

March 2012

日本の商品先物市場におけるボラティリティの
長期記憶性に関する分析

三井 秀俊

Research Institute of Economic Science

College of Economics, Nihon University

日本の商品先物市場におけるボラティリティの 長期記憶性に関する分析

三井秀俊*

2012年3月

本論文は、FIGARCH モデル、FIEGARCH モデルを用いて日本の商品先物市場のボラティリティの長期記憶性に関して分析を行なったものである。商品先物市場のデータとして日経商品先物指数、東穀農産物指数、日経・東工取商品指数、金(標準)のデータを用いて、これらのボラティリティの変動性に関して検証を行なった。誤差項の分布として、正規分布だけでなく Student- t 分布、一般化誤差分布、skewed-Student t を仮定してモデルの推定を行なった。実証分析の結果として、これらのボラティリティは定常長期記憶過程か、非定常長期記憶過程に従うことが明らかとなった。また、商品先物の収益率に関する時系列分析に対して正規分布よりも裾の厚い分布を用いることは有効であることがわかった。

1 はじめに

近年の新興国の経済成長率の増加、世界の人口の増加、投機マネーの流入により商品 (commodity) 価格は上昇している。そのため、投資家も株式、債券、通貨と同様に商品も金融資産の一つとして考えるようになった。商品先物の収益率は株式と債券の収益率と負の相関になることが多いため、株式・債券ポートフォリオに商品先物を組み込むことでポートフォリオの変動を抑制するのに有効である¹⁾。最近では、商品先物取引以外にも商品の指数連動型上場信託 (ETF) や投資信託も数多くなり投資環境も整備されてきた。しかし、他の金融資産と同様に商品先物の価格変動は激しくリスクも存在する²⁾。金融資産の価格変動の分析には、収益率の標準偏差で測るボラティリティ (volatility) に注目することが多い。ボラティリティは時間を通じて変動するため、ボラティリティの時系列変動をどのよ

*日本大学経済学部 准教授, E-mail: mitsui.hidetoshi@nihon-u.ac.jp

¹⁾詳しくは、Gorton and Rouwenhorst (2006) を参照。

²⁾諸田 (2010) は、商品の価格変動に関して概観し、商品の現物価格や先物価格が他の金融商品とは異なる変動性があることを示している。また、これまでの商品に関する価格付けモデルの研究のサーベイを行なっている。また、日本の商品先物市場に関して詳しくは、小山 (2004) を参照。

うに定式化するのが問題になる³⁾。また、商品市場での主流は商品先物取引、すなわちデリバティブ取引であるため分析を困難にしている面もある。

これまで日本の商品先物市場において、現物・先物価格の変動特性について時系列分析を用いた実証分析には以下のような研究がある。

渡部・大鋸 (1996) は、東京工業品取引所の金、銀、白金、パラジウム、綿糸、ゴム、および大阪繊維取引所の毛糸の先物価格のボラティリティと出来高・取引高との関係について実証研究を行なっている。その結果、取引高にはボラティリティとの有意な相関は得られなかったが、出来高に関してはすべての先物で予期せざる変動と価格のボラティリティとの間で有意な正の相関を観測している。渡部・大森 (2000) は、東京工業品取引所の金、銀、白金、綿糸、および大阪繊維取引所の毛糸の先物価格と出来高の関係を動学的 2 変量分布混合モデルによりベイズ推定法を用いて分析を行なっている。ここでは、価格変化率と出来高の相関係数をうまく説明できたのは、毛糸のみであるという結果を得ている。

飯原・他 (2000) は、東京工業品取引所とニューヨーク商品取引所で取引されている金先物価格を使用して Schwartz (1997) の提案した Ornstein-Uhlenbeck 過程によりコンビニエンス・イールド (Convenience yield) も確率的に変動するモデルを用いて分析を行なっている。モデルの推定には状態空間モデルに変換しカルマン・フィルターにより最尤法を行なっている。日・米両国の金先物におけるコンビニエンス・イールドは確率的に変動しており、両国の金先物価格は極めて似た動きをしていることを示している。

羽森・羽森 (2000) は、シカゴ商品取引所と東京穀物商品取引所で取引されている大豆ととうもろこしの収益率のボラティリティに関して、日・米間でどのような相違があるのかどうかを Bollerslev (1986) の GARCH モデルと Glosten *et al.* (1993) の GJR モデルを用いて比較・検討を行なっている。ボラティリティの変動特性を捉えるには、日・米両国とも GARCH モデルが有効であり、GJR モデルにおけるボラティリティの非対称性は存在しないことを示している⁴⁾

伊藤 (2006) は、東京工業品取引所の金、銀、白金、ゴムを用いた共和分検定では価格の連動性はみられなかったが、Granger 因果性検定により貴金属先物の商品間では金が銀や白金の価格形成に影響を与えていることを示している。また、東京穀物商品取引所のとうもろこし、粗糖、大豆、小豆を用いた共和分検定でも価格の連動性はみられず、Granger 因果性検定では、これらの個別商品間で因果性が無いという結果を得ている。

森保 (2008) は、東京工業品取引所で取引されている金先物のティック・データを利用し

³⁾これまで、Engle (1982) の ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) モデル、Bollerslev (1986) の GARCH (Generalized ARCH) モデル、Nelson (1991) の EGARCH (Exponential GARCH) モデルが頻繁に使用されてきた。詳しくは、Tsay (2010) を参照。

⁴⁾三井 (2010) では、GJR モデルによりニューヨーク WTI (West Texas Intermediate) 原油先物価格とニューヨーク金先物価格の日次データを用いて分析を行なっている。ここでも先物価格収益率とボラティリティとの間の非対称性は観測されていない。

て, Russell and Engle (2005) の ACM-ACD⁵⁾ モデルにより日中の取引における価格変化と取引時間間隔の関係をマーケット・マイクロストラクチャーの観点から検証を行なっている⁶⁾。分析の結果から価格変化は午前の取引開始直後と午後の取引終了直前に生じやすく, ボラティリティも高くなり取引時間間隔も短く活発に取引がなされることを明らかにしている。また, 取引時間間隔は過去の取引時間間隔に強く影響を受け, 残存期間が長ければ取引時間間隔も長くなることを示している。

本論文では, ボラティリティの長期記憶 (long memory) 性に焦点を当て実証分析を行なう。ボラティリティの短期記憶 (short memory) 過程に関しては上記の羽森・羽森 (2000) が GARCH モデルと GJR モデルを使用して実証分析を行なっている。しかし, ボラティリティのショックの減衰は, 短期記憶過程よりも遅いことが指摘されている。そこで本論文では, 日本の商品先物市場でもボラティリティの長期記憶性があるかどうかの検証を行なう。ボラティリティの長期記憶性が存在するならば, 長期の限月をもつ先物やオプションの価格付けがより正確に行なうことができるようになる。長期記憶性を捉えるため Baillie *et al.* (1996) の FIGARCH (Fractionally Integrated GARCH) モデルと Bollerslev and Mikkelsen (1996) の FIEGARCH (Fractionally Integrated Exponential GARCH) モデルを使用する。

実証分析を進めるにあたっては, 2003年4月1日から2010年12月30日までの日経商品先物指数 (Nikkei Commodity Futures Index; NCF Index), 東穀農産物指数 (TG Index), 日経・東工取商品指数 (Nikkei-TOCOM Commodity Index; NTC Index), 金 (標準) の日次データを用いて実証的な検証を行なった。主に指数を使用した分析に焦点を当てるのは, 個別の商品先物ではなく商品先物市場全体のボラティリティ変動の特性を検証するためである。また, 個別の商品先物の多くは価格水準や変動性に季節性が出やすいためである。個別の商品先物の中からは, 出来高・建玉が最も高い金 (標準) を選択した。本研究の実証分析の結果として, 主に以下の結果が得られた。(1) 日経商品先物指数, 東穀農産物指数, 日経・東工取商品指数, 金 (標準) のボラティリティは, 定常長期記憶過程か, あるいは, 非定常長期記憶過程に従う。(2) 各々の収益率についてのリスク・プレミアムと各々の収益率とボラティリティとの間の非対称性を観測することはできなかった。(3) 商品先物市場における時系列分析に対して正規分布よりも裾の厚い分布を用いることは有効である。

本論文の以下の構成は次の通りである。第2節では, FIGARCH モデルと FIEGARCH モデルに関して解説し, 本論文で用いた誤差項の分布について説明する。第3節では, 本論文で利用した日本の商品先物市場のデータと FIGARCH モデルと FIEGARCH モデルによる実証結果に関して述べる。最後の第4節では, まとめと今後の課題について言及する。

⁵⁾Autoregressive Conditional Multinomial-Autoregressive Conditional Duration モデルの略である。

⁶⁾マーケット・マイクロストラクチャーによる日本の商品先物市場の研究として, 東京工業品取引所の金先物市場に関する芹田・他 (2005), 東京工業品取引所のガソリン先物市場に関する芹田・他 (2008) などがある。

2 分析モデル

2.1 FIGARCH モデルと FIEGARCH モデル

t 時点の商品先物指数の収益率を R_t とする. Index_t を t 時点の商品先物指数の水準とすると t 時点の商品先物指数の収益率 R_t は以下のように定義される .

$$R_t = \frac{\text{Index}_t - \text{Index}_{t-1}}{\text{Index}_{t-1}} \times 100 . \quad (2.1)$$

また, S_t を t 時点の個別商品価格とすると t 時点の個別商品収益率 R_t は以下のように定義される .

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \times 100 . \quad (2.2)$$

このとき, 収益率 R_t の過程を以下のようにおく .

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t + \epsilon_t, \quad (2.3)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad (2.4)$$

$$z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, Var[z_t] = 1. \quad (2.5)$$

ここで, (2.3) 式の定数項 μ は期待収益率, λ はリスク・プレミアム (risk premium), ϵ_t は誤差項であり, 収益率に自己相関は無いと仮定する. *i.i.d.* は, 過去と独立で同一な分布 (independent and identically distributed) を表す. $E[\cdot]$ は期待値, $Var[\cdot]$ は分散を各々表す. 本論文では, ボラティリティの長期記憶性⁷⁾ を捉えるために, Baillie *et al.*(1996) が提案した FIGARCH モデルと Bollerslev and Mikkelsen (1996) が提案した FIEGARCH モデルを用いることにする. FIGARCH(p, d, q) モデルは, ボラティリティ σ_t^2 が以下の過程で表される⁸⁾.

$$\sigma_t^2 = \omega [1 - \beta(L)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta(L)]^{-1} \phi(L)(1 - L)^d \right\} \epsilon_t^2. \quad (2.6)$$

⁷⁾長期記憶性に関して詳しくは, 矢島 (2003), 松葉 (2007) を参照.

⁸⁾あるいは, 以下のように表現される.

