

September 2020

ハミルトニアン・モンテカルロ法におけるリープフロッグ法
による SV モデルのベイズ推定への影響

戸 塚 英 臣

三 井 秀 俊

Research Institute of Economic Science

College of Economics, Nihon University

ハミルトニアン・モンテカルロ法におけるリープフロッグ法 による SV モデルのベイズ推定への影響

戸塚英臣*・三井秀俊†

2020年9月

要約

本論文は、ハミルトニアン・モンテカルロ法で用いられるリープフロッグ法による SV モデルの推定結果への影響について検証したものである。ハミルトニアン・モンテカルロ法の採択確率は、リープフロッグ法で用いられるステップサイズとステップ数の2つのパラメータに依存すると言われている。そこで、この2つのパラメータの値をいくつか変えて、テストデータ、日経平均株価と東証株価指数の日次収益率を用いて、SV モデルの推定を行なった。その結果、リープフロッグ法の2つのパラメータに SV モデルの推定結果が依存しないことが分かった。さらに、非効率性因子は、ステップサイズに依存しないが、ステップ数は依存することが明らかとなった。同時に、日経平均株価と TOPIX の日次収益率を用いてハミルトニアン・モンテカルロ法による収益率とボラティリティの間の相関を考慮した SV モデルの実証分析を行なった。その結果、ボラティリティに対するショックの持続性を表すパラメータは1に近い値となること、また、収益率とボラティリティの間には負の相関があることが示された。

1 はじめに

近年、ベイズ統計を基にしたマルコフ連鎖モンテカルロ (Markov Chain Monte Carlo; 以下、略して MCMC) 法の一つであるハミルトニアン・モンテカルロ (Hamiltonian Monte Carlo; 以下、略して HMC) 法に注目が集まっている¹⁾。HMC 法は、統計モデルのパラメータの更新に物理学で開発された分子動力学法²⁾を用い、更新されたパラメータの採択・棄却判定にはメトロポリス・ヘイスティングス (Metropolis-Hastings; 以下、略して M-H) 法を用いている。このように HMC 法では、分子動力学法と M-H 法の2つの異なる手法を組み合わせているためハイブリッド・モンテカルロ (Hybrid Monte Carlo) 法とも呼ばれる。HMC 法では、MCMC 法でよく用いられる M-H 法やギブスサンプリング (Gibbs Sampling) 法とは異なり、一度に多くのパラメータをサンプリング

*日本大学経済学部 e-mail: totsuka.hideomi@nihon-u.ac.jp

†日本大学経済学部 e-mail: mitsui.hidetoshi@nihon-u.ac.jp

¹⁾HMC 法は、Duane *et al.* (1987) によって素粒子物理学の格子 QCD (Quantum Chromo Dynamics) 計算においてゲージ配置を効率よく生成する方法として考案された。詳しくは、Neal (2011) を参照。

²⁾分子動力学法とは、相互作用する分子や原子の運動をニュートン力学や解析力学等の古典力学を用いて数値的に解く方法である。詳しくは、Alder and Wainwright (1956) を参照。

しても採択確率が低下しないという特徴がある。HMC 法のパラメータの更新を行う分子動力学法では、ハミルトンの運動方程式が用いられる。ハミルトンの運動方程式は解析的に解けないため、数値積分で近似的に解く必要がある。HMC 法が、MCMC 法の基本条件の一つである詳細釣り合い条件 (detailed balance condition) を満足するためには、この数値積分は時間反転性と体積保存を満足する必要がある。2 つの条件を満足する数値積分法はシンプレクティック数値積分 (symplectic integrator) 法と言われ、HMC 法では、2 次のシンプレクティック数値積分法であるリープフロッグ (leapfrog) 法が用いられる。リープフロッグ法では、一度の更新で進める時間を表すパラメータとしてステップサイズとステップ数の 2 つがある。ステップサイズとステップ数はそれぞれハミルトンの運動方程式の安定性とサンプリングの効率性に影響を与えるパラメータである。本研究では、SV モデルを用いた HMC 法による実証分析を通じてリープフロッグ法の 2 つのパラメータによる推定結果への影響について分析することを目的とする。

株式、株価指数や外国為替相場等のリスク資産価格収益率の時系列データは、ボラティリティと呼ばれる 2 次のモーメントの変動が注目される。このような収益率データの分析では、確率的ボラティリティ変動 (Stochastic Volatility; 以下、略して SV) モデル³⁾ が広く用いられている。また、株式市場には、株価収益率とボラティリティとの間の関係として、ある種の非対称 (asymmetry) な動きがあることが知られている。つまり、株価収益率が下落すると、次期にはボラティリティは上昇し、株価収益率が上昇すると、次期にはボラティリティは下落する傾向があるとしている (leverage effects)。これは、株価収益率とボラティリティの間には負の相関があることを示唆している。レバレッジ効果を考慮したモデルを SV (SV with Leverage; 以下、略して SVL) モデルと呼ぶ。SV モデルや SVL モデルのパラメータは最尤推定することが困難であり、最尤法に代わる推定法が必要になる。この問題に対処するため、多くの先行研究では MCMC 法を用いたベイズ推定を行なっている。SV モデルや SVL モデルでは、モデルを記述するパラメータだけでなく潜在変数 (latent variable) であるボラティリティも同時に事後分布からサンプリングする必要がある。リスク資産価格に関して MCMC を用いた SVL モデルのベイズ推定による実証研究として、Yu (2005), Omori *et al.* (2007), 大森・渡部 (2008), 石原・大森 (2008), Omori and Watanabe (2008), Takahashi *et al.* (2009), Nakajima and Omori (2010), 中島・大森 (2011) などがある。

上記の SVL モデルの先行研究では、MCMC 法として、M-H 法やギブスサンプリング法が利用されている。しかしながら、これらの MCMC 法は、多くの確率変数を一度に推定すると棄却率が小さくなる等の問題点があるため、Takaishi (2008), Takaishi (2009), Takaishi (2013) では、Hybrid Monte Carlo を用いたベイズ推定を提案している。HMC 法による SVL モデルの実証研究は、Nugroho and Morimoto (2015) によって HMC 法を改良した Riemann Manifold Hamiltonian Monte Carlo 法⁴⁾ を用いて行なわれている。また、戸塚・三井 (2020) は、HMC 法を用いて外国為替相場の日次収益率データに対し、SVL モデルを使用してベイズ推定による実証分析を行なっている。しかし、これらの実証分析では、SV モデルの推定結果へのリープフロッグ法の 2 のパラメータの影響については十分な議論は行なわれていない。

³⁾SV モデルとその発展に関して詳しくは、Ghysels *et al.* (1996), Shephard [ed.] (2005), 渡部 (2005) を参照。

⁴⁾詳しくは、Ghirolami and Calderhead (2011) を参照。

本論文では、テストデータ、日経平均株価と東証株価指数 (Tokyo Stock Price Index; 以下、略して TOPIX) の日次収益率を用いてリープフロッグ法のステップサイズとステップ数の値が推定結果に与える影響について検証を行なった。2つのパラメータの値を変えて推定した SV モデルと SVL モデルのパラメータの事後平均と 95 % 信用区間は、2つのパラメータに依存せず、ほぼ同じ値であることが示された。また、SV モデルと SVL モデルのパラメータの採択確率も2つのパラメータに依存せず、SV モデルと SVL モデルのデータの当てはまりに依存する可能性が示唆された。さらに、非効率性因子 (inefficiency factor) はステップサイズには依存しないが、ステップ数が小さいと非効率性因子が大きく、ステップ数が大きくなると非効率性因子が一定値に近づく傾向が明らかとなった。

本論文の以下の構成は次の通りである。第2節では、ハミルトニアン・モンテカルロ法とリープフロッグ法について概観する。第3節では、SV モデルと SVL モデルについて解説する。第4節では、HMC 法におけるリープフロッグ法のパラメータ依存性を検証する方法と用いるデータについて説明する。第5節では、HMC 法を用いた実証分析の結果とリープフロッグ法のパラメータ依存性の分析結果を述べる。第6節では、結論と今後の課題について言及する。

2 HMC 法

2.1 ハミルトン力学

HMC 法では、パラメータの更新に物理学で開発された分子動力学法を用いている。分子動力学法とは、原子や分子の運動をハミルトン力学に基づく運動方程式を数値積分することで再現するシミュレーション方法のことである。ここでは、HMC 法の説明に必要なハミルトン力学について簡単に説明する。ハミルトン力学では、系の状態は一般化された座標と運動量 (q_j, p_j) , $(j = 1, \dots, d)$ が張る位相空間の一点に相当し、系の時間発展は位相空間の軌跡で与えられる。この系の時間発展を表す軌跡の方程式がハミルトンの運動方程式、

$$\frac{dq_j}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad (2.1)$$

$$\frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (2.2)$$

である。ここで τ は時間を表し、また、 H はハミルトニアンと呼ばれ、系のエネルギーを表し、

$$H(q, p) = \sum_{j=1}^d \frac{p_j^2}{2m_j} + U(q) \equiv K(p) + U(q) \quad (2.3)$$

と定義され、 $K(p)$ と $U(q)$ は系の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーをそれぞれ表す。また、 m_j は質点の質量である。

2.2 HMC 法

統計モデルのパラメータを $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_j\}_{j=1}^d$, データを $\mathbf{y} = \{y_j\}_{j=1}^n$ とすると, ベイズ推定法における事後分布 $f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ は,

$$f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \propto f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})f(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.4)$$

と表される. ここで, $f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ は尤度関数, $f(\boldsymbol{\theta})$ はパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の事前分布である. (2.4) 式の後分布とは独立な標準正規分布 $f(\mathbf{p})$ を導入する. $\mathbf{p} = \{p_j\}_{j=1}^d$ は, 未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の共役運動量と呼ばれる. 事後分布と標準正規分布との同時分布 $f(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}|\mathbf{y})$ は,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}|\mathbf{y}) &\propto f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})f(\boldsymbol{\theta})f(\mathbf{p}) \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n p_i^2 + \log f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})\right] f(\boldsymbol{\theta}) \\ &= \exp[-H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})] f(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる. ここで, $H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n p_i^2 - \log f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ をハミルトニアンと定義する. HMC 法では, パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ と共役運動量 \mathbf{p} は (2.1) – (2.2) 式に従うと考える. ただし, ここでの τ は仮想的に導入される時間を表すものとする.

