^{num}



(a) Profile of V_2

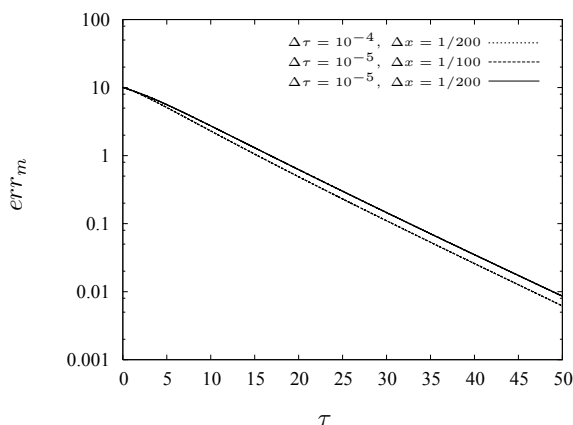
u_4^{num}



(b) Profile of u_4

Profiles of numerical solutions ($\Delta x = 1/200, \Delta \tau = 10^{-4}$)

Numerical results for (MHW2) - 4



Convergence of $V_2^{\text{num}}(S, \tau)$ to S as τ increases

$$(err_m(\tau) = \max_{0 \leq i \leq n_x - 1} |V_2^{\text{num}}(S_i, \tau) - S_i|, \Delta\tau = 10^{-5}, \Delta x = 1/200, S_i = x_i / (1 - x_i^2), x_i = i \cdot \Delta x)$$

5. 結論

取引費用を伴う Hoggard-Whalley-Wilmott 方程式の理論的な結果 (定理の主張) を数値的に確認するための数値シミュレーションを実行した.

1. 無限領域における非有界な解の近似計算を有界変換変換を施して得られた有界領域の有界な解をもつ非線形熱方程式の逆問題として数値的に解いた.
2. 数値手法としては倍精度, 陽的オイラー法を用いた.
3. 定理の主張を確実に裏付ける結果は得られなかった. これは非適切な可能性のある逆問題を数値的に解く際の誤差の影響の可能性が高い.
4. $\kappa = 0$ の場合の方程式 Black-Scholes 方程式の解との比較する予定である.

謝辞 1. この研究は日本大学経済学部経済科学研究所の補助金を受けて実行された.

2. この論文は一橋大学石村直之教授, 徳島大学今井仁司教授の協力を得た.

(日本大学理工学部教授)

参考文献

- Amster, P., C. G. Averbu, M. C. Mariani, and D. Rial (2005) "A Black-Scholes option pricing model with transaction costs," *Journal of Math. Anal. Appl.*, Vol. 303, pp. 688-695.
- Black, F. and M. Scholes (1973) "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637-659.
- Boyle, P. P. and T. Vorst (1992) "Option replication in discrete time with transaction costs," *Journal of Finance*, Vol. 47, pp. 271-293.
- Davis, M. H. A., V.G. Panes, and T. Zariphopoulou (1993) "European option pricing with transaction costs," *SIAM Journal of Control and Optim.*, Vol. 31, pp. 470-493.
- Dewynne, J. N., A. E. Whalley and P. Wilmott (1995) "Path-dependent options and transaction costs," in S. D. Howison, F. P. Kelly and P. Wilmott (eds.), *Mathematical Models in Finance*, London: Chapman and Hall, pp. 67-79.
- Friedman, A. (1983) *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Florida: Krieger Publishing Company.

- Hodges, S. D. and A. Neuberger (1989) "Optimal replication of contingent claims under transaction costs," *Rev. Futures Markets*, Vol. 8, pp. 222-239.
- Hoggard, T., A. E. Whalley and P. Wilmott (1994) "Hedging option portfolios in the presence of transaction costs," *Advances in Futures and Options Res.*, Vol. 7, pp. 21-35.
- Hull, J. (2000) *Options, Futures, and Other Derivatives*, 4th edition, New Jersey: Prentice-Hall.
- Imai, H. (2005) "Some methods for removing singularities and infinity in numerical simulations," in T. Aiki, N. Kenmochi, M. Niezgodka and M. Ôtani (eds.), *The Proceedings of Third Polish – Japanese Days on Mathematical Approach to Nonlinear Phenomena: Modelling, Analysis and Simulations*, Tokyo: Gakuto, pp. 103-118.
- Ishimura, N. "Remarks on the nonlinear partial differential equations of Black-Scholes type with transaction costs," preprint, submitted.
- Leland, H. E. (1985) "Option pricing and replication with transaction costs," *Journal of Finance*, Vol. 40, pp. 1283-1301.
- Merton, R. C. (1973) "Theory of rational option pricing," *Bell Journal of Econ. Manag. Sci.*, Vol. 4, pp. 141-183.
- Mottate, I. (March 2006) "Option pricing in the presence of transaction costs (Torihiki cost ga sonzaisuru baaino option no pricing ni tsuite)", Thesis for the Master-course degree, Graduate School of Commerce and Management, Hitotsubashi University, (in Japanese).
- Whalley, A. E. and P. Wilmott (1999) "Optimal hedging of options with small but arbitrary transaction cost structure," *Euro. Journal of Appl. Math.*, Vol. 10, pp. 117-139.
- Wilmott, P. (2000) *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, Vol. I, II, New York: John Wiley and Sons, Ltd.
- Wilmott, P., S. Howison, and J. Dewynne (1995) *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Yokoya, S. (2004) "Option hedging strategy with transaction costs," *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, Vol. 53, pp. 291-295.