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega^* + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i L^i \epsilon_t^2 \\ &= \omega^* + \psi(L) \epsilon_t^2, \quad 0 \leq d \leq 1. \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \omega^* &= \omega [1 - \beta(L)]^{-1}, \\ \psi(L) &= 1 - [1 - \beta(L)]^{-1} \phi(L)(1 - L)^d. \end{aligned}$$

ここで, $\beta(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_p L^p$, $\phi(L) = [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1 - L)^{-1}$, $\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_p L^p$ を表す. また, L はラグ・オペレータ (Lag operator) を表し, $L^i y_t = y_{t-i}$, ($i = 0, 1, \dots$) となる. $(1 - L)^d$ は, 以下のように表現される.

$$\begin{aligned} (1 - L)^d &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)} L^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\cdots(d-k+1)}{k!} (-L^k). \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで, $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数 (gamma function)⁹⁾ である. $(1 - L)^d$ における d が長期記憶性を捉えるパラメータを示す. $0 < d < 1$ となるとき, ボラティリティ σ_t^2 は長期記憶過程に従っていることがわかる. また, $0 < d < 0.5$ のとき定常長期記憶過程と呼び, $0.5 \leq d < 1$ のとき非定常長期記憶過程と呼ぶ. $d = 1$ のとき, ボラティリティ σ_t^2 は単位根を持ち非定常過程となる. $d = 0$ のとき短期記憶過程となり, Bollerslev (1986) の GARCH (p, q) モデルとなる¹⁰⁾. ここで, FIGARCH($1, d, 1$) モデルは以下のように表される.

$$\sigma_t^2 = \omega [1 - \beta_1(L)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1} \phi_1(L)(1 - L)^d \right\} \epsilon_t^2. \quad (2.8)$$

このとき以下の条件を満たすとき FIGARCH ($1, d, 1$) の条件付き分散 σ^2 は正值になる¹¹⁾.

$$\omega > 0, \beta_1 \leq \phi_1 \leq \frac{2-d}{3}, d \left(\phi_1 - \frac{1-d}{2} \right) \leq \beta_1(\phi_1 - \beta_1 + d). \quad (2.9)$$

また, $\phi_1 = 0$ のとき FIGARCH ($1, d, 0$) モデルとなる.

FIGARCH (p, d, q) モデルは, ボラティリティ σ_t^2 が以下の過程で表される.

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \phi(L)^{-1}(1 - L)^{-d}[1 + \alpha(L)]g(z_{t-1}), \quad (2.10)$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma[|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|] \quad (2.11)$$

$$g(z_{t-1}) = \begin{cases} (\theta + \gamma)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|), & \text{if } z_{t-1} > 0, \\ (-\theta + \gamma)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|), & \text{if } z_{t-1} < 0. \end{cases}$$

⁹⁾ガンマ関数は以下のように定義される.

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx, \quad \text{for } \nu > 0.$$

¹⁰⁾GARCH (p, q) モデルは, ボラティリティ σ_t^2 が以下の過程で表される.

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

ラグ・オペレータ L を用いると GARCH(p, q) モデルは, 以下のように表現される.

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L)\epsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2.$$

¹¹⁾詳しくは, Baillie *et al.* (1996) を参照.

ここでは、ボラティリティの対数値を被説明変数としてパラメータの非負制約を取り除き定式化されている。 $\theta < 0$ ならば、資産価格が上昇した日の翌日より、資産価格が下落した日の翌日の方がボラティリティは上昇する。このモデルでは、ボラティリティの対数値を被説明変数としているため $\omega, \beta, \alpha, \theta, \gamma$ に非負制約は必要としない。 $d = 0$ のとき、Nelson (1991) の EGARCH (p, q) モデルとなる¹²⁾。

本来ならば、情報量基準などを用いて FIGARCH (p, d, q) モデルと FIEGARCH (p, d, q) モデルの次数 p, q の次数選択を行わなければならないが、過去の実証研究において $p = 1, q = 0$ とする場合が多い¹³⁾ ので、本論文でも FIGARCH ($1, d, 0$), FIEGARCH ($1, d, 0$) を用いて分析を行なうことにする。 FIGARCH ($1, d, 0$) は、以下のように表現される。

$$\sigma_t^2 = \omega [1 - \beta_1(L)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1}(1 - L)^d \right\} \epsilon_t^2. \quad (2.12)$$

また、FIEGARCH ($1, d, 0$) は以下のように表現される。

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) &= \omega + [1 - \beta_1(L)]^{-1}(1 - L)^{-d}g(z_{t-1}), \\ g(z_{t-1}) &= \theta z_{t-1} + \gamma[|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

これらのモデルを用いて商品先物市場におけるボラティリティの長期記憶性の実証分析を行なうことにする。

2.2 誤差項の分布の仮定

資産収益率の分布は、古くから Mandelbrot (1963), Fama (1965) で指摘されているように正規分布 (normal distribution) よりも裾が厚い分布 (fat tail) であることが知られている¹⁴⁾。そのため ARCH 型モデルの誤差項には、正規分布以外の仮定をおく場合が多くなっている。また、多くの先行研究では、誤差項の分布に正規分布よりも尖度の高い分布を用いた方が当てはまりが良いとの結果が得られている。したがって、本論文では、 z_t の分布として、

¹²⁾EGARCH (p, q) は、ボラティリティ σ_t^2 が以下の過程で表される。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) + \sum_{i=1}^q \alpha_i [\theta z_{t-i} + \gamma(|z_{t-i}| - E(|z_{t-i}|))].$$

ラグ・オペレータ L を用いると EGARCH(p, q) モデルは、以下のように表現される。

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) &= \omega + [1 - \beta(L)]^{-1}[1 + \alpha(L)]g(z_{t-1}), \\ g(z_{t-1}) &= \theta z_{t-1} + \gamma[|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|]. \end{aligned}$$

¹³⁾日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性の研究として、渡部・佐々木 (2005, 2006), 竹内 (野木森)・渡部 (2008), 竹内 (野木森)(2009) がある。これらの研究では、FIEGARCH($1, d, 0$) モデルにより実証分析を行なっている。

¹⁴⁾仁科・竹内 (1998) は、日本の商品先物市場において、金、銀、白金など 13 品目の個別の商品先物収益率の統計的特性に関して限月の異なる場合などの収益率の分布について詳細な実証研究を行なっている。ここでは、全ての個別の商品先物収益率は正規分布よりも尖度の値が高いことが報告されている。

標準正規分布 (standard normal distribution), 基準化された Student- t 分布 (standardized Student- t distribution), 一般化誤差分布 (GED: Generalized Error Distribution), 基準化された skewed-Student t 分布 (standardized skewed Student- t distribution) を使用することにする¹⁵⁾。

(i) Student- t 分布:

基準化された Student- t 分布の密度関数 $f_{(t)}(z_t; \nu)$ は以下のように与えられる。

$$f_{(t)}(z_t; \nu) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi(\nu-2)}} \left(1 + \frac{z_t^2}{\nu-2}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad \nu > 2. \quad (2.14)$$

ここで, ν は自由度 (degree of freedom) を表す。Student- t 分布は 0 について左右対称となり, $\nu > 4$ に対して尖度は 3 よりも大きくなる¹⁶⁾。また, $\nu \rightarrow \infty$ のとき標準正規分布の密度関数に収束する。

(ii) GED:

GED の密度関数 $f_{(GED)}(z_t; \nu)$ は以下のように与えられる。

$$f_{(GED)}(z_t; \nu) = \frac{\nu \exp\left(-\frac{1}{2}|z_t/\lambda_\nu|^\nu\right)}{\lambda_\nu 2^{(1+\frac{1}{\nu})}\Gamma(1/\nu)}, \quad \nu > 0, \quad (2.17)$$

$$\lambda_\nu = \sqrt{\frac{\Gamma(1/\nu) 2^{(-2/\nu)}}{\Gamma(3/\nu)}}$$

ここで, ν は裾の厚さを示すパラメータである。 $\nu = 2$ のとき z_t は標準正規分布に従う。 $\nu < 2$ のとき正規分布より裾が厚い分布に従い¹⁷⁾, $\nu > 2$ のとき正規分布より裾が薄い分布に従う¹⁸⁾。

(iii) skewed-Student t 分布:

基準化された skewed-Student t 分布の密度関数 $f_{(skt)}(z_t; \nu, \xi)$ は以下のように与えられる。

$$f_{(skt)}(z_t; \nu, \xi) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi(\nu-2)}} \left(\frac{2s}{\xi+1/\xi}\right) \left(1 + \frac{(sz_t+m)^2}{\nu-2}\xi^{-2I_t}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad \nu > 2. \quad (2.18)$$

¹⁵⁾その他の利用可能な正規分布よりも裾が厚い分布を ARCH 型モデルに応用した研究として, Bollerslev *et al.* (1994) の一般化 t 分布 (generalized t distribution) や Michelfelder (2005) の skewed GED (SGED) などがある。金融時系列分析の裾が厚い分布に関する論文集としては, Knight and Stachell (eds.) (2001), Rachev (ed.) (2003) を参照。

¹⁶⁾自由度 ν の Student- t 分布の尖度 K^t 分布は,

$$K^t \text{ 分布} = \frac{3(\nu-2)}{\nu-4} \quad (2.15)$$

$$= 3 + \frac{6}{\nu-4}, \quad \nu > 4 \quad (2.16)$$

となる。したがって, 尖度は必ず 3 より大きくなる。

¹⁷⁾ $\nu = 1$ のとき z_t は, double exponential distribution あるいは, Laplace distribution に従う。

¹⁸⁾ $\nu = \infty$ のとき z_t は, 区間 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ の一様分布 (uniform distribution) に従う。

ただし,

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{if } z_t \geq -\frac{m}{s} \\ -1 & \text{if } z_t < -\frac{m}{s} \end{cases} \quad (2.19)$$

とする. ここで, ν は自由度を表し分布の厚さを示す. ξ は非対称パラメータを表し, 分布の歪みを示す. また,

$$m = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right), \quad (2.20)$$

$$s = \sqrt{\left(\xi + \frac{1}{\xi} - 1 \right) - m^2} \quad (2.21)$$

である. $\xi = 1$, あるいは, $\ln(\xi) = 0$ のとき左右対称となり Student- t 分布と等しくなる. $\xi > 1$, あるいは, $\ln(\xi) > 0$ のとき分布の右裾が厚くなる. また, $\xi < 1$, あるいは, $\ln(\xi) < 0$ のとき分布の左裾が厚くなる. z_t の分布が標準正規分布, 基準化された Student- t 分布, GED, 基準化された skewed-Student t 分布に従う場合, (2.3) 式の z_t は各々以下のように表現される¹⁹⁾.

$$z_t \sim i.i.d.N(0, 1) \quad (2.22)$$

$$z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu) \quad (2.23)$$

$$z_t \sim i.i.d.GED(0, 1, \nu) \quad (2.24)$$

$$z_t \sim i.i.d.skt(0, 1, \nu, \xi) \quad (2.25)$$

2.3 推定法

パラメータ集合を Θ とするとき, FIGARCH(1, d , 0) モデルの誤差項が正規分布に従うときには $\Theta = (\mu, \lambda, \omega, d, \beta_1)$, 誤差項が Student- t 分布, GED に従うときには自由度 ν が追加され $\Theta = (\mu, \lambda, \omega, d, \beta_1, \nu)$, 誤差項が skewed-Student t に従うときには ξ が追加され $\Theta = (\mu, \lambda, \omega, d, \beta_1, \nu, \xi)$ となる. また, FIGARCH(1, d , 0) の場合には, 各々の FIGARCH(1, d , 0) モデルパラメータ集合に θ と γ が追加される²⁰⁾. このとき尤度関数は以下ようになる.

$$\begin{aligned} L(\Theta) &= f(R_1, R_2, \dots, R_T | \Theta) \\ &= \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_t} f\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t}\right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

¹⁹⁾ 詳しくは, Bauwens and Laurent (2005) を参照.