HMC 法による乱数列 $\boldsymbol{\theta}^{(k)} (k = 0, 1, 2, \dots)$ の発生は以下のステップによって実行される. 1 から 6 までの試行をモンテカルロ・ステップと呼ぶことにする.

1. パラメータ $\theta_i^{(k)}$ の共役運動量 $p_i^{(k)}$ を標準正規分布 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(p_i^{(k)})^2}{2}\right]$ に従う乱数として発生させる. なお, 共役運動量 $p_i^{(k)}$ をランダムに発生させることが, マルコフ連鎖であることを示している.
2. 初期時刻 $\tau = 0$ でのハミルトニアン $H_{init} = H(\boldsymbol{\theta}^{(k)}, \mathbf{p}^{(k)})$ を計算する.
3. 後で説明するリープフロッグ法を用いて, (2.1) – (2.2) 式の微分方程式を数值的に解くことにより, 初期状態 $(\theta_i^{(k)}(\tau = 0), p_i^{(k)}(\tau = 0)) = (\theta_i^{(k)}, p_i^{(k)})$ から終状態 $(\theta_i^{(k)}(\tau = \tau_{fin}), p_i^{(k)}(\tau = \tau_{fin}))$ まで時間発展させる.
4. 終状態のハミルトニアン $H_{fin} = H(\boldsymbol{\theta}^{(k)}(\tau = \tau_{fin}), \mathbf{p}^{(k)}(\tau = \tau_{fin}))$ を計算する.
5. 新しい乱数の候補を次の確率で選択する.

$$r = \min[1, \exp(-H_{fin} + H_{init})]. \quad (2.6)$$

6. 上記のステップを繰り返す.

2.3 リーフログ法

(2.1) – (2.2) 式のハミルトンの運動方程式は解析的に解けないため、数値的に解く必要がある。HMC 法が詳細釣り合い条件を満足するためには、(2.1) – (2.2) 式のハミルトンの運動方程式の数値積分法が時間反転性と体積保存を満たす必要がある。それらの条件を満足する数値積分としてリーフログ法が用いられる。リーフログ法で ϵ のステップサイズで (2.1) – (2.2) 式を積分した式は、

$$p_j^{(k)}\left(\tau + \frac{\epsilon}{2}\right) = p_j^{(k)}(\tau) - \left(\frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\partial H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})}{\partial \theta_j} \Bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}(\tau)}, \quad (2.7)$$

$$\theta_j^{(k)}(\tau + \epsilon) = \theta_j^{(k)}(\tau) + \epsilon p_j^{(k)}\left(\tau + \frac{\epsilon}{2}\right), \quad (2.8)$$

$$p_j^{(k)}(\tau + \epsilon) = p_j^{(k)}\left(\tau + \frac{\epsilon}{2}\right) - \left(\frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\partial H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})}{\partial \theta_j} \Bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}(\tau+\epsilon)} \quad (2.9)$$

となる。1回のモンテカルロ・ステップで進む仮想的な時間 τ_{fn} とリーフログ法のステップサイズ ϵ から、リーフログ法を繰り返すステップ数 N は $\tau_{fn} = \epsilon N$ を満足する。

リーフログ法による SV モデルと SVL モデルの推定結果への影響を調べるために、ステップサイズとステップ数を変えて検証を行なう。検証に用いたステップサイズとステップ数の組み合わせは次の通りである。ステップサイズの影響を調べるために、ステップサイズとステップ数を (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000) と変えて推定を行なった。次に、ステップ数の影響を調べるために、ステップサイズを 0.02 に固定し、ステップ数を 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000 と変えて推定を行なった。

3 SV モデルと SVL モデル

ファイナンスの時系列分析で通常利用される SV モデルは、収益率 y_t とボラティリティ $\sigma_t^2 = \exp(h_t/2)$ の過程を $h_t = \ln \sigma_t^2$ として⁵⁾ 以下のように記述される。

$$y_t = \exp(h_t/2)u_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad t = 0, \dots, n-1, \quad (3.2)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}\right). \quad (3.3)$$

ここで、 u_t は平均 0、分散 1、 η_t は平均 0、分散 σ_η^2 の正規分布に従う誤差項である。*i.i.d.* は、過去と独立で同一な分布 (independent and identically distributed) を表す。 h_t はボラティリティの変動を示す潜在変数となる。 μ はボラティリティの平均を表し、 ϕ はボラティリティのショックの持続性を表すパラメータである。定常性の条件より、 $|\phi| < 1$ と仮定する。(3.2) 式は、潜在変数 h_t が 1 次の自己回帰過程に従うことを示している。非対称な動きをモデルに与えるには (3.1) 式と (3.2) 式

⁵⁾ボラティリティ σ_t^2 が負にならないようにするためである。

で u_t と η_t に対して相関関係を考えれば良い。 u_t と η_t とが³, 相関関係 ρ を持つとして SVL モデルを構築すると,

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.\mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right) \quad (3.4)$$

となる。 (3.1)–(3.3) 式からなるモデルは SV モデル, また (3.1), (3.2), (3.4) 式からなるモデルは SVL モデルとなる。 SVL モデル (3.1), (3.2), (3.4) 式の未知パラメータ $(\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu)$ をまとめて θ で表すと, SVL モデルの尤度関数 $f(\mathbf{y}|\theta)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}|\theta) &= \int \cdots \int \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi \exp(h_t)}} \exp \left[-\frac{y_t^2}{2 \exp(h_t)} \right] \\ &\times \prod_{t=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2} \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{\{h_{t+1} - \mu - \phi(h_t - \mu) - \rho\sigma_\eta y_t \exp(-h_t/2)\}^2}{2\sigma_\eta^2(1-\rho^2)} \right] \\ &\times \frac{\sqrt{1-\phi^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}} \exp \left[-\frac{(1-\phi^2)(h_1 - \mu)^2}{2\sigma_\eta^2} \right] dh_1 \cdots dh_n. \end{aligned} \quad (3.5)$$

この積分は解析的に解けないため, SVL モデルのパラメータは最尤推定することが難しい。そこでボラティリティの対数値である h_t を潜在変数として, 他の未知パラメータと同様に HMC 法でサンプリングする。モデルのパラメータと潜在変数を推定するために以下のような HMC 法による MCMC アルゴリズムを以下のステップで行なう。

1. θ, \mathbf{h} の初期値を設定する。
モデルのパラメータと潜在変数の事前分布には無情報事前分布を仮定する。
2. $\mathbf{h}|\theta, \mathbf{y}$ からサンプリングする。
HMC 法を用いて潜在変数 \mathbf{h} をサンプリングする。
3. $\theta|\mathbf{h}, \mathbf{y}$ からサンプリングする。
HMC 法を用いてモデルパラメータ θ をサンプリングする。
4. 2 に戻る。

4 検証方法

本論文では, HMC 法によるベイズ推定を用いて, SV モデルと SVL モデルのパラメータの推定を行う。

4.1 検証用データ

リープフロッグ法による計算結果のパラメータ (ϵ, N) の依存性を検証するために, SVL モデルにより作成したテストデータ, 日経平均株価, TOPIX の3つのデータを用いる。テストデータは, SVL

モデル (3.1), (3.2), (3.4) 式を用いて作成した. テストデータを作成する際に用いたパラメータは, $(\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu) = (0.90, 0.50, -0.60, -0.20)$ であり, 作成したデータ数は日経平均株価と TOPIX の日次収益率の観測個数と同一の 1,221 とした. 日次収益率の算出⁶⁾ には, 日経 NEEDS-FinancialQuest から取得した日経平均株価と TOPIX の終値を用いた. 日経平均株価と TOPIX のデータの期間は 2015 年 1 月 5 日から 2019 年 12 月 30 日までである. 日経平均株価と TOPIX の日次収益率のサンプル期間は 2015 年 1 月 6 日から 2019 年 12 月 30 日までであり, 観測個数は 1,221 である. 表 1 にテストデータ, 日経平均株価, TOPIX の日次収益率の要約統計量を示す.

[表 1]

4.2 計算条件と収束判定

HMC 法によるベイズ推定においては, 稼働検査期間 (burn-in period) として最初の 10,000 個を捨てた後, 100,000 個の確率標本を発生させ, MCMC の標本の独立性を保証するため標本の抽出は 5 つおきに合計 20,000 個の結果を用いた. また, 同時に走らせる MCMC の数 (チェーン数) は 3 とした. なお, 本論文における数値計算は全て C 言語を用いている.