²⁰⁾ 誤差項が正規分布に従うときには $\Theta = (\mu, \lambda, \omega, d, \beta_1, \theta, \gamma)$, 誤差項が Student- t 分布, GED に従うときには $\Theta = (\mu, \lambda, \omega, d, \beta_1, \theta, \gamma, \nu)$, 誤差項が skewed-Student t に従うときには $\Theta = (\mu, \lambda, \omega, d, \beta_1, \theta, \gamma, \nu, \xi)$ となる.

したがって、対数尤度関数は、

$$\ln L(\Theta) = - \sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t) + \sum_{t=1}^T \ln f\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t}\right) \quad (2.27)$$

となる。また、誤差項となる標準正規分布、基準化された Student- t 分布、GED、基準化された skewed-Student t 分布に対する対数尤度関数 $\ln L_{(n)}$, $\ln L_{(t)}$, $\ln L_{(GED)}$, $\ln L_{(skt)}$ は以下のように記述される。

$$\ln L_{(n)} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [\ln(2\pi) + \ln(\sigma_t^2) + z_t^2], \quad (2.28)$$

$$\ln L_{(t)} = T \left\{ \ln \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln[\pi(\nu-2)] \right\} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln(\sigma_t^2) + (1+\nu) \ln\left(1 + \frac{z_t^2}{\nu-2}\right) \right], \quad (2.29)$$

$$\ln L_{(GED)} = \sum_{t=1}^T \left[\ln\left(\frac{\nu}{\lambda_\nu}\right) - \frac{1}{2} \left|\frac{z_t}{\lambda_\nu}\right|^\nu - \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \ln(2) - \ln \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right) - \frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) \right], \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \ln L_{(skt)} = T & \left\{ \ln \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln[\pi(\nu-2)] + \ln\left(\frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}}\right) + \ln(s) \right\} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left\{ \ln(\sigma_t^2) + (\nu+1) \ln\left[1 + \frac{(sz_t + m)^2}{\nu-2} \xi^{-2I_t}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

FIEGARCH $(1, d, 0)$ モデルにおいて、(2.13) 式の標準正規分布、基準化された Student- t 分布、GED、基準化された skewed-Student t 分布に対する $E(|z_t|)_{(n)}$, $E(|z_t|)_{(t)}$, $E(|z_t|)_{(GED)}$, $E(|z_t|)_{(skt)}$ は以下のように表される。

$$E(|z_t|)_{(n)} = \sqrt{2/\pi}, \quad (2.32)$$

$$E(|z_t|)_{(t)} = \frac{2\Gamma((1+\nu)/2)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)}, \quad (2.33)$$

$$E(|z_t|)_{(GED)} = 2^{(1/\nu)} \lambda_\nu \frac{\Gamma(2/\nu)}{\Gamma(1/\nu)}, \quad (2.34)$$

$$E(|z_t|)_{(skt)} = \frac{4\xi^2}{\xi + 1/\xi} \frac{\Gamma((1+\nu)/2)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)}. \quad (2.35)$$

パラメータの推定に関しては、統計分析ソフト G@RCH 4.2 OxMetrix²¹⁾ を利用して対数尤度関数を最大化することにより行なう。

²¹⁾ 詳しくは、Doornik (2006), Laurent and Peters (2006), 市川 (2007), 三井 (2010), Xekalaki and Degiannakis (2010) を参照。

2.4 本論文で使用するモデル

本論文では、ボラティリティの変動性の分析について、2.1 で説明した FIGARCH $(1, d, 0)$ モデルと FIEGARCH $(1, d, 0)$ モデルを使用する。また、誤差項の分布は、2.2 で解説した、正規分布、Student- t 分布、GED、skewed-Student t 分布を仮定する。本論文で使用する 8 種類のモデルを纏めると以下ようになる。

1. FIGARCH $(1, d, 0)$ - n \cdots (2.3) – (2.5), (2.12), (2.22) 式²²⁾ .
2. FIGARCH $(1, d, 0)$ - t \cdots (2.3) – (2.5), (2.12), (2.23) 式.
3. FIGARCH $(1, d, 0)$ - GED \cdots (2.3) – (2.5), (2.12), (2.24) 式.
4. FIGARCH $(1, d, 0)$ - skt \cdots (2.3) – (2.5), (2.12), (2.25) 式.
5. FIEGARCH $(1, d, 0)$ - n \cdots (2.3) – (2.5), (2.11), (2.13), (2.22) 式²³⁾ .
6. FIEGARCH $(1, d, 0)$ - t \cdots (2.3) – (2.5), (2.11), (2.13), (2.23) 式.
7. FIEGARCH $(1, d, 0)$ - GED \cdots (2.3) – (2.5), (2.11), (2.13), (2.24) 式.
8. FIEGARCH $(1, d, 0)$ - skt \cdots (2.3) – (2.5), (2.11), (2.13), (2.25) 式.

“- n ”, “- t ”, “- GED ”, “- skt ” は、誤差項が各々、正規分布、Student- t 分布、GED、skewed-Student t 分布に従うことを表す。

3 データと実証結果

3.1 データ

本論文では日本の商品先物市場のデータとして、日経商品先物指数、東京穀物商品取引所²⁴⁾ で取引されている東穀農産物指数、東京工業品取引所²⁵⁾ で取引されている日経・東

²²⁾例えば、FIGARCH $(1, d, 0)$ - n は、纏めると以下のように表される。

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.N(0, 1),$$

$$\sigma_t^2 = \omega [1 - \beta_1(L)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1 - L)^d \right\} \epsilon_t^2.$$

²³⁾例えば、FIEGARCH $(1, d, 0)$ - n は、纏めると以下のように表される。

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.N(0, 1),$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1 - L)^{-d} g(z_{t-1}),$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|].$$

²⁴⁾その他、東京穀物商品取引所では、コメ、とうもろこし、とうもろこし (コール / プット・オプション)、一般大豆、一般大豆 (コール / プット・オプション)、Non-GMO 大豆、小豆、アラビカコーヒー、ロブスタコーヒー、粗糖、粗糖 (コール / プット・オプション) が取引されている。詳しくは、東京穀物商品取引所の web site を参照。

²⁵⁾その他、東京工業品取引所では、金 (ミニ)、金 (コール・プット)、銀、白金 (標準・ミニ)、パラジウム、ガソリン、灯油、原油、中京原油 ガソリン、中京石油 灯油、ゴムが取引されている。詳しくは、東京工業品取引所の

工取商品指数と金(標準)の日次データ(daily data)を使用した。日経商品先物指数は、日本経済新聞社による商品先物の動向を示す指標である。1985年平均を100.00とし、幾何平均法で計算している。構成品目としては、東京工業品取引所と東京穀物商品取引所の商品先物市場に上場している主要品目、金、銀、プラチナ、天然ゴム、大豆、小豆、粗糖などで構成され²⁶⁾、取引の多い期先の相場を採用し1日1回算出されている。東穀農産物指数は、2003年3月31日を基準日として(同日の基準値を100.00とする)、とうもろこし、一般大豆、小豆、コメ、アラビカコーヒー生豆、粗糖の東京穀物商品取引所の上場商品6商品により構成されている。配分比率は国内の農産物需要に基づき決定されている²⁷⁾。日経・東工取商品指数は、2002年5月30日を基準日として(同日の指数値を100.00とする)、構成銘柄ごとの配分比率に当該銘柄の価格暴騰率を乗じて全銘柄分合計して算出される。東京工業品取引所に上場されている貴金属、石油、ゴム市場の全商品の価格を用いて算出しているため、東京工業品取引所市場全体の価格水準を示す指標となっている²⁸⁾。金(標準)は、純度99.99%以上の金地金を対象としている。呼値は1グラム当たりの価格となっており取引単位は1キログラム(1枚)である。ここでは、取引量の多い期先の金(標準)の先物データを使用することにする。

日経商品先物指数、日経・東工取商品指数と金(標準)のデータは日経 NEEDS-FinancialQuest から取得し、東穀農産物指数のデータは東京穀物商品取引所の web site よりダウンロードした。これらのデータを利用して第2節の FIGARCH モデルと FIEGARCH モデルのパラメータの推定を行なった。データのサンプル期間は、2003年4月1日から2010年12月30日までである(図1を参照)²⁹⁾。収益率 R_t は、(2.1)、(2.2)式により計算を行なった(図2を参照)。標本期間は、2003年4月2日から2010年12月31日まで、標本数は1899である。データの基本統計量(Descriptive statistics)として平均、標準偏差、歪度、尖度、最大値、最小値、正規性の検定統計量³⁰⁾が表1に纏められている。

web site を参照。

²⁶⁾ 配分比率は非公開となっている。

²⁷⁾ 2011年の配分比率は、とうもろこし(30.00%)、一般大豆(22.75%)、小豆(2.37%)、コメ(30.00%)、アラビカコーヒー生豆(9.47%)、粗糖(5.41%)である。東穀農産物指数に関して詳しくは、東京穀物商品取引所の web site を参照。

²⁸⁾ 2011年の配分比率は、金(27.34%)、銀(0.82%)、白金(9.22%)、パラジウム(0.66%)、ガソリン(18.73%)、灯油(8.78%)、原油(29.85%)、ゴム(4.6%)である。日経・東工取商品指数に関して詳しくは、東京工業品取引所の web site を参照。

²⁹⁾ 本論文では、図の作成は *PcGive* (統計・時系列分析ソフト) により行なった。*PcGive* に関して詳しくは、Doornik and Hendry (2001)、ヘンドリー・ドーナック (2006) を参照。

³⁰⁾ 本論文では、収益率分布の正規性検定を行なう際に、歪度と尖度を用いる Jarque and Bera (1987) の方法を利用した。Jarque - Bera 検定統計量 JB は、

$$JB = \frac{\widehat{skew}^2 T}{6} + \frac{(\widehat{kurt} - 3)^2 T}{24} \sim \chi^2(2)$$

として与えられる。ここで、 \widehat{skew} 、 \widehat{kurt} はデータから計算される歪度と尖度を各々表し、 T は標本数を表す。正規分布であれば $JB = 0$ であり、正規分布から乖離するほど JB の値は大きくなる。詳しくは、Jarque and Bera (1987) を参照。

[図 1, 図 2]

[表 1]

歪度についてみると、日経商品先物指数は歪度の値が正であり右に歪んだ分布であることがわかる。また、東穀農産物指数、日経・東工取商品指数、金（標準）は、歪度の値が負であり左に歪んだ分布であることがわかる。尖度についてみると、日経商品先物指数、東穀農産物指数、日経・東工取商品指数、金（標準）のすべてにおいて“3”を超えている。また、正規性検定が有意なことから、これらの収益率の分布は正規分布よりも裾が厚い分布に従っていることがわかる。収益率のヒストグラムと密度関数は、図 3 に描かれている。ここでは、密度 (density) と正規近似 (normal approximation) が重ねて描かれている。例えば、日経商品先物指数に関してみると、 $N(s = 1.32)$ は、表 1 より正規近似が平均 0.061、分散が 1.32^2 の正規分布 $N(0.061, 1.32^2)$ に従うことを示している。

表 2 は、各々の収益率についての単位根検定の結果を示している。本論文では、ADF (Augmented Dickey - Fuller) 検定を利用した。単位根検定のモデルの定式化としては、トレンド (trend) が無い場合と有る場合の 2 種類のモデルを用いた³¹⁾。ADF 検定のラグの次数には 1 次から 5 次までを使用し分析を行なった。表 2 より、検定に対するラグの次数は、日経商品先物指数、日経・東工取商品指数、金（標準）ではラグ 1 の ADF(1) を用い、東穀農産物指数ではラグ 5 の ADF(5) を用いる。臨界値は、Mackinnon (1991) の計算に基づく値を使用する。トレンドが無い場合も有る場合も、各々の収益率に関して単位根を持つという帰無仮説は棄却された。

[図 3]

[表 2]

3.2 実証結果

本論文の実証結果は、表 3 - 表 6 に纏められている。実証結果を纏めると以下のようになる。

(1) 日経商品先物指数

³¹⁾本論文では、ADF(n) 検定は以下の定式化で行なった。

$$\Delta x_t = \alpha + bx_{t-1} + \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta x_{t-1} + u_t \quad (\text{トレンド無し}),$$

$$\Delta x_t = \alpha + \mu t + bx_{t-1} + \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta x_{t-1} + u_t \quad (\text{トレンド有り}).$$

ADF 検定に関して、詳しくは Dickey and Fuller (1981) を参照。

- (i) FIGARCH (1, d , 0) モデル: μ, ω に関しては, 誤差項が正規分布に従う場合には有意ではなく, Student- t 分布, GED 分布, skewed-Student t に従う場合には統計的に有意な結果となった. λ に関しては, 全ての分布において統計的に有意ではなかった. λ が有意でないということは, 日経商品先物指数の株価収益率にはリスク・プレミアムが存在しないということを意味する. 長期記憶性を示す d の推定値は, 0.951, 0.717, 0.740, 0.717 であり, 統計的に有意な結果が有意な結果が得られた. ただし, d の推定値が $0.5 \leq d < 1$ であるということは, 日経商品先物指数のボラティリティ σ^2 の過程は, 非定常長期記憶過程に従っていることがわかる. β_1 はボラティリティの持続性を表すパラメータであり, 全ての分布に関して統計的に有意な推定値となっている. 自由度 ν に関して, t 分布, skewed-Student t の場合には推定値は各々 5.330, 5.353 であり統計的に有意な結果となり $\nu > 4$ となっている. また, GED 分布の場合にも推定値は 1.128 であり統計的に有意な結果となり $\nu < 2$ となっている. これらの結果より, 日経商品先物指数の収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることがわかる. また, 非対称パラメータ $\ln(\xi)$ の推定値は -0.109 で統計的に有意であり, 収益率の分布の左裾が厚いことを示している.
- (ii) FIEGARCH (1, d , 0) モデル: μ, ω に関しては, 誤差項が正規分布分布, GED 分布に従う場合には有意ではなく, Student- t 分布, skewed-Student t に従う場合には統計的に有意な結果となった. λ に関しては, FIGARCH(1, d , 0) モデル場合と同様に全ての分布に関して統計的に有意ではなかった. 長期記憶性を示す d の推定値は, 0.718, 0.875, 0.827, 0.758 であり, 統計的に有意な結果が有意な結果が得られた. ただし, d の推定値が $0.5 \leq d < 1$ であるということは, FIEGARCH(1, d , 0) モデルの場合と同様に日経商品先物指数のボラティリティ σ^2 の過程は, 非定常長期記憶過程に従っていることがわかる. β_1 は, 全ての分布に関して統計的に有意な推定値となっている. 非対称性を示すパラメータ θ に関して, 全ての分布において統計的に有意な結果が得られなかった. 自由度 ν に関して, Student- t 分布, skewed-Student t の場合には推定値は各々 4.390, 5.603 であり統計的に有意な結果となり $\nu > 4$ となっている. また, GED 分布の場合にも推定値は 1.149 であり統計的に有意な結果となり $\nu < 2$ となっている. これらの結果より, ここでも日経商品先物指数の収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることがわかる. また, $\ln(\xi)$ の推定値は -0.017 で統計的に有意であり, ここでも日経商品先物指数収益率の分布の左裾が厚いことを示している.

以下, 東穀農産物指数, 日経・東工取商品指数, 金 (標準) の推定結果に関しては重要な点を簡潔に述べることにする.

(2) 東穀農産物指数

FIGARCH (1, d , 0) モデルと FIEGARCH (1, d , 0) モデルにおける λ に関しては、全ての分布に関して統計的に有意ではなかった。長期記憶性を示す d の推定値は、FIGARCH(1, d , 0) モデルでは、0.310, 0.321, 0.311, 0.318 であり、FIEGARCH (1, d , 0) においては 0.425, 0.398, 0.402, 0.411 であり統計的に有意な結果が有意な結果が得られた。ここでは、 d の推定値が $0 < d < 0.5$ であるということは、東穀農産物指数のボラティリティ σ^2 の過程は、定常長期記憶過程に従っていることがわかる。 β_1 は、両方のモデルかつ全ての分布に関して統計的に有意な推定値となっている。FIEGARCH (1, d , 0) モデルの θ に関しては、全ての分布において統計的に有意な結果が得られなかった。 ν の推定値が統計的に有意なことから東穀農産物指数の収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることがわかる。

(3) 日経・東工取商品指数

λ に関して、統計的に有意となったものはなかった。長期記憶性を示す d の推定値は、FIGARCH (1, d , 0) モデルでは、0.783, 0.796, 0.774, 0.830 であり、FIEGARCH(1, d , 0) では 0.821, 0.832, 0.887, 0.879 であり統計的に有意な結果が有意な結果が得られた。ただし、 d の推定値が $0.5 \leq d < 1$ であるということは、日経商品先物指数の場合と同様に日経・東工取商品指数のボラティリティ σ^2 の過程は、非定常長期記憶過程に従っていることがわかる。 β_1 は、全てにおいて統計的に有意な推定値となっている。FIEGARCH(1, d , 0) モデルの θ に関しては、全ての分布において統計的に有意な結果が得られなかった。 ν の推定値も全て統計的に有意な値が得られている。

(4) 金 (標準)

上記の全ての指数と同様に λ に関して、統計的に有意な値は得られていない。長期記憶性を示す d の推定値は、FIGARCH (1, d , 0) モデルでは、0.387, 0.413, 0.395, 0.402 であり、FIEGARCH (1, d , 0) では、0.288, 0.268, 0.410, 0.271 であり統計的に有意な値が得られた。 d の推定値が $0 < d < 0.5$ であることから東穀農産物指数の場合と同様に金 (標準) のボラティリティ σ^2 の過程は、定常長期記憶過程に従っていることがわかる。また、上記の全ての指数と同様に β_1 は、統計的に有意な値となり、FIEGARCH (1, d , 0) モデルの θ は、統計的に有意な値とはなっていない。ここでも ν は統計的に有意な結果が得られている。

次に、FIGARCH (1, d , 0) モデルと FIEGARCH (1, d , 0) モデルの定式化が正しいかどうかのモデルの診断を Ljung - Box の Q 統計量により行なう³²⁾。表 3 - 表 6 の $Q(20)$ と $Q^2(20)$ は、各々 20 次までの基準化した残差 ($\hat{\varepsilon}_t^{-1}$) とその 2 乗の Ljung - Box の Q

³²⁾Ljung - Box の統計量は、以下のように計算される。

$$Q^{LB} = T(T+2) \sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{T-i}$$

統計量を表している。ここでは、漸近的に自由度 20 の χ^2 分布に従う。日経商品先物指数、東穀農産物指数、日経・東工取商品指数、金（標準）の全ての FIGARCH(1, d, 0) モデルと FIEGARCH (1, d, 0) モデルに関して統計的に有意な推定値が得られていない。全ての $Q(20)$ と $Q^2(20)$ の値に対して、帰無仮説は 10%有意水準でも棄却することはできない。ここから、FIGARCH (1, d, 0) モデルと FIEGARCH(1, d, 0) モデルは、各個別商品のボラティリティの自己相関を捉えていることがわかる。例として、図 4 は各個別商品の FIGARCH(1, d, 0)-*skt* モデルの条件付分散 (conditional variance) を示している。また、図 5 は 各個別商品の FIGARCH (1, d, 0)-*skt* モデルにおける基準化した残差の分布を示している。

[表 3 – 表 6]

[図 4, 図 5]

4 結論と今後の課題

本論文は、FIGARCH (1, d, 0) モデル、FIEGARCH (1, d, 0) モデルを用いて日本の商品先物市場のボラティリティの変動性に関して分析を行なったものである。日経商品先物指数、東穀農産物指数、日経・東工取商品指数、金（標準）のデータを用いてボラティリティの長期記憶性に焦点を当て実証的な検証を行なった。本論文で得られた主な結果を纏めると次のようになる。