HMC 法の妥当性を調べるために, サンプリングによって得られた値が, ある事後分布に収束しているか判断する必要がある. この収束診断の方法はいくつもあるが, 本論文では発生させた確率標本の時系列プロットの目視による判定と, Gelman-Rubin (以下, 略して G-R) 統計量を併用して判定を行なう. なお, G-R 統計量が 1 に近い場合, 連鎖が定常状態に収束していると判断できる⁷⁾.

5 検証結果

5.1 収束判定

図 1 – 図 12 にテストデータ, 日経平均株価と TOPIX の収益率を用いた SV モデルと SVL モデルの標本経路をそれぞれ示す. 標本経路は, 稼働検査期間を除いて抽出した 20,000 個の 3 つの MCMC の内の 1 つをプロットしたものである. 図 1 – 図 3 と図 7 – 図 9 は, ステップサイズ ϵ を変えた場合の SV モデルと SVL モデルのパラメータ (ϕ, σ_η, μ) の標本経路である. なお, ステップサイズとステップ数は, $(0.02, 100)$, $(0.002, 1,000)$, $(0.0002, 10,000)$ である. これらの図から, ステップサイズを変えても SV モデルと SVL モデルのすべてのパラメータの標本経路は状態空間を万遍なく十分に訪れていることが分かる. 図 4 – 図 6 と図 10 – 図 12 は, ステップ数 N を変えた場合の SV モデルのパラメータ (ϕ, σ_η, μ) の標本経路である. なお, ステップ数は, 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000 であり, すべての計算でステップサイズは 0.02 である. これらの図より, ステップ数を変えても SV モデルと SVL モデルのすべてのパラメータの標本経路は状態空間を万遍なく十分に訪れていることは明らかである.

⁶⁾ S_t を t 時点の日経平均株価とすると, t 時点の日経平均株価の日次収益率 y_t は, $y_t = (\ln S_t - \ln S_{t-1}) \times 100$ であり, また, I_t を t 時点の TOPIX の水準とすると, t 時点の TOPIX の日次収益率 y_t は, $y_t = (\ln I_t - \ln I_{t-1}) \times 100$ となる.

⁷⁾ 詳しくは, Gelman and Rubin (1992), Gelman (1996) を参照.

[図 1 – 図 12]

次に、表 2 – 5 にテストデータ、日経平均株価と TOPIX の日次収益率を用いた SV モデルと SVL モデルの G-R 統計量を示す。G-R 統計量が 1.05 未満となっているときに、各パラメータが安定状態に収束していると判断することにする。表 2 と表 3 は、ステップサイズ ϵ と ステップ数 N を変えた場合の SV モデルのパラメータ (ϕ, σ_η, μ) それぞれの G-R 統計量である。これらの表から、ステップサイズとステップ数を変えても SV モデルのパラメータの G-R 統計量は 1.05 未満である。表 4 と表 5 は、ステップサイズ ϵ とステップ数 N を変えた場合の SVL モデルのパラメータ $(\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu)$ それぞれの G-R 統計量である。SV モデルと同様に、ステップサイズとステップ数を変えても SVL モデルのパラメータの G-R 統計量は 1.05 未満である。したがって、図 1 – 図 12 の標本経路は適切に安定しており、さらに、表 2 – 表 5 に示した G-R 統計量はいずれも 1.05 未満であることから、HMC 法による計算結果はすべて収束していると考えられる。

[表 2 – 表 5]

5.2 SV モデルと SVL モデルの実証結果

ここでは、テストデータ、日経平均株価、TOPIX の日次収益率を用いた SV モデルと SVL モデルの HMC 法によるパラメータ推定の結果について述べる。

5.2.1 テストデータを用いた HMC 法による SV モデルと SVL モデルの推定結果の精度

テストデータを用いた HMC 法による SV モデルと SVL モデルの推定結果の精度について検証を行なう。最初に SV モデルについて検証を行なう。表 6 と表 7 は、ステップサイズとステップ数を変えた場合の SV モデルのパラメータの推定結果である。 ϕ の事後平均は 0.8748 から 0.8790, σ_η の事後平均は 0.5948 から 0.6086, μ の事後平均は -0.4860 から -0.4784 の値をそれぞれ取る。ステップサイズとステップ数を変えても、SV モデルのパラメータは事後平均から大きく外れる値がないことが分かる。したがって、SV モデルのパラメータの推定結果はステップサイズとステップ数に大きく依存しないと言える。テストデータを生成する際に用いた値と比べると、 ϕ と μ は小さく、 σ_η が大きい結果となっている。ただし、それぞれのパラメータの 95% 信用区間は、テストデータを生成する際に用いたパラメータ値を含んでいる。

次に SVL モデルについて検証を行なう。表 8 と表 9 は、ステップサイズとステップ数を変えた場合の SVL モデルのパラメータの推定結果である。

[表 6 – 表 9]

ϕ の事後平均は 0.8933 から 0.8971, σ_η の事後平均は 0.5408 から 0.5537, ρ の事後平均は -0.6422 から -0.6107, μ の事後平均は -0.3091 から -0.2976 の値をそれぞれ取る。SV モデルの場合と同様に、ステップサイズとステップ数を変えても、SVL モデルのパラメータは事後平均から大きく外れる値がないことが分かる。したがって、SVL モデルのパラメータの推定結果もステップサイズとス

ステップ数には大きく依存しないと言える。テストデータを生成する際に用いた値と比べると、 ϕ , μ , ρ は小さく、 σ_η が大きい結果となっている。ただし、それぞれのパラメータの 95 % 信用区間は、テストデータを生成する際に用いたパラメータ値を含んでいる。

ステップサイズとステップ数を変えた場合の事後平均と 95% 信用区間の変化を視覚的に理解するために、図 13 と図 14 にテストデータを用いた SV モデルと SVL モデルのそれぞれの推定結果を示す。グラフは、上段がステップサイズ依存性、下段がステップ数依存性であり、グラフ中の黒丸は事後平均を、エラーバーは 95 % 信用区間を示している。

[図 13 ・ 図 14]

図 13 より、SV モデルのパラメータ $\theta = (\sigma_\eta, \phi, \mu)$ はステップサイズとステップ数にほとんど依存していないことを確認できる。さらに、図 14 より、SVL モデルのパラメータ $\theta = (\sigma_\eta, \phi, \rho, \mu)$ もステップサイズとステップ数にほとんど依存していないことが分かる。

5.2.2 日経平均株価を用いた SV モデルと SVL モデルの実証結果

日経平均株価の日次収益率を用いた HMC 法による SV モデルと SVL モデルの推定結果について検証する。表 10・表 11 と表 12・表 13 は、SV モデルと SVL モデルのそれぞれの推定結果を示している。最初に、SV モデルのパラメータの推定結果のステップサイズとステップ数の依存性について検証する。表 10 と表 11 より、 ϕ の事後平均は 0.8776 から 0.8846、 σ_η の事後平均は 0.4744 から 0.4850、 μ の事後平均は -0.1513 から -0.1440 の値をそれぞれ取る。ステップサイズとステップ数を変えても、これらの事後平均から大きく外れる値がないことが分かる。このことから、SV モデルのパラメータの推定結果ステップサイズとステップ数には大きく依存しないと言える。

次に、SVL モデルのパラメータの推定結果のステップサイズとステップ数の依存性について検証する。表 12 と表 13 より、 ϕ の事後平均は 0.8792 から 0.8839、 σ_η の事後平均は 0.4602 から 0.4742、 ρ の事後平均は -0.6291 から -0.6191、 μ の事後平均は -0.0432 から -0.0374 の値をそれぞれ取る。ステップサイズとステップ数を変えても、これらの事後平均から大きく外れる値がないことが分かる。このことから、SVL モデルのパラメータの推定結果はステップサイズとステップ数に大きく依存しないと言える。

[表 10 - 表 13]

ボラティリティに対するショックの持続性を表すパラメータ ϕ について検証する。表 10 - 13 から SV モデルと SVL モデルの ϕ の事後平均の値はそれぞれ 0.8776 から 0.8846、0.8792 から 0.8839 であり、これらが 1 に近いことからボラティリティに対するショックが高い持続性を持つことが分かる。この結果は過去の研究と整合的な結果となっている。

日経平均株価の収益率とボラティリティとの間の関係を表すパラメータである ρ について検証する。表 12 と 13 から SVL モデルの ρ の事後平均の値はそれぞれ -0.6289 から -0.6191 と負の値であり、さらに、どのステップサイズとステップ数でも 95 %信用区間はおおむね $[-0.73, -0.48]$ 程

度であることから、 ρ が負である事後確率は 95 % より大きいと言える。 ρ の事後平均が負の値であることは、日経平均株価の日次収益率とボラティリティの対数値 h との間には、非対称性・レバレッジ効果の存在があることを示唆している。

ステップサイズとステップ数を変えた場合の事後平均と 95% 信用区間の変化を視覚的に理解するために、図 15 と図 16 にテストデータを用いた SV モデルと SVL モデルのそれぞれの推定結果を示す。

[図 15・図 16]

図 15 より、SV モデルのパラメータ $\theta = (\sigma_\eta, \phi, \mu)$ はステップサイズとステップ数にほとんど依存していないことを確認できる。さらに、図 16 から、SVL モデルのパラメータ $\theta = (\sigma_\eta, \phi, \rho, \mu)$ もステップサイズとステップ数にほとんど依存していないことが分かる。