1. FIGARCH (1, d, 0) モデルについては、東穀農産物指数と金（標準）のボラティリティは定常長期記憶過程に従っており、日経商品先物指数と日経・東工取商品指数のボラティリティは非定常長期記憶過程に従っていることが明らかとなった。
2. FIEGARCH (1, d, 0) モデルについては、金（標準）のボラティリティは定常長期記憶過程に従っており、日経商品先物指数、東穀農産物指数、日経・東工取商品指数のボラティリティは非定常長期記憶過程に従っていることが明らかとなった。
3. 日経商品先物指数、東穀農産物指数、日経・東工取商品指数、金（標準）のすべてにおいて、各々の収益率のリスク・プレミアム、³³⁾ また、各々の収益率とボラティリティと

ここで、

$$r_i = \frac{T}{T-i} \frac{\sum_{t=i+1}^T (\hat{\epsilon}_t^2 - \bar{\epsilon})(\hat{\epsilon}_{t-i}^2 - \bar{\epsilon})}{\sum_{t=1}^T (\hat{\epsilon}_t^2 - \bar{\epsilon})^2}, \text{ for } \bar{\epsilon} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \epsilon_t^2$$

である。詳しくは、

³³⁾本論文では、以下のような収益率 R_t の過程を仮定して同様の実証研究を行なった。

$$R_t = \mu + \lambda \sigma^2 + \epsilon_t.$$

の間の非対称性を観測することはできなかった。

4. 日経商品先物指数, 東穀農産物指数, 日経・東工取商品指数, 金 (標準) のボラティリティには自己相関が存在すると考えられる。
5. 商品先物市場における時系列分析に関して, 株式市場や外国為替市場における分析と同様に日次収益率の分布に対して Student- t 分布, GED 分布, skewed-Student t 分布などの正規分布よりも裾の厚い分布を用いることは有効である。

今後の課題としては, 以下のことが考えられる。

1. 商品先物指数や金 (標準) だけでなく, 東京穀物商品取引所や東京工業品取引所に上場されているすべての個々の商品先物について同様の分析を行なうこと。特に, 長期の限月の商品先物については非常に有効であると考えられる。
2. どうもろこし, 一般大豆, 粗糖, 金についてはオプション取引も行なわれているので, これらの商品に対して FIGARCH モデル, FIGARCH モデルによるオプション価格付けへの応用を行なうこと。
3. その他の Fractionally Integrated ARCH 型モデルとして, Tse (1998) の FIAPARCH (Fractionally Integrated Asymmetric Power GARCH), Hwang (2001) の ASYMM-FIGARCH (Asymmetric FIGARCH), Davidson (2004) の HYGARCH (Hyperbolic GARCH) がある。これらのモデルも用いて, ボラティリティの長期記憶性の分析を行ない比較を行なうこと。また, 商品先物特有の需給要因の変化, ジャンプ過程, 曜日効果³⁴⁾などをモデルに組み込んで分析を行なうこと。

しかしながら, すべての収益率に関して λ の推定値に対して統計的に有意な結果は得られなかった。

³⁴⁾辰巳 (2007) は, London Metal Exchange で取引されているアルミと銅の現物価格と先物価格について曜日効果が存在するかどうかを非線形時系列解析法とサロゲート法により検証を行なっている。

参考文献

- [1] 飯原慶雄・加藤英明・徳永俊史 (2000), 「金先物価格の時系列分析：日米比較」, 『先物取引研究』, 第4巻, 第2号, No.8, pp.179-192.
- [2] 市川博也 (2007), 『応用経済学のための時系列分析』, 朝倉書店.
- [3] 伊藤隆康 (2006), 「日本の先物市場における上場商品の価格連動性 東京工業品取引所と東京穀物商品取引所を分析して」, 『先物取引研究』, 第10巻, 第1号, No.14, pp.1-14.
- [4] 小山良 (2004), 『先物価格分析入門 - 商品先物を中心に -』, 近代文芸社.
- [5] 芹田敏夫・濱田隆道・荒木浩介・坂本智幸 (2005) 「金先物市場の日中の価格形成と流動性：取引データに基づく実証研究」市場構造研究所ワーキングペーパー, No.05-1.
- [6] 芹田敏夫・坂本智幸・山岡博士 (2008), 「ガソリン先物市場の日中の価格形成と流動性：取引データに基づく実証研究」, 『先物取引研究』, 第11巻, 第1号, No.15, pp.33-59.
- [7] 竹内 (野木森) 明香 (2009), 「個別株式ボラティリティの長期記憶性と非対称性」, 早稲田大学産業経営研究所ワーキング・ペーパー, 第1号.
- [8] 竹内 (野木森) 明香・渡部敏明 (2008), 「日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性とオプション価格」, MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』, No.24, pp.45-74.
- [9] 辰巳憲一 (2007), 「金属の現物・先物価格曜日効果に関する非線形時系列解析」, 『先物取引研究』, 第10巻, 第1号, No.14, pp.63-78.
- [10] 仁科一彦・竹内哲治 (1998), 「わが国商品先物市場の統計的特性 1: リスク・ヘッジ機能の観点から」, 『先物取引研究』, 第3巻, 第2号, No.6, pp.37-72.
- [11] 羽森茂之・羽森直子 (2000), 「商品先物市場における収益率の時系列特性：ボラティリティの日米比較」, 『先物取引研究』, 第4巻, 第2号, No.8, pp.25-42.
- [12] ヘンドリー, D. F.・J. A. ドーニック (市川博也 [訳・解説]) (2006), 『PcGive による時系列分析入門』, 日本評論社.
- [13] 松葉育雄 (2007), 『長期記憶過程の統計 自己相似な時系列の理論と方法』, 共立出版
- [14] 三井秀俊 (2010), 「GARCH による資産価格の時系列分析」, 日本大学経済学部産業経営研究所『産業経営研究』, 第32号, pp.123-136.
- [15] 森保洋 (2008), 「金先物市場のマイクロストラクチャー ティック・データを利用した実証分析」『先物取引研究』, 第11巻, 第1号, No.15, pp.151-168.
- [16] 諸田崇義 (2010), 「コモディティ価格変動の特徴とプライシング・モデルの展開」, 日本銀行金融研究所『金融研究』, 第29巻, 第2号, pp.27-72.
- [17] 矢島美寛 (2003), 「長期記憶をもつ時系列モデル」, 刈屋武昭・田中勝人・矢島美寛・竹内啓 [著], 『経済時系列の統計 その数理的基礎』 (統計科学のフロンティア 8), 岩波書店, pp.103-202.
- [18] 渡部敏明・大鋸崇 (1996), 「日本の商品先物市場における価格のボラティリティと出来高および取引高との関係」, 『先物取引研究』, 第2巻, 第3号, No.4, pp.41-56.
- [19] 渡部敏明・大森裕浩 (2000), 「日本の商品先物市場における価格と出来高の変動：動学的2変量分布混合モデルによる分析」, 『先物取引研究』, 第5巻, 第1号, No.9, pp.111-130.
- [20] 渡部敏明・佐々木浩二 (2005), 「日経 225 先物価格を用いた FIEGARCH モデルの推定」, 大阪証券取引所『先物・オプションレポート』, Vol.17, No.8, pp.1-4.
- [21] 渡部敏明・佐々木浩二 (2006), 「ARCH 型モデルと “Realized Volatility” によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク」, 日本銀行金融研究所『金融研究』, 第25巻, 別冊第2号, pp.39-74.

- [22] Baillie, R. T., T. Bollerslev and H. O. Mikkelsen (1996), “Fractionally Integrated Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 74, pp.3–30.
- [23] Bauwens, L. and S. Laurent (2005), “A New Class of Multivariate Skew Densities, with Application to GARCH Models,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 23, pp.346–354.
- [24] Bollerslev, T. (1986), “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31, pp.307–327.
- [25] Bollerslev, T. and H. O. Mikkelsen (1996), “Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility,” *Journal of Econometrics*, 73, pp.151–184.
- [26] Bollerslev, T., R. F. Engle and D. B. Nelson (1994), “ARCH Models,” in R. F. Engle and D. McFadden (eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol.4, pp.2959–3038, North-Holland.
- [27] Davidson, J. (2004), “Moment and Memory Properties of Linear Conditional Heteroskedasticity Models, and a New Model,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 22, pp.16–29.
- [28] Dickey, D. A. and W. A. Fuller (1981), “Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root,” *Econometrica*, 49, pp.1057–1072.
- [29] Ding, Z., C. W. J. Granger and R. F. Engle (1993), “A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model,” *Journal of Empirical Finance*, 1, pp.83–106.
- [30] Doornik, J. A. (2006), *An Introduction to OxMetrics 4 - A Software System for Data Analysis and Forecasting*, Timberlake Consultants Ltd.
- [31] Doornik, J. A. and D. F. Hendry (2001), *Econometric Modelling Using PcGive 10 Volume III*, Timberlake Consultants Ltd.
- [32] Engle, R. F. (1982), “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation,” *Econometrica*, 50, pp.987–1007.
- [33] Engle, R. F. and T. Bollerslev (1986), “Modeling the Persistence of Conditional Variances,” *Econometric Reviews*, 5, pp.1–50.
- [34] Fama, E. (1965), “The Behavior of Stock Prices,” *Journal of Business*, 38, pp.34–105.
- [35] Fernández, C. and M. F. J. Steel (1998), “On Bayesian modeling of Fat Tails and Skewness,” *Journal of the American Statistical Association*, 93, pp.359–371.
- [36] Giot, P. and S. Laurent (2004), “Modelling Daily Value-at-Risk Using Realized Volatility and ARCH Type Models,” *Journal of Empirical Finance*, 11, pp.379–398.
- [37] Glosten, L. R., R. Jagannathan and D. Runkle (1993), “On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks,” *Journal of Finance*, 48, pp.1779–1801.
- [38] Gorton, G. and K. G. Rouwenhorst (2006), “Facts and Fantasies about Commodity Futures,” *Financial Analysts Journal* 62, pp.47–68; 林康史・望月衛 [訳] (2006), 『商品先物の実話と神話』, 日経 BP 社.
- [39] Hwang, Y. (2001), “Asymmetric Long Memory GARCH in Exchange Return,” *Economics Letters*, 73, pp.1–5.
- [40] Jarque, C. M. and A. K. Bera (1987), “Test for Normality of Observations and Regression Residuals,” *International Statistical Review*, 55, pp.163–172.
- [41] Knight, J. and S. Stachell (eds.) (2001), *Return Distributions in Finance*, Butterworth-Heinemann.
- [42] Laurent, S. and J.-P. Peters (2006), *Estimating and Forecasting ARCH Models Using G@RCH 4.2*, Timberlake Consultants Ltd.

- [43] MacKinnon, J. G. (1991), “Critical Values for Cointegration Tests,” in Engle, R. F. and C. W. J. Granger (eds.), *Long-Run Economic Relationships*, pp.267–276, Oxford University Press.
- [44] Mandelbrot, B. (1963), “The Variation of Certain Speculative Prices,” *Journal of Business*, 36, pp.394–416.
- [45] Michelfelder, R. A. (2005), “Volatility of Stock Returns: Emerging and Mature Markets,” *Managerial Finance*, 31, pp.66–86.
- [46] Nelson, D. B. (1991), “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach,” *Econometrica*, 59, pp.347–370.
- [47] Rachev, S. T. (ed.) (2003), *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Elsevier.
- [48] Russell, J. R. and R. F. Engle (2005), “A Discrete-State Continuous-Time Model of Financial Transactions Prices and Times: The Autoregressive Conditional Multinomial-Autoregressive Conditional Duration Model,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 23, pp.166–180.
- [49] Schwartz, E. S.(1997), “The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging,” *Journal of Finance*, 52, pp.923–973.
- [50] Tsay, R. S. (2010), *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., John Wiley & Sons.
- [51] Tse, Y. K. (1998), “The Conditional Heteroskedasticity of the Yen-Dollar Exchange Rate,” *Journal of Applied Econometrics*, 13, pp.49–55.
- [52] Xekalaki, E. and S. Degiannakis (2010), *ARCH Models for Financial Applications*, Wiley.

Web Site

- [53] 東京工業品取引所 <http://www.tocom.or.jp/jp/index.html>
- [54] 東京穀物商品取引所 <http://www.tocom.or.jp/jp/index.html>

表 1: 収益率 R_t (%) の基本統計量

2003 年 4 月 2 日 - 2010 年 12 月 30 日, 標本数 1899

	平均	標準偏差	歪度	尖度	最大値	最小値	正規性検定
日経商品先物指数	0.061	1.320	3.739	67.98	22.61	-6.769	3077.**
東穀農産物指数	0.008	1.340	-0.363	4.594	5.464	-6.676	118.4**
日経・東工取商品指数	0.049	1.553	-0.398	5.119	7.282	-8.106	179.4**
金 (標準)	0.056	1.322	-1.494	6.476	6.867	-6.867	361.2**

** は有意水準 1 % で有意であることを示す.

表 2: 単位根検定 (ADF 検定)

$$\Delta x_t = \alpha + bx_{t-1} + \sum_{i=1}^5 \gamma_i \Delta x_{t-1} + u_t \quad (\text{トレンド無し}),$$

$$\Delta x_t = \alpha + \mu t + bx_{t-1} + \sum_{i=1}^5 \gamma_i \Delta x_{t-1} + u_t \quad (\text{トレンド有り}).$$

日経商品先物指数

ラグ	トレンド無し				トレンド有り			
	ADF 統計量	b	標準誤差	t 値 (ラグ)	ADF 統計量	b	標準誤差	t 値 (ラグ)
5	-17.81**	0.012	1.321	-0.682	-17.80**	0.011	1.321	-0.683
4	-19.90**	-0.004	1.321	0.968	-19.90**	-0.004	1.321	0.968
3	-21.78**	0.018	1.321	0.676	-21.77**	0.018	1.321	0.676
2	-24.66**	0.033	1.320	0.752	-24.65**	0.033	1.321	0.752
1	-29.21**	0.050	1.320	-2.305	-29.20**	0.050	1.321	-2.305
0	-43.64**	-0.004	1.322		-43.63**	-0.004	1.322	

東穀農産物指数

ラグ	トレンド無し				トレンド有り			
	ADF 統計量	b	標準誤差	t 値 (ラグ)	ADF 統計量	b	標準誤差	t 値 (ラグ)
5	-16.87**	0.126	1.338	-2.649	-16.87**	0.125	1.338	-2.645
4	-19.15**	0.091	1.339	1.233	-19.15**	0.091	1.339	1.236
3	-20.61**	0.116	1.339	-0.777	-20.60**	0.116	1.339	-0.774
2	-23.96**	0.100	1.339	-0.341	-23.96**	0.100	1.339	-0.338
1	-29.05**	0.093	1.338	-0.670	-29.04**	0.093	1.339	-0.667
0	-40.17**	0.079	1.338		-40.16**	0.079	1.339	

日経・東工取商品指数

ラグ	トレンド無し				トレンド有り			
	ADF 統計量	b	標準誤差	t 値 (ラグ)	ADF 統計量	b	標準誤差	t 値 (ラグ)
5	-17.25**	0.071	1.543	-2.335	-17.30**	0.067	1.543	-2.303
4	-20.06**	0.018	1.545	2.215	-20.10**	0.015	1.545	2.248
3	-21.22**	0.066	1.547	-0.1024	-21.25**	0.063	1.546	-0.069
2	-24.39**	0.063	1.546	1.542	-24.42**	0.062	1.546	1.574
1	-28.01**	0.096	1.547	-3.964	-28.04**	0.094	1.547	-3.927
0	-43.26**	0.006	1.553		-43.29**	0.005	1.552	

金

ラグ	トレンド無し				トレンド有り			
	ADF 統計量	b	標準誤差	t 値 (ラグ)	ADF 統計量	b	標準誤差	t 値 (ラグ)
5	-18.75**	-0.068	1.321	0.677	-18.75**	-0.068	1.321	0.678
4	-20.40**	-0.052	1.321	0.578	-20.40**	-0.052	1.321	0.579
3	-22.72**	-0.038	1.320	1.912	-22.72**	-0.038	1.321	1.913
2	-25.12**	0.006	1.321	1.389	-25.11**	0.006	1.322	1.390
1	-29.37**	0.036	1.322	-2.433	-29.36**	0.036	1.322	-2.431
0	-44.40**	-0.020	1.323		-44.39**	-0.020	1.324	

トレンド無しの場合の臨界値は、有意水準 5%で -2.86, 有意水準 1%で -3.44 であり、トレンド有りの場合の臨界値は、有意水準 5%で -3.41, 有意水準 1%で -3.97 である。 ** は有意水準 1% で有意であることを示す。

表 3: モデルの推定結果 - 日経商品先物指数 -

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d., \quad E[z_t] = 0, \quad Var[z_t] = 1.$$

$$FIGARCH(1, d, 0) : \sigma_t^2 = \omega [1 - \beta_1(L)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1 - L)^d \right\} \epsilon_t^2.$$

$$FIEGARCH(1, d, 0) : \ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1 - L)^{-d} g(z_{t-1}),$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|].$$

	FIGARCH(1, d, 0)				FIEGARCH(1, d, 0)			
	<i>n</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>	<i>skt</i>	<i>n</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>	<i>skt</i>
μ	0.088 (1.248)	0.100* (1.977)	0.109* (5.927)	0.103* (2.030)	0.254* (2.828)	-0.010 (-0.121)	0.123 (0.562)	0.125* (1.789)
λ	0.069 (0.732)	-0.010 (-0.206)	-0.007 (-0.213)	-0.041 (-0.762)	-0.103 (-1.274)	0.089 (1.109)	-0.044 (-0.208)	-0.006 (-0.762)
ω	0.121 (1.572)	0.058* (2.245)	0.080* (1.979)	0.058* (2.055)	0.187* (3.114)	0.395* (3.053)	0.415* (2.183)	0.189* (2.059)
d	0.951* (6.589)	0.717* (6.298)	0.740* (5.930)	0.717* (6.203)	0.718* (4.174)	0.875* (3.039)	0.827* (4.779)	0.758* (2.222)
β_1	0.676* (8.612)	0.628* (5.980)	0.614* (4.979)	0.634* (5.917)	0.528* (3.102)	0.499* (2.493)	0.610* (5.586)	0.612* (4.029)
θ	-	-	-	-	-0.905 (-0.825)	-0.080 (-0.299)	-0.187 (-0.840)	-0.006 (-0.135)
γ	-	-	-	-	0.088 (0.743)	-0.036 (-0.728)	0.763 (0.709)	0.025 (0.132)
ν	-	5.330* (6.266)	1.128* (10.14)	5.353* (6.091)	-	4.390* (7.363)	1.149* (9.572)	5.603* (4.838)
$\ln(\xi)$	-	-	-	-0.109* (-3.046)	-	-	-	-0.017* (-2.569)
Log-lik.	-3041.18	-2736.80	-2790.17	-2731.91	-3013.69	-2775.48	-2772.37	-2714.22
$Q(20)$	25.74	25.75	15.06	15.08	21.89	24.59	18.76	20.68
$Q^2(20)$	21.54	21.39	14.77	14.69	21.97	22.86	15.60	18.40

*は有意水準 5%で有意であることを示す. 括弧内の数値は *t* 値を表す.

表 4: モデルの推定結果 - 東穀農産物指数 -

$$R_t = \mu + \lambda\sigma_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d., \quad E[z_t] = 0, \quad Var[z_t] = 1.$$

$$FIGARCH(1, d, 0) : \sigma_t^2 = \omega [1 - \beta_1(L)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1 - L)^d \right\} \epsilon_t^2.$$

$$FIEGARCH(1, d, 0) : \ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1 - L)^{-d} g(z_{t-1}),$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|].$$

	FIGARCH(1, d, 0)				FIEGARCH(1, d, 0)			
	<i>n</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>	<i>skt</i>	<i>n</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>	<i>skt</i>
μ	0.138 (1.190)	0.138 (1.191)	0.138 (1.183)	0.137 (1.168)	0.118 (0.853)	0.194 (1.365)	0.112 (0.825)	0.122 (1.789)
λ	-0.101 (-1.011)	-0.098 (-0.981)	-0.099 (-0.986)	-0.102 (-1.013)	-0.083 (-0.683)	-0.654 (-1.492)	-0.073 (-0.606)	-0.074 (-0.611)
ω	0.117* (2.562)	0.111* (2.498)	0.116* (2.568)	0.114* (2.581)	0.460 (1.678)	0.452 (1.58)	0.463 (1.716)	0.463 (1.782)
d	0.310* (5.425)	0.321* (5.171)	0.311* (5.423)	0.318* (5.180)	0.425* (5.910)	0.398* (4.195)	0.402* (5.961)	0.411* (5.901)
β_1	0.283* (3.687)	0.299* (3.565)	0.285* (3.699)	0.302* (3.710)	0.236* (2.356)	0.681* (2.460)	0.238* (2.372)	0.233* (2.292)
θ	-	-	-	-	0.002 (0.496)	-0.059 (-0.189)	0.002 (0.503)	0.001 (0.480)
γ	-	-	-	-	0.021 (0.729)	0.0002 (0.136)	0.020 (0.730)	0.017 (0.703)
ν	-	42.72* (2.250)	1.955* (19.32)	48.58* (2.418)	-	10.70* (1.998)	1.916* (19.28)	9.995* (2.275)
$\ln(\xi)$	-	-	-	-0.113* (-3.205)	-	-	-	-0.015* (-2.559)
Log-lik.	-3085.55	-3084.71	-3085.44	-2731.91	-3089.19	-3164.89	-3088.76	-3087.41
$Q(20)$	24.33	24.44	24.36	20.80	20.80	25.23	20.86	20.90
$Q^2(20)$	19.12	19.32	19.12	18.43	19.43	24.74	18.28	17.84

*は有意水準 5%で有意であることを示す. 括弧内の数値は *t* 値を表す.