5.2.3 TOPIX を用いた SV モデルと SVL モデルの実証結果

TOPIX の日次収益率を用いた HMC 法による SV モデルと SVL モデルの推定結果について検証する。表 14・表 15 と表 16・表 17 は、SV モデルと SVL モデルのそれぞれの推定結果を示している。最初に、SV モデルのパラメータの推定結果のステップサイズとステップ数の依存性について検証する。表 14 と表 15 より、 ϕ の事後平均は 0.9171 から 0.9284、 σ_η の事後平均は 0.3768 から 0.4021、 μ の事後平均は -0.2684 から -0.2630 の値をそれぞれ取る。ステップサイズとステップ数を変えても、これらの事後平均から大きく外れる値がないことが分かる。このことから、SV モデルのパラメータ推定結果はステップサイズとステップ数に大きく依存しないと言える。

次に、SVL モデルのパラメータの推定結果のステップサイズとステップ数の依存性について検証する。表 16 と表 17 より、 ϕ の事後平均は 0.8921 から 0.8991、 σ_η の事後平均は 0.4259 から 0.4457、 ρ の事後平均は -0.6387 から -0.6227、 μ の事後平均は -0.1739 から -0.1654 の値をそれぞれ取る。ステップサイズとステップ数を変えても、これらの事後平均から大きく外れる値がないことが分かる。このことから、SVL モデルのパラメータの推定結果はステップサイズとステップ数に大きく依存しないと言える。

[表 14 – 表 17]

ボラティリティに対するショックの持続性を表すパラメータ ϕ について検証する。表 14 – 17 から SV モデルと SVL モデルの ϕ の事後平均の値はそれぞれ 0.9171 から 0.9284、0.8921 から 0.8991 であり、これらが 1 に近いことからボラティリティに対するショックが高い持続性を持つことが分かる。この結果は過去の研究と統合的な結果となっている。

TOPIX の収益率とボラティリティとの間の関係を表すパラメータである ρ について検証する。表 16 と 17 から SVL モデルの ρ の事後平均の値はそれぞれ -0.6387 から -0.6227 と負の値であり、さらにどのステップサイズとステップ数でも 95 % 信用区間はおおむね [-0.74, -0.48] 程度であることから、 ρ が負である事後確率は 95 % より大きいと言える。 ρ の事後平均が負の値であるこ

とは、日経平均株価と同様に TOPIX の日次収益率とボラティリティの対数値 h との間には、非対称性・レバレッジ効果の存在があることを示唆している。

TOPIX を用いた SV モデルと SVL モデルの推定結果のグラフを図 17 と図 18 に示す。それぞれのグラフは、上段がステップサイズ依存性、下段がステップ数依存性である。グラフ中の黒丸は事後平均、エラーバーは 95 % 信用区間を示している。

[図 17・図 18]

図 17 より、SV モデルのパラメータ $\theta = (\sigma_\eta, \phi, \mu)$ はステップサイズとステップ数にほとんど依存していないことを確認できる。さらに、図 18 より、SVL モデルのパラメータ $\theta = (\sigma_\eta, \phi, \rho, \mu)$ もステップサイズとステップ数にほとんど依存していないことが分かる。

5.3 採択確率の依存性

リープフロッグ法を用いた HMC 法では採択確率は、ステップサイズやステップ数に依存すると考えられている⁸⁾。HMC 法の特徴として、多くのパラメータを同時にサンプリングしても採択確率が低下しない。そこで、本論文では SV モデルと SVL モデルのパラメータ θ と潜在変数 h をそれぞれ同時にサンプリングしている。表 18 – 表 21 にテストデータ、日経平均株価、TOPIX を用いた SV モデルと SVL モデルのパラメータ θ の採択確率を示す。

[表 18 – 表 21]

一般的にリープフロッグ法のパラメータを大きくすると採択率は下がると言われている。しかし、表 18 – 表 21 から、今回用いたリープフロッグ法のパラメータの範囲では、採択確率はリープフロッグ法のパラメータにはほぼ依存していないことが分かる。表 19 と表 21 の採択確率のステップ数依存性を見ると、ステップ数が大きくなると日経平均株価の採択確率が 2 ~ 3% 程度低下しているが、テストデータと TOPIX ではそのような傾向は見られない。

日経平均株価と TOPIX の SV モデルと SVL モデルでの採択確率の違いは特徴的である。SV モデルの場合、日経平均株価と TOPIX の採択確率は 87% 以上 と 69% 以上であるが、SVL モデルの場合、日経平均株価と TOPIX の採択確率は 96% 以上 と 92% 以上である。この結果から、採択確率は、リープフロッグ法のステップサイズとステップ数にはあまり依存せず、モデルに依存することが示唆される。そこで、モデルのデータへのあてはまりを検証するために、周辺尤度 (marginal likelihood) を用いる。周辺尤度を $\hat{ML}(\mathbf{y})$ とすると、

$$\hat{ML}(\mathbf{y}) = \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{f(\mathbf{y}|\theta^j)} \right]^{-1} \quad (5.1)$$

で与えられる⁹⁾。ここで、 $f(\mathbf{y}|\theta)$ は尤度関数、 θ^j ($j = 1, \dots, n$) はサンプリングされた確率標本である。表 22 に SV モデルと SVL モデルの推定された対数周辺尤度の平均値と標準偏差を示す。表 22 よ

⁸⁾詳しくは、Takaishi (2000) を参照。

⁹⁾詳しくは、Newton and Raftery (1994) を参照。

り、日経平均株価と TOPIX の両方で SVL モデルの対数周辺尤度は SV モデルよりも大きく、SVL モデルの方があてはまりが優れているモデルであると考えられる。このことから、採択確率はモデルのあてはまりと関係していると考えられる。

[表 22]

5.4 非効率性因子の依存性

非効率性因子とは無相関の標本から計算する標本平均と同じ分散を得るために何倍のサンプル数が必要であるかを表す効率性の尺度である。図 19 – 図 22 に、テストデータ、日経平均株価、TOPIX を用いた SV モデルと SVL モデルの非効率性因子のステップサイズ依存性とステップ数依存性を示す。グラフ中の黒丸は 3 つのチェーンの平均値であり、エラーバーには標準偏差を用いた。

最初に、ステップサイズ依存性について検証する。図 19 と図 20 から、テストデータ、日経平均株価、TOPIX を用いた SV モデルと SVL モデルの非効率性因子に明確なステップサイズ依存性は見られない。次に、ステップ数依存性について検証する。図 21 から、SV モデルのパラメータ ϕ と σ_η の非効率性因子は、ステップ数が 250 まで大きく、ステップ数が 500 で最も小さくなり、ステップ数がそれ以上大きくなって大きな変化がないことが分かる。また、図 22 から、SVL モデルの場合は、 ϕ と σ_η の非効率性因子は、ステップ数が 4000 で最も小さくなり、それ以上では大きな変化がないことが分かる。このことから、非効率性因子を小さくするためには、ある程度大きなステップ数が必要だといえる。

[図 19 – 図 22]

6 結論と今後の課題

本論文では、テストデータ、日経平均株価と TOPIX の日次収益率を用いて、HMC 法で一般的に用いられる数値積分法であるリープフロッグ法のステップサイズとステップ数の SV モデルと SVL モデルのパラメータの推定結果への影響について詳細に調べた。ステップサイズとステップ数の 2 つのパラメータの値を変えて推定した SV モデルのパラメータの事後平均と 95 % 信用区間は、これら 2 つのパラメータに依存せず、ほぼ同じ値であることが示された。また、SV モデルのパラメータの採択確率もステップサイズとステップ数に依存せず、SV モデルのデータの当てはまりに依存する可能性が示唆された。さらに、MCMC の効率性を表す非効率性因子はステップサイズには依存しないが、ステップ数が小さいと非効率性因子が大きく、ステップ数が大きくなると非効率性因子が一定値に近づく傾向が明らかとなった。日経平均株価と TOPIX の日次収益率を用いた HMC 法による SV モデルと SVL モデルの実証分析から、ボラティリティに対するショックが高い持続性を持つこと、さらに、収益率とボラティリティとの間には負の相関があることが分かった。

今後の課題としては、リープフロッグ法に代わる高次の近似に基づくシンプレクティック数値積分法¹⁰⁾を用いてステップサイズやステップ数の影響について調べる必要がある。株価指数収益率

¹⁰⁾4 次のシンプレクティック数値積分法については、Forest and Ruth (1990) を参照。

の分布は正規分布よりも裾が厚く非対称な分布に従っているため、誤差分布に t 分布¹¹⁾や非対称 t 分布¹²⁾等を用いた SVL モデルへのリープフロッグ法のパラメータの依存性について調べる必要がある。また、リープフロッグ法のステップサイズとステップ数をそれぞれ自動的に調整する Dual Averaging 法¹³⁾ や No-U-Turn アルゴリズム¹⁴⁾ が提唱されている。さらに、これを基に更新回数を学習アルゴリズムにより決定するアルゴリズム¹⁵⁾ も提案されている。SV モデルや SVL モデルにおいてこれらの方法の有効性について検討する必要がある。

¹¹⁾ t 分布以外にも一般化誤差分布 (Generalized Error Distribution; GED) や一般化 t 分布 (Generalized t Distribution) などが考えられる。

¹²⁾ 例えば, Nakajima and Omori (2010), 中島・大森 (2011) では, SVL モデルの誤差項の分布として一般化双曲型非対称 t 分布 (generalized hyperbolic skewed student t distribution) を適用して MCMC により実証分析を行なっている。

¹³⁾ 詳しくは, Nesterov (2009) を参照。

¹⁴⁾ 詳しくは, Hoffman and Gelman (2014) を参照。

¹⁵⁾ 詳しくは, Wu *et al.* (2019) を参照。

参考文献

- [1] 石原庸博・大森裕浩 (2008), 「TOPIX 収益率のマルコフ・スイッチング非対称確率的ボラティリティ変動モデルによる分析」, MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』, No.24, pp. 75–100.
- [2] 大森裕浩・渡部敏明 (2008), 「MCMC 法とその確率的ボラティリティ変動モデルへの応用」, 国友直人・山本拓 [編]『21 世紀の統計科学 I 社会・経済と統計科学』, 東京大学出版会, 第 9 章, pp. 223–266.
- [3] 戸塚英臣・三井秀俊 (2020), 「ハミルトニアン・モンテカルロ法を用いた Stochastic Volatility モデルのベイズ推定による外国為替相場の分析」, 日本証券経済研究所『証券経済研究』, 第 112 号, 掲載予定.
- [4] 中島上智・大森裕浩 (2011), 「一般化双曲線非対称 t 分布を用いた確率的ボラティリティ変動モデルの推定と株価収益率データへの応用」, 日本統計学会『日本統計学会誌』, 第 40 巻, 第 2 号, pp. 61–88.
- [5] 渡部敏明 (2005), 「確率的ボラティリティ変動モデル: 分析法とモデルの発展」, 日本大学経済学部経済科学研究所『紀要』, 第 35 号, pp. 111–133.
- [6] Alder, B. J. and Wainwright, T. E. (1959), “Studies in Molecular Dynamics. I. General Method,” *Journal of Chemical Physics*, 31(2), pp. 459–466.
- [7] Duane, S., Kennedy, A. D., Pendleton, B. J., and Roweth, D. (1997), “Hybrid Monte Carlo,” *Physics Letters*, B195(2), pp. 216–222.
- [8] Forest, E. and Ruth, R. D. (1990), “Fourth-Order Symplectic Integration,” *Physica*, D43(1), pp. 105–117.
- [9] Gelman, A. (1996), “Inference and Monitoring Convergence,” in Gilks, W. R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D. J. eds., *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, pp.131–143, Chapman & Hall.
- [10] Gelman, A. and Rubin, D. B. (1992), “Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences (with discussion),” *Statistical Science*, 7(4), pp. 457–511.
- [11] Ghysels, E., A. C. Harvey and E. Renault (1996), “Stochastic Volatility,” in G. S. Maddala and Rao, C. R. eds., *Handbook of Statistics*, Vol.14: Statistical Methods in Finance, pp.119–191, North-Holland; 小暮厚之・森平爽一郎 [監訳] (2004), 『ファイナンス統計学ハンドブック』, pp. 117–189, 朝倉書店.
- [12] Girolami, M. and Calderhead, B. (2011), “Riemann Manifold Langevin and Hamiltonian Monte Carlo Methods,” *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B 73, pp. 873–889.
- [13] Hoffmani, M. D. and Gelman, A. (2014), “The No-U-Turn Sampler: Adaptively Setting Path Lengths in Hamiltonian Monte Carlo,” *Journal of Machine Learning Research*, 15, pp. 1593–1623.
- [14] Nakajima, J. and Omori, Y. (2012), “Stochastic Volatility Model with Leverage and Asymmetrically Heavy Tailed Error Using GH Skew Student’s t -Distribution,” *Computational Statistics & Data Analysis*, 56(11), pp. 3690–3704.
- [15] Neal, R. M. (2011), “MCMC Using Hamiltonian Dynamics,” in Brooks, S., Gelman, A., Jones, G. L. and Meng, X. - L. eds., *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, pp. 113–162, Chapman & Hall.
- [16] Nesterov, Y. (2009), “Primal-Dual Subgradient Methods for Convex Problems,” *Mathematical Programming*, 120, pp. 221–259.
- [17] Newton, M. A. and Raftery, A. E. (1994), “Approximate Bayesian Inference by the Weighted Likelihood Bootstrap,” *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B 56, pp. 3–26.
- [18] Nugroho, D. B., and Morimoto, T. (2015), “Estimation of Realized Stochastic Volatility Models Using Hamiltonian Monte Carlo-Based Methods,” *Computational Statistics*, 30, pp. 491–516.
- [19] Omori, Y., Chib, S., Shephard, N. and Nakajima, J. (2007), “Stochastic Volatility with Leverage: Fast Likelihood Inference,” *Journal of Econometrics*, 140, pp. 425–449.
- [20] Omori, Y. and Watanabe, T. (2008), “Block Sampler and Posterior Mode Estimation for Asymmetric Stochastic Volatility Models,” *Computational Statistics & Data Analysis*, 52, pp. 2892–2910.
- [21] Shephard, N. [ed.] (2005), *Stochastic Volatility: Selected Readings*, Oxford University Press.

- [22] Takahashi, M., Omori, Y. and Watanabe, T. (2009), “Estimating Stochastic Volatility Models Using Daily Returns and Realized Volatility Simultaneously,” *Computational Statistics & Data Analysis*, 53, pp. 2404–2426.
- [23] Takaishi, T. (2000), “Choice of Integrator in the Hybrid Monte Carlo Algorithm,” *Computer Physics Communications*, 133, pp. 6–17.
- [24] Takaishi, T. (2008), “Financial Time Series Analysis of SV Model by Hybrid Monte Carlo,” *Lecture Notes in Computer Science*, 5226, pp. 929–936.
- [25] Takaishi, T. (2009), “Bayesian Inference of Stochastic Volatility Model by Hybrid Monte Carlo,” *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, 18, pp. 1381–1396.
- [26] Takaishi, T. (2013), “Empirical Analysis of Stochastic Volatility Model by Hybrid Monte Carlo Algorithm,” *Journal of Physics: Conference Series*, 423(1), 012021.
- [27] Yu, J. (2005), “On Leverage in a Stochastic Volatility Model,” *Journal of Econometrics*, 127, pp. 165–178.

表 1: テストデータと株価指数の日次収益率の要約統計量
2015 年 1 月 6 日 – 2019 年 12 月 31 日 観測個数 1,221

	平均	標準偏差	歪度	超過尖度	最大値	最小値
テストデータ	0.0481	1.1637	0.7814	17.1804	12.8962	-7.6985
日経平均株価	0.0251	1.2257	-0.3414	6.1453	7.4262	-8.2529
TOPIX	0.0169	1.1665	-0.3498	6.6610	7.7153	-7.5324

表 2: SV モデルのパラメータの Gelman-Rubin 統計量; ステップサイズ依存性

$$(\epsilon, N) = (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000)$$

ステップサイズ		0.02	0.002	0.0002
テストデータ	ϕ	1.0019	1.0015	1.0007
	σ_η	1.0032	1.0029	1.0016
	μ	1.0000	1.0000	1.0000
日経平均株価	ϕ	1.0077	1.0024	1.0101
	σ_η	1.0110	1.0035	1.0141
	μ	1.0003	1.0002	1.0003
TOPIX	ϕ	1.0006	1.0000	1.0004
	σ_η	1.0015	1.0000	1.0023
	μ	1.0001	1.0000	1.0001

表 3: SV モデルのパラメータの Gelman-Rubin 統計量; ステップ数依存性

$$\epsilon = 0.02 \text{ (固定)}, N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$$

ステップ数		50	250	500	2,000	3,500	5,000
テストデータ	ϕ	1.0019	1.0000	1.0000	1.0000	1.0005	1.0004
	σ_η	1.0032	1.0002	1.0000	1.0002	1.0013	1.0010
	μ	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
日経平均株価	ϕ	1.0000	1.0003	1.0021	1.0019	1.0000	1.0000
	σ_η	1.0000	1.0010	1.0035	1.0026	1.0000	1.0000
	μ	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
TOPIX	ϕ	1.0006	1.0004	1.0008	1.0005	1.0018	1.0011
	σ_η	1.0015	1.0006	1.0007	1.0012	1.0038	1.0016
	μ	1.0001	1.0000	1.0000	1.0001	1.0000	1.0001

表 4: SVL モデルのパラメータの Gelman-Rubin 統計量; ステップサイズ依存性

$(\epsilon, N) = (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000)$

ステップサイズ		0.02	0.002	0.0002
テストデータ	ϕ	1.0006	1.0001	1.0006
	σ_η	1.0017	1.0009	1.0017
	ρ	1.0007	1.0006	1.0011
	μ	1.0000	1.0002	1.0001
日経平均株価	ϕ	1.0003	1.0005	1.0003
	σ_η	1.0005	1.0017	1.0003
	ρ	1.0002	1.0004	1.0007
	μ	1.0000	1.0000	1.0000
TOPIX	ϕ	1.0014	1.0003	1.0002
	σ_η	1.0026	1.0005	1.0003
	ρ	1.0002	1.0006	1.0001
	μ	1.0003	1.0001	1.0000

表 5: SVL モデルのパラメータの Gelman-Rubin 統計量; ステップ数依存性

$\epsilon = 0.02$ (固定), $N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$

ステップ数		50	250	500	2,000	3,500	5,000
テストデータ	ϕ	1.0006	1.0000	1.0003	1.0003	1.0002	1.0000
	σ_η	1.0017	1.0001	1.0010	1.0011	1.0005	1.0003
	ρ	1.0007	1.0018	1.0016	1.0005	1.0003	1.0004
	μ	1.0000	1.0001	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
日経平均株価	ϕ	1.0003	1.0002	1.0010	1.0001	1.0006	1.0014
	σ_η	1.0005	1.0005	1.0023	1.0001	1.0008	1.0028
	ρ	1.0002	1.0005	1.0010	1.0000	1.0005	1.0009
	μ	1.0000	1.0000	1.0002	1.0000	1.0001	1.0001
TOPIX	ϕ	1.0014	1.0004	1.0004	1.0005	1.0005	1.0001
	σ_η	1.0026	1.0003	1.0008	1.0011	1.0007	1.0000
	ρ	1.0002	1.0006	1.0002	1.0001	1.0004	1.0001
	μ	1.0003	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

表 6: テストデータを用いた SV モデルの推定結果; ステップサイズ依存性

$$(\epsilon, N) = (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000)$$

1 行目:事後平均および事後標準偏差, 2 行目:95% 信用区間, 3 行目:非効率因子および標準偏差.