表 5: モデルの推定結果 - 日経・東工取商品指数 -

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d., \quad E[z_t] = 0, \quad Var[z_t] = 1.$$

$$FIGARCH(1, d, 0) : \sigma_t^2 = \omega [1 - \beta_1(L)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1 - L)^d \right\} \epsilon_t^2.$$

$$FIEGARCH(1, d, 0) : \ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1 - L)^{-d} g(z_{t-1}),$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|].$$

	FIGARCH(1, d, 0)				FIEGARCH(1, d, 0)			
	<i>n</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>	<i>skt</i>	<i>n</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>	<i>skt</i>
μ	0.186*	0.185*	0.186*	0.180*	0.242*	0.203*	0.245*	0.148*
	(1.999)	(1.986)	(1.983)	(1.976)	(10.74)	(2.268)	(2.009)	(3.190)
λ	-0.082	-0.081	-0.085	-0.079	-0.134	0.089	-0.136	-0.041
	(-1.096)	(-1.082)	(-1.123)	(-1.038)	(-1.098)	(1.109)	(-1.373)	(-1.621)
ω	0.028	0.027	0.029	0.022	0.446	0.395*	0.445*	0.225*
	(1.365)	(1.401)	(1.334)	(1.119)	(0.143)	(3.053)	(3.386)	(3.154)
d	0.783*	0.796*	0.774*	0.830*	0.821*	0.832*	0.887*	0.879*
	(5.930)	(6.500)	(5.466)	(5.901)	(3.804)	(9.836)	(7.479)	(2.222)
β_1	0.783*	0.802*	0.786*	0.831*	0.551*	0.872*	0.524*	0.915*
	(7.008)	(7.805)	(5.466)	(7.369)	(5.102)	(13.51)	(2.365)	(16.55)
θ	-	-	-	-	-0.028	-0.021	-0.028	-0.069
					(-0.105)	(-1.502)	(-0.840)	(-0.512)
γ	-	-	-	-	0.111	0.118*	0.110	0.229*
					(0.098)	(2.627)	(0.709)	(5.877)
ν	-	6.340*	1.980*	7.353*	-	17.10*	1.923*	5.603*
		(5.267)	(16.48)	(6.091)		(2.647)	(16.87)	(4.838)
$\ln(\xi)$	-	-	-	-0.152*	-	-	-	-0.019
				(-3.774)				(-2.805)
Log-lik.	-3320.89	-3321.04	-3320.62	-3312.49	-3327.31	-3418.22	-3327.28	-3320.74
$Q(20)$	26.79	26.77	26.82	24.71	24.46	25.72	26.65	24.71
$Q^2(20)$	21.65	21.53	21.77	20.69	22.42	22.26	23.39	20.69

*は有意水準 5% で有意であることを示す. 括弧内の数値は *t* 値を表す.

表 6: モデルの推定結果 - 金 -

$$R_t = \mu + \lambda\sigma_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d., \quad E[z_t] = 0, \quad Var[z_t] = 1.$$

$$FIGARCH(1, d, 0) : \sigma_t^2 = \omega [1 - \beta_1(L)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1 - L)^d \right\} \epsilon_t^2.$$

$$FIEGARCH(1, d, 0) : \ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1 - L)^{-d} g(z_{t-1}),$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|].$$

	FIGARCH(1, d, 0)				FIEGARCH(1, d, 0)			
	<i>n</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>	<i>skt</i>	<i>n</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>	<i>skt</i>
μ	0.053 (0.798)	0.025 (0.399)	0.011 (0.168)	0.023 (0.355)	0.042 (0.515)	0.172* (1.971)	0.001 (0.019)	0.101* (2.404)
λ	0.012 (0.180)	0.060 (0.918)	0.075 (1.055)	-0.040 (0.598)	0.033 (0.441)	0.069 (1.009)	0.090 (1.331)	0.052 (0.568)
ω	0.042* (2.641)	0.036* (2.570)	0.038* (2.588)	0.037* (2.601)	0.038* (2.151)	0.065* (2.437)	0.036* (2.160)	0.114* (2.245)
d	0.387* (5.983)	0.413* (6.316)	0.395* (6.349)	0.402* (6.301)	0.288* (4.174)	0.268* (5.419)	0.410* (5.084)	0.271* (2.734)
β_1	0.340* (3.981)	0.381* (4.526)	0.353* (4.352)	0.373* (5.856)	0.84 (12.42)	0.770* (5.324)	0.891* (17.07)	0.779* (4.029)
θ	-	-	-	-	0.0006 (0.265)	0.003 (0.921)	0.0003 (0.204)	0.025 (0.485)
γ	-	-	-	-	0.018 (0.614)	0.004 (0.547)	0.010 (0.534)	0.030 (0.610)
ν	-	7.947* (6.216)	1.446* (21.14)	8.567* (5.856)	-	5.531* (5.899)	1.424* (20.76)	5.499* (4.540)
$\ln(\xi)$	-	-	-	-0.117* (-3.960)	-	-	-	-0.127* (-3.970)
Log-lik.	-2946.06	-2921.64	-2920.58	-2914.67	-2957.92	-3024.92	-2925.38	-2981.12
$Q(20)$	19.14	19.12	20.89	20.45	19.22	15.04	18.83	21.89
$Q^2(20)$	17.29	16.88	17.85	18.69	16.18	12.36	15.36	17.68

*は有意水準 5%で有意であることを示す. 括弧内の数値は *t* 値を表す.

图 1: 終値 (2003/4/1-2010/12/30)

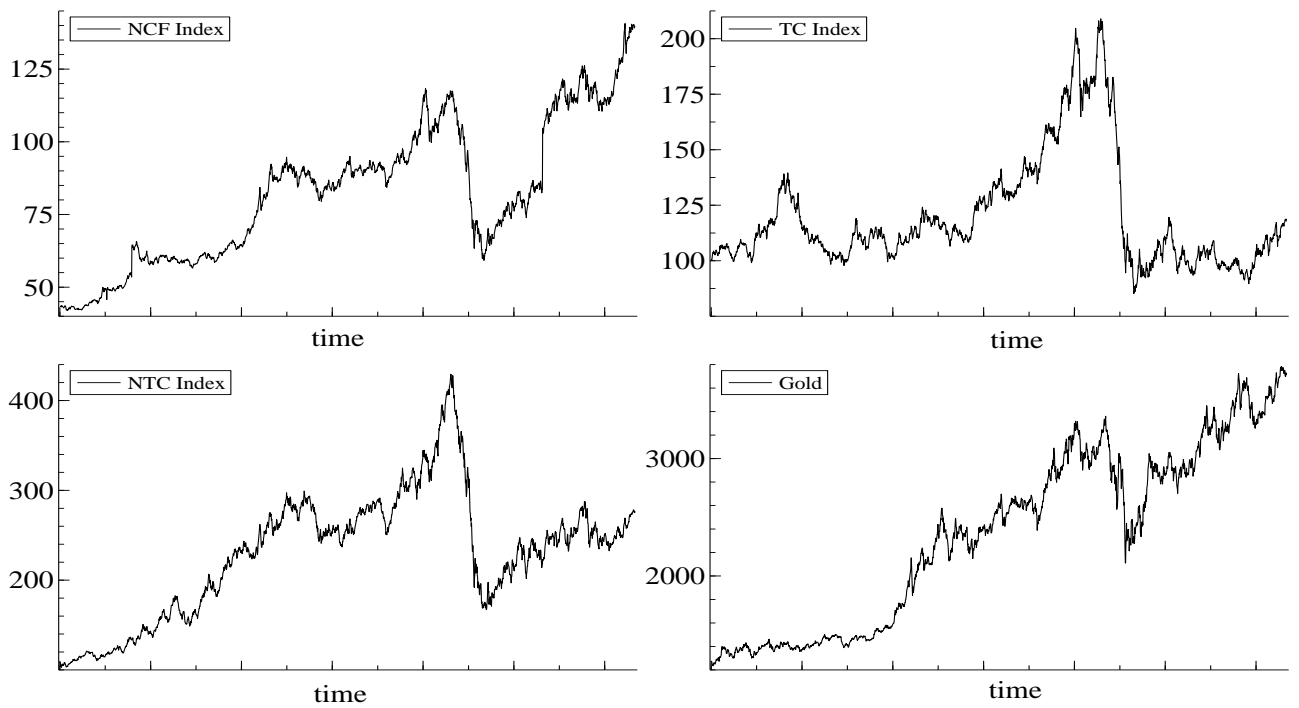


图 2: 收益率 (2003/4/2-2010/12/30)

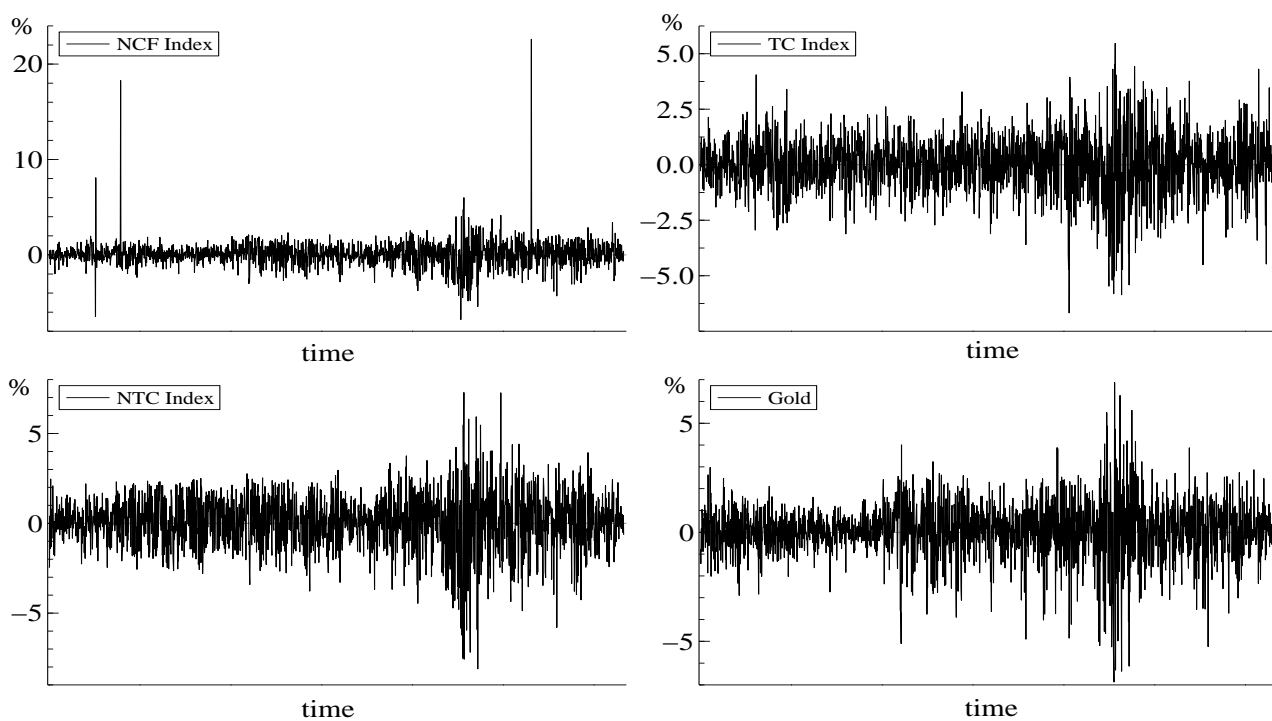


図 3: ヒストグラム・密度関数 (2003/4/2-2010/12/30)