ステップサイズ	ϕ	σ_η	μ
0.02	0.8748 (0.0333)	0.6086 (0.0670)	-0.4830 (0.1513)
	[0.8099, 0.9425]	[0.4819, 0.7391]	[-0.7805, -0.1851]
	38.79 (16.28)	94.06 (39.05)	6.24 (0.28)
0.002	0.8784 (0.0329)	0.5963 (0.0658)	-0.4806 (0.1528)
	[0.8114, 0.9422]	[0.4784, 0.7325]	[-0.7844, -0.1807]
	47.66 (11.38)	112.91 (36.08)	5.18 (0.32)
0.0002	0.8782 (0.0331)	0.5980 (0.0653)	-0.4802 (0.1530)
	[0.8109, 0.9427]	[0.4834, 0.7331]	[-0.7833, -0.1805]
	34.24 (12.24)	74.36 (34.78)	4.80 (0.74)

表 7: テストデータを用いた SV モデルの推定結果; ステップ数依存性

$$\epsilon = 0.02 \text{ (固定)}, N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$$

1 行目:事後平均および事後標準偏差, 2 行目:95% 信用区間, 3 行目:非効率因子および標準偏差.

ステップ数	ϕ	σ_η	μ
50	0.8748 (0.0333)	0.6086 (0.0670)	-0.4830 (0.1513)
	[0.8099, 0.9425]	[0.4819, 0.7391]	[-0.7805, -0.1851]
	38.79 (16.28)	94.06 (39.05)	6.24 (0.28)
250	0.8790 (0.0335)	0.5944 (0.0627)	-0.4784 (0.1574)
	[0.8121, 0.9454]	[0.4748, 0.7184]	[-0.7885, -0.1668]
	14.95 (4.68)	36.45 (9.89)	3.44 (0.47)
500	0.8776 (0.0330)	0.5983 (0.0640)	-0.4860 (0.1511)
	[0.8121, 0.9429]	[0.4774, 0.7264]	[-0.7853, -0.1857]
	9.40 (3.21)	20.30 (10.01)	4.16 (0.56)
2,000	0.8780 (0.0331)	0.5969 (0.0668)	-0.4819 (0.1522)
	[0.8113, 0.9428]	[0.4714, 0.7319]	[-0.7788, -0.1788]
	8.40 (2.26)	18.32 (8.11)	3.51 (0.55)
3,500	0.8787 (0.0329)	0.5948 (0.0673)	-0.4790 (0.1522)
	[0.8123, 0.9433]	[0.4700, 0.7311]	[-0.7777, -0.1775]
	9.06 (1.28)	15.51 (3.36)	3.29 (0.26)
5,000	0.8781 (0.0326)	0.5963 (0.0655)	-0.4791 (0.1525)
	[0.8129, 0.9415]	[0.4735, 0.7271]	[-0.7790, -0.1782]
	7.80 (0.90)	16.18 (1.26)	3.91 (0.46)

表 8: テストデータを用いた SVL モデルの推定結果; ステップサイズ依存性

$$(\epsilon, N) = (0.02, 100), (0.002, 1, 000), (0.0002, 10, 000)$$

1 行目:事後平均および事後標準偏差, 2 行目:95% 信用区間, 3 行目:非効率因子および標準偏差.

ステップサイズ	ϕ	σ_η	ρ	μ
0.02	0.8971 (0.0239)	0.5408 (0.0478)	-0.6422 (0.0570)	-0.2976 (0.1334)
	[0.8504, 0.9433]	[0.4507, 0.6368]	[-0.7225, -0.4988]	[-0.5569, -0.0288]
	11.67 (3.70)	25.35 (9.48)	12.77 (1.71)	3.88 (0.65)
0.002	0.8968 (0.0243)	0.5421 (0.0497)	-0.6205 (0.0582)	-0.2981 (0.1336)
	[0.8494, 0.9441]	[0.4504, 0.6445]	[-0.7246, -0.4967]	[-0.5570, -0.0301]
	7.72 (4.47)	21.00 (4.47)	10.91 (3.47)	4.18 (0.91)
0.0002	0.8970 (0.0238)	0.5411 (0.0476)	-0.6217 (0.0574)	-0.2978 (0.1331)
	[0.8506, 0.9432]	[0.4510, 0.6364]	[-0.7238, -0.4977]	[-0.5566, -0.0301]
	11.67 (7.24)	24.70 (12.58)	16.97 (4.13)	4.49 (0.65)

表 9: テストデータを用いた SVL モデルの推定結果; ステップ数依存性

$$\epsilon = 0.02 \text{ (固定)}, N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$$

1 行目:事後平均および事後標準偏差, 2 行目:95% 信用区間, 3 行目:非効率因子および標準偏差.

ステップ数	ϕ	σ_η	ρ	μ
50	0.8949 (0.0244)	0.5484 (0.0495)	-0.6156 (0.0585)	-0.3016 (0.1340)
	[0.8473, 0.9428]	[0.4561, 0.6489]	[-0.7206, -0.4894]	[-0.5597, -0.0323]
	11.67 (3.70)	25.35 (9.48)	12.77 (1.71)	3.88 (0.65)
250	0.8939 (0.0256)	0.5537 (0.0519)	-0.6119 (0.0569)	-0.3050 (0.1380)
	[0.8426, 0.9431]	[0.4552, 0.6579]	[-0.7167, -0.4946]	[-0.5729, -0.0278]
	9.49 (2.66)	21.59 (2.84)	13.81 (1.02)	3.16 (0.54)
500	0.8935 (0.0248)	0.5535 (0.0527)	-0.6107 (0.0571)	-0.3091 (0.1338)
	[0.8439, 0.9412]	[0.4534, 0.6612]	[-0.7165, -0.4933]	[-0.5678, -0.0412]
	14.27 (4.84)	30.91 (14.32)	12.47 (3.56)	5.46 (2.48)
2,000	0.8942 (0.0244)	0.5511 (0.0540)	-0.6141 (0.0582)	-0.3034 (0.1340)
	[0.8453, 0.9409]	[0.4477, 0.6587]	[-0.7218, -0.4934]	[-0.5624, -0.0338]
	5.97 (3.09)	13.14 (6.71)	9.55 (4.61)	4.56 (0.78)
3,500	0.8936 (0.0243)	0.5527 (0.0532)	-0.6138 (0.0581)	-0.3040 (0.1333)
	[0.8449, 0.9402]	[0.4515, 0.6602]	[-0.7204, -0.4924]	[-0.5617, -0.0379]
	6.79 (0.68)	15.01 (4.09)	10.44 (1.03)	3.32 (0.96)
5,000	0.8933 (0.0243)	0.5533 (0.0539)	-0.6136 (0.0582)	-0.3049 (0.1336)
	[0.8447, 0.9397]	[0.4510, 0.6632]	[-0.7209, -0.4931]	[-0.5616, -0.0373]
	6.59 (2.61)	15.22 (6.66)	8.06 (3.76)	4.38 (0.35)

表 10: 日経平均株価を用いた SV モデルの推定結果; ステップサイズ依存性

$$(\epsilon, N) = (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000)$$

1 行目:事後平均および事後標準偏差, 2 行目:95% 信用区間, 3 行目:非効率因子および標準偏差.

ステップサイズ	ϕ	σ_η	μ
0.02	0.8830 (0.0434)	0.4796 (0.0820)	-0.1484 (0.1348)
	[0.7939, 0.9608]	[0.3407, 0.6467]	[-0.4107, 0.1204]
	74.06 (11.45)	121.23 (19.42)	7.81 (2.39)
0.002	0.8846 (0.0432)	0.4744 (0.0828)	-0.1467 (0.1346)
	[0.7971, 0.9630]	[0.3294, 0.6343]	[-0.4072, -0.1255]
	139.28 (18.76)	200.57 (33.94)	9.83 (1.56)
0.0002	0.8842 (0.0439)	0.4744 (0.0854)	-0.1463 (0.1356)
	[0.7940, 0.9634]	[0.3237, 0.6435]	[-0.4103, -0.1281]
	74.06 (11.45)	121.23 (19.42)	7.81 (2.39)

表 11: 日経平均株価を用いた SV モデルの推定結果; ステップ数依存性

$$\epsilon = 0.02 \text{ (固定)}, N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$$

1 行目:事後平均および事後標準偏差, 2 行目:95% 信用区間, 3 行目:非効率因子および標準偏差.

ステップ数	ϕ	σ_η	μ
50	0.8830 (0.0434)	0.4796 (0.0820)	-0.1484 (0.1348)
	[0.7939, 0.9608]	[0.3407, 0.6467]	[-0.4107, 0.1204]
	74.06 (11.45)	121.23 (19.42)	7.81 (2.39)
250	0.8795 (0.0418)	0.4836 (0.0740)	-0.1489 (0.1369)
	[0.7920, 0.9557]	[0.3489, 0.6375]	[-0.4183, 0.1244]
	25.39 (12.05)	40.21 (22.76)	3.49 (1.17)
500	0.8776 (0.0420)	0.4850 (0.0781)	-0.1513 (0.1312)
	[0.7894, 0.9537]	[0.3446, 0.6457]	[-0.4030, 0.1118]
	23.36 (8.10)	35.56 (12.76)	5.32 (1.97)
2,000	0.8815 (0.0413)	0.4779 (0.0770)	-0.1440 (0.1322)
	[0.7941, 0.9550]	[0.3384, 0.6371]	[-0.4006, 0.1234]
	21.36 (4.63)	35.96 (8.57)	4.85 (1.02)
3,500	0.8814 (0.0416)	0.4783 (0.0780)	-0.1446 (0.1330)
	[0.7917, 0.9546]	[0.3394, 0.6436]	[-0.4026, 0.1225]
	23.45 (7.95)	34.68 (11.56)	5.17 (1.21)
5,000	0.8794 (0.0413)	0.4826 (0.0770)	-0.1480 (0.1314)
	[0.7917, 0.9535]	[0.3424, 0.6417]	[-0.4060, 0.1179]
	21.30 (14.12)	32.81 (21.54)	3.79 (0.42)

表 12: 日経平均株価を用いた SVL モデルの推定結果; ステップサイズ依存性

$$(\epsilon, N) = (0.02, 100), (0.002, 1, 000), (0.0002, 10, 000)$$

1 行目:事後平均および事後標準偏差, 2 行目:95% 信用区間, 3 行目:非効率因子および標準偏差.

ステップサイズ	ϕ	σ_η	ρ	μ
0.02	0.8792 (0.0269)	0.4742 (0.0491)	-0.6191 (0.0648)	-0.0432 (0.1050)
	[0.8255, 0.9330]	[0.3818, 0.5760]	[-0.7320, -0.4773]	[-0.2484, 0.1659]
	22.70 (9.81)	42.03 (19.61)	12.77 (1.61)	4.23 (0.68)
0.002	0.8839 (0.0263)	0.4602 (0.0492)	-0.6289 (0.0637)	-0.0374 (0.1042)
	[0.8311, 0.9354]	[0.3668, 0.5598]	[-0.7395, -0.4887]	[-0.2401, 0.1704]
	31.64 (15.13)	67.46 (32.08)	19.20 (2.62)	5.80 (0.80)
0.0002	0.8832 (0.0265)	0.4623 (0.0498)	-0.6291 (0.0640)	-0.0381 (0.1039)
	[0.8300, 0.9349]	[0.3659, 0.5626]	[-0.7415, -0.4902]	[-0.2403, 0.1686]
	38.59 (12.77)	73.76 (23.31)	35.45 (11.84)	7.36 (1.69)

表 13: 日経平均株価を用いた SVL モデルの推定結果; ステップ数依存性

$$\epsilon = 0.02 \text{ (固定)}, N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$$

1 行目:事後平均および事後標準偏差, 2 行目:95% 信用区間, 3 行目:非効率因子および標準偏差.

ステップ数	ϕ	σ_η	ρ	μ
50	0.8792 (0.0269)	0.4742(0.0491)	-0.6191 (0.0648)	-0.0432(0.1050)
	[0.8255, 0.9330]	[0.3818, 0.5760]	[-0.7320, -0.4773]	[-0.2484, 0.1659]
	22.70 (9.81)	42.03 (19.61)	12.77 (1.61)	4.23 (0.68)
250	0.8813 (0.0290)	0.4694 (0.0543)	-0.6224 (0.0636)	-0.0399 (0.1077)
	[0.8220, 0.9374]	[0.3664, 0.5805]	[-0.7384, -0.4895]	[-0.2522, 0.1736]
	15.01 (5.13)	29.06 (9.15)	17.20 (1.60)	4.52 (1.31)
500	0.8802 (0.0288)	0.4690 (0.0554)	-0.6245 (0.0657)	-0.0391 (0.1048)
	[0.8216, 0.9360]	[0.3622, 0.5794]	[-0.7429, -0.4870]	[-0.2433, 0.1700]
	16.33 (3.02)	24.83 (5.44)	18.42 (9.23)	4.55 (1.26)
2,000	0.8817 (0.0290)	0.4675 (0.0569)	-0.6247 (0.0654)	-0.0385 (0.1052)
	[0.8229, 0.9379]	[0.3587, 0.5815]	[-0.7428, -0.4879]	[-0.2447, 0.1714]
	10.67 (2.46)	18.50 (6.77)	12.31 (5.42)	3.55 (0.21)
3,500	0.8805 (0.0287)	0.4705 (0.0566)	-0.6239 (0.0652)	-0.0420 (0.1051)
	[0.8219, 0.9357]	[0.3624, 0.5844]	[-0.7421, -0.4859]	[-0.2470, 0.1665]
	15.16 (5.24)	24.36 (7.43)	12.24 (4.70)	4.95 (1.63)
5,000	0.8804 (0.0288)	0.4699 (0.0573)	-0.6249 (0.0659)	-0.0399 (0.1043)
	[0.8210, 0.9353]	[0.3622, 0.5858]	[-0.7432, -0.4844]	[-0.2440, 0.1683]
	12.70 (5.73)	21.04 (11.37)	10.74 (3.67)	4.56 (0.19)

表 14: TOPIX を用いた SV モデルの推定結果; ステップサイズ依存性

$$(\epsilon, N) = (0.02, 100), (0.002, 1, 000), (0.0002, 10, 000)$$

1 行目:事後平均および事後標準偏差, 2 行目:95% 信用区間, 3 行目:非効率因子および標準偏差.

ステップサイズ	ϕ	σ_η	μ
0.02	0.9239 (0.0305)	0.3903 (0.0583)	-0.2666 (0.1613)
	[0.8576, 0.9773]	[0.2856, 0.5227]	[-0.5844, 0.0574]
	41.30 (6.39)	88.78 (15.76)	4.17 (1.08)
0.002	0.9284 (0.0291)	0.3768 (0.0570)	-0.2630 (0.1635)
	[0.8658, 0.9791]	[0.2685, 0.5001]	[-0.5918, 0.0637]
	30.53 (7.02)	64.64 (12.85)	4.85 (1.01)
0.0002	0.9280 (0.0291)	0.3781 (0.0564)	-0.2644 (0.1636)
	[0.8665, 0.9791]	[0.2701, 0.4961]	[-0.5888, 0.0599]
	36.23 (14.08)	78.25 (37.87)	3.69 (0.31)

表 15: TOPIX を用いた SV モデルの推定結果; ステップ数依存性

$$\epsilon = 0.02 \text{ (固定)}, N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$$

1 行目:事後平均および事後標準偏差, 2 行目:95% 信用区間, 3 行目:非効率因子および標準偏差.

ステップ数	ϕ	σ_η	μ
50	0.9239 (0.0305)	0.3903 (0.0583)	-0.2666 (0.1613)
	[0.8576, 0.9773]	[0.2856, 0.5227]	[-0.5844, 0.0574]
	41.30 (6.39)	88.78 (15.76)	4.17 (1.08)
250	0.9194 (0.0314)	0.3972 (0.0606)	-0.2659 (0.1589)
	[0.8509, 0.9729]	[0.2848, 0.5250]	[-0.5800, 0.0514]
	17.77 (4.05)	33.70 (10.40)	2.89 (0.24)
500	0.9181 (0.0316)	0.3987 (0.0622)	-0.2684 (0.1521)
	[0.8489, 0.9716]	[0.2855, 0.5275]	[-0.5685, 0.0334]
	17.03 (3.29)	31.10 (5.26)	3.82 (1.19)
2,000	0.9181 (0.0306)	0.4000 (0.0613)	-0.2646 (0.1514)
	[0.8510, 0.9698]	[0.2893, 0.5300]	[-0.5638, 0.0348]
	18.52 (6.09)	33.50 (6.09)	2.88 (0.25)
3,500	0.9183 (0.0306)	0.3990 (0.0613)	-0.2642 (0.1520)
	[0.8511, 0.9698]	[0.2884, 0.5306]	[-0.5654, 0.0380]
	23.30 (1.39)	45.68 (2.22)	3.21 (0.66)
5,000	0.9171 (0.0309)	0.4021 (0.0624)	-0.2672 (0.1522)
	[0.8493, 0.9693]	[0.2893, 0.5340]	[-0.5659, 0.0376]
	25.08 (4.26)	46.27 (2.94)	3.95 (0.10)

表 16: TOPIX を用いた SVL モデルの推定結果; ステップサイズ依存性

$$(\epsilon, N) = (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000)$$

1 行目:事後平均および事後標準偏差, 2 行目:95% 信用区間, 3 行目:非効率因子および標準偏差.