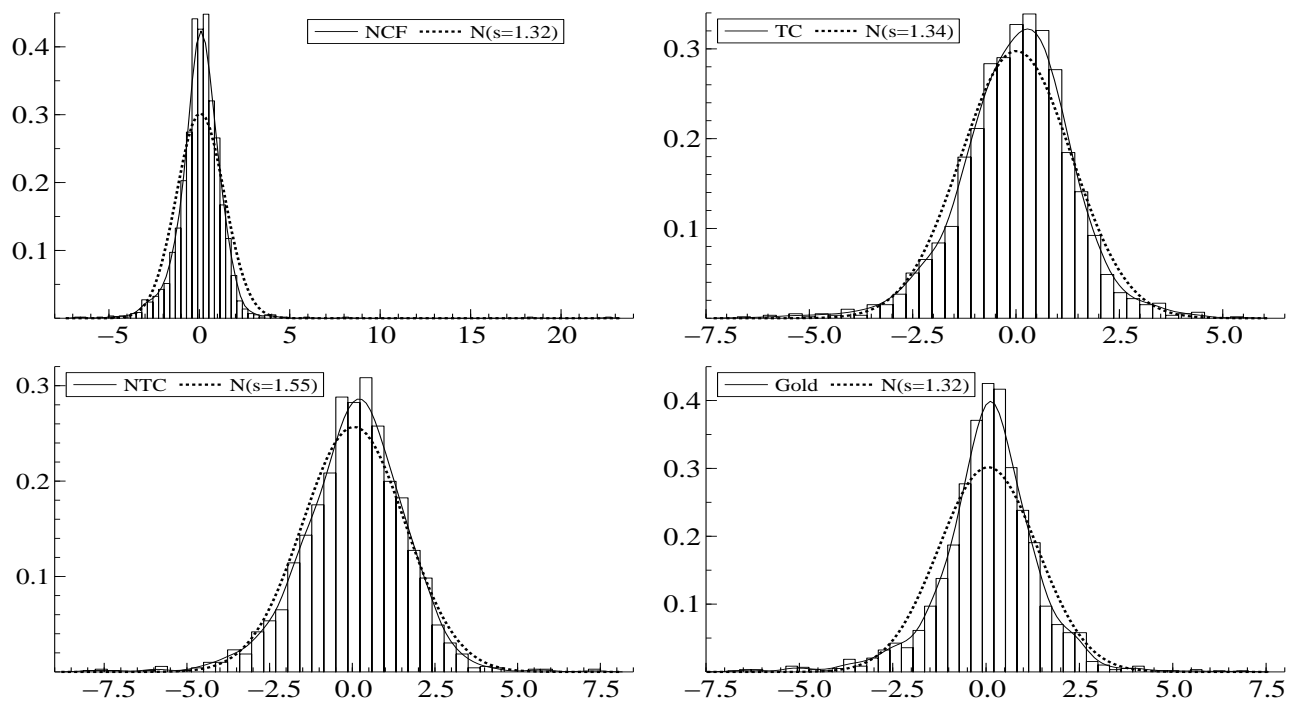


図 4: ボラティリティ (2003/4/2-2010/12/30)

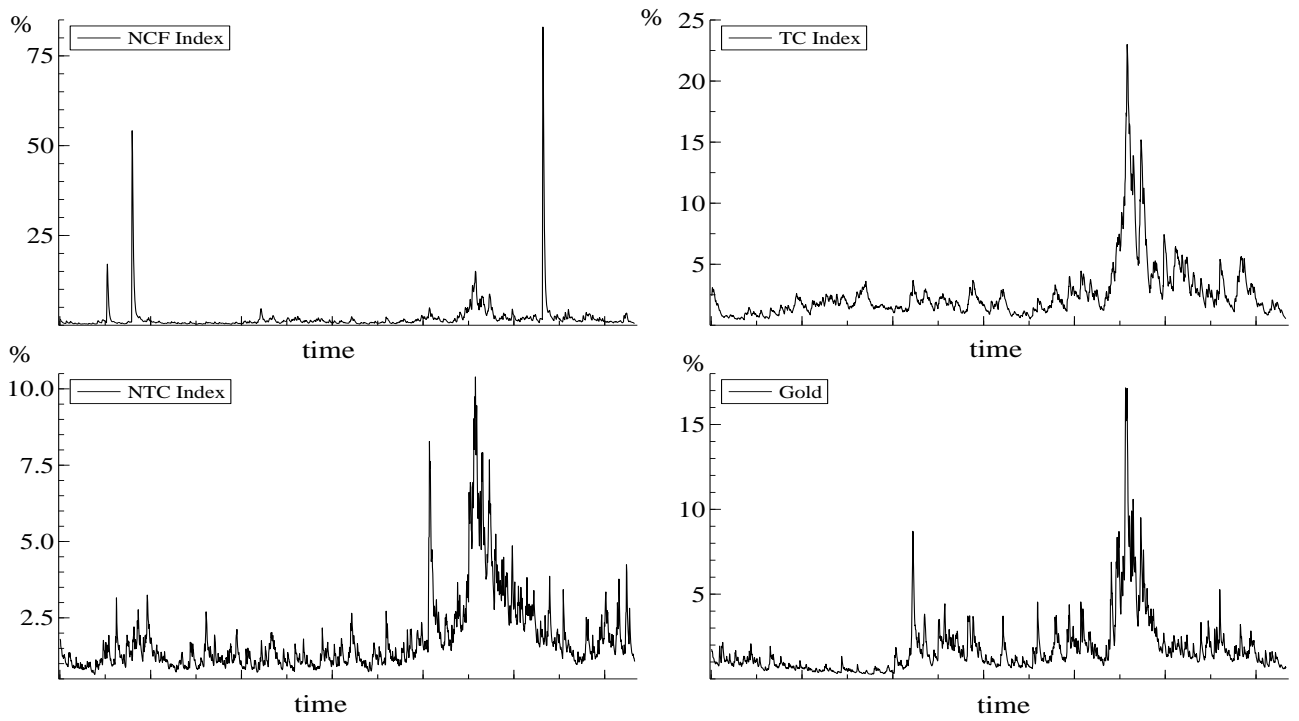
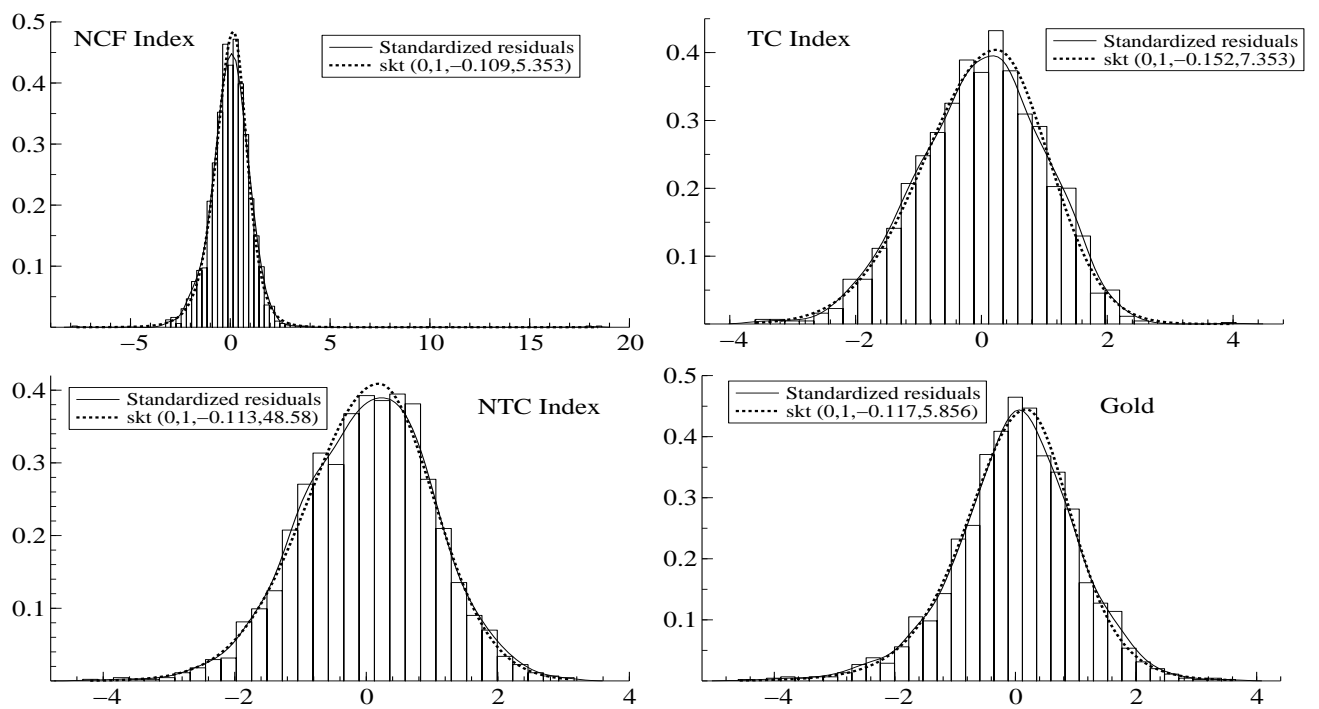


図 5: 残差のヒストグラム・密度関数 (2003/4/2-2010/12/30)



Research Institute of Economic Science
College of Economics, Nihon University

1-3-2 Misaki-cho, Chiyoda-ku, Toyko 101-8360 JAPAN
Phone: 03-3219-3309 Fax: 03-3219-3329
E-mail: keikaken.eco@nihon-u.ac.jp
<http://www.eco.nihon-u.ac.jp/center/economic/>