ステップサイズ	ϕ	σ_η	ρ	μ
0.02	0.8921 (0.0260)	0.4457 (0.0494)	-0.6227 (0.0647)	-0.1739 (0.1083)
	[0.8405, 0.9458]	[0.3488, 0.5458]	[-0.7350, -0.4812]	[-0.3825, 0.0431]
	22.70 (9.81)	42.03 (19.61)	12.77 (1.61)	4.23 (0.68)
0.002	0.8971 (0.0254)	0.4318 (0.0503)	-0.6337 (0.0643)	-0.1682 (0.1093)
	[0.8463, 0.9484]	[0.3332, 0.5329]	[-0.7462, -0.4940]	[-0.3808, 0.0499]
	31.07 (5.65)	59.65 (12.23)	14.61 (0.69)	4.18 (0.42)
0.0002	0.8991 (0.0259)	0.4259 (0.0526)	-0.6387 (0.0647)	-0.1654 (0.1094)
	[0.8475, 0.9515]	[0.3237, 0.5286]	[-0.7514, -0.4965]	[-0.3768, 0.0555]
	46.61 (21.32)	83.23 (40.79)	23.64 (13.72)	5.38 (1.68)

表 17: TOPIX を用いた SVL モデルの推定結果; ステップ数依存性

$$\epsilon = 0.02 \text{ (固定)}, N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$$

1 行目:事後平均および事後標準偏差, 2 行目:95% 信用区間, 3 行目:非効率因子および標準偏差.

ステップ数	ϕ	σ_η	ρ	μ
50	0.8921 (0.0260)	0.4457 (0.0494)	-0.6227 (0.1083)	-0.1739 (0.0647)
	[0.8405, 0.9458]	[0.3488, 0.5458]	[-0.7350, -0.4812]	[-0.3825, 0.0431]
	31.07 (5.65)	59.65 (12.23)	14.61 (0.69)	4.18 (0.42)
250	0.8959 (0.0276)	0.4362 (0.0539)	-0.6320 (0.1119)	-0.1681 (0.0637)
	[0.8402, 0.9498]	[0.3336, 0.5420]	[-0.7470, -0.4969]	[-0.3855, 0.0584]
	26.09 (2.88)	49.12 (8.86)	14.37 (2.21)	3.97 (0.56)
500	0.8953 (0.0275)	0.4350 (0.0554)	-0.6323 (0.1090)	-0.1683 (0.0655)
	[0.8394, 0.9486]	[0.3319, 0.5459]	[-0.7501, -0.4930]	[-0.3797, 0.0500]
	16.07 (5.66)	27.06 (12.58)	14.77 (3.43)	4.97 (1.10)
2,000	0.8962 (0.0272)	0.4344 (0.0558)	-0.6338 (0.1088)	-0.1678 (0.0655)
	[0.8402, 0.9487]	[0.3291, 0.5463]	[-0.7510, -0.4952]	[-0.3780, 0.0509]
	14.55 (2.94)	22.28 (4.33)	10.56 (2.44)	3.38 (0.11)
3,500	0.8959 (0.0272)	0.4349 (0.0565)	-0.6332 (0.1088)	-0.1691 (0.0656)
	[0.8387, 0.9473]	[0.3294, 0.5505]	[-0.7505, -0.4944]	[-0.3774, 0.0498]
	14.39 (1.45)	23.39 (4.60)	12.72 (2.15)	4.13 (0.28)
5,000	0.8956 (0.0271)	0.4352 (0.0562)	-0.6343 (0.1079)	-0.1687 (0.0657)
	[0.8398, 0.9473]	[0.3287, 0.5473]	[-0.7527, -0.4956]	[-0.3780, 0.0472]
	12.87 (4.29)	24.02 (8.67)	10.28 (3.19)	3.62 (0.72)

表 18: SV モデルの θ の採択確率; ステップサイズ依存性

$(\epsilon, N) = (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000)$

ステップサイズ	サンプルデータ	日経平均株価	TOPIX
0.02	0.9620 (0.0036)	0.9096 (0.0058)	0.7357 (0.0085)
0.002	0.9594 (0.0025)	0.8976 (0.0059)	0.7101 (0.0044)
0.0002	0.9490 (0.0036)	0.8991 (0.0136)	0.7115 (0.0085)

表 19: SV モデルの θ の採択確率; ステップ数依存性

$\epsilon = 0.02$ (固定), $N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$

ステップ数	サンプルデータ	日経平均株価	TOPIX
50	0.9620 (0.0036)	0.9096 (0.0058)	0.7357 (0.0085)
250	0.9476 (0.0025)	0.9042 (0.0038)	0.7160 (0.0039)
500	0.9480 (0.0005)	0.9086 (0.0064)	0.7050 (0.0059)
2,000	0.9447 (0.0015)	0.8845 (0.0058)	0.6982 (0.0126)
3,500	0.9407 (0.0004)	0.8792 (0.0058)	0.6927 (0.0030)
5,000	0.9442 (0.0015)	0.8754 (0.0121)	0.7036 (0.0119)

表 20: SVL モデルの θ の採択確率; ステップサイズ依存性

$(\epsilon, N) = (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000)$

ステップサイズ	サンプルデータ	日経平均株価	TOPIX
0.02	0.9796 (0.0006)	0.9896 (0.0006)	0.9792 (0.0010)
0.002	0.9802 (0.0008)	0.9899 (0.0007)	0.9774 (0.0003)
0.0002	0.9797 (0.0010)	0.9901 (0.0008)	0.9760 (0.0006)

表 21: SVL モデルの θ の採択確率; ステップ数依存性

$\epsilon = 0.02$ (固定), $N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$

ステップ数	サンプルデータ	日経平均株価	TOPIX
50	0.9796 (0.0006)	0.9895 (0.0006)	0.9792 (0.0010)
250	0.9754 (0.0005)	0.9845 (0.0011)	0.9677 (0.0021)
500	0.9763 (0.0009)	0.9823 (0.0017)	0.9613 (0.0024)
2,000	0.9699 (0.0015)	0.9712 (0.0019)	0.9426 (0.0024)
3,500	0.9696 (0.0012)	0.9666 (0.0027)	0.9370 (0.0013)
5,000	0.9693 (0.0007)	0.9635 (0.0093)	0.9282 (0.0022)

表 22: SV モデルと SVL モデルの周辺尤度

	日経平均株価	TOPIX
SV モデル	-2450.5 (11.7)	-2140.0 (26.1)
SVL モデル	-2126.7 (15.6)	-1943.5 (24.2)

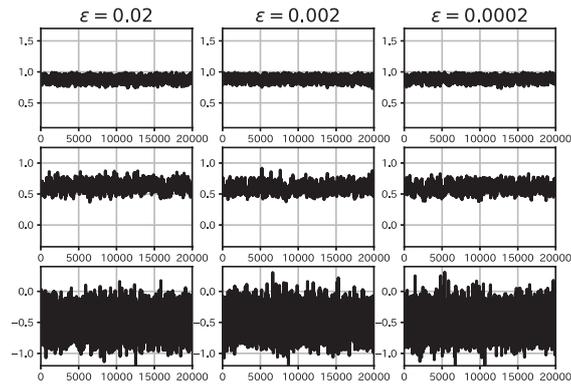


図 1: テストデータを用いた SV モデルの標本経路; ステップサイズ依存性
 パラメータ ϕ (上段), パラメータ σ_η (中段), パラメータ μ (下段).

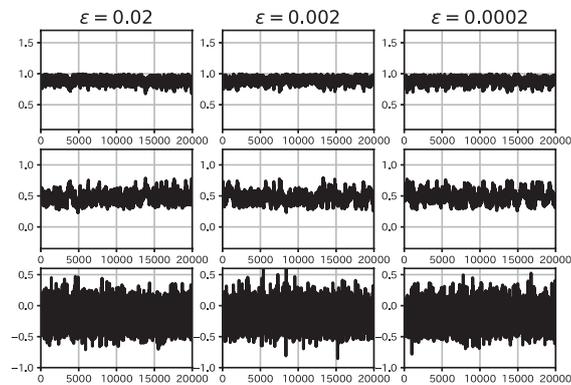


図 2: 日経平均株価を用いた SV モデルの標本経路; ステップサイズ依存性
 パラメータ ϕ (上段), パラメータ σ_η (中段), パラメータ μ (下段).

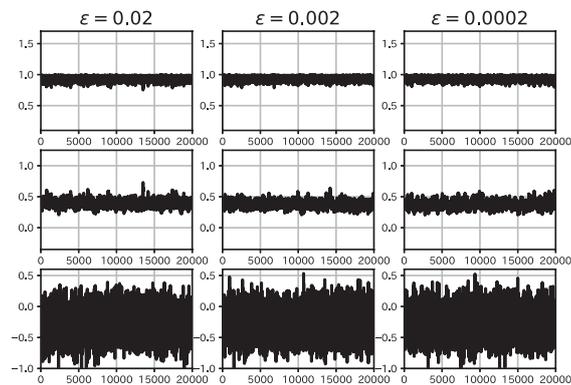


図 3: TOPIX を用いた SV モデルの標本経路; ステップサイズ依存性
 パラメータ ϕ (上段), パラメータ σ_η (中段), パラメータ μ (下段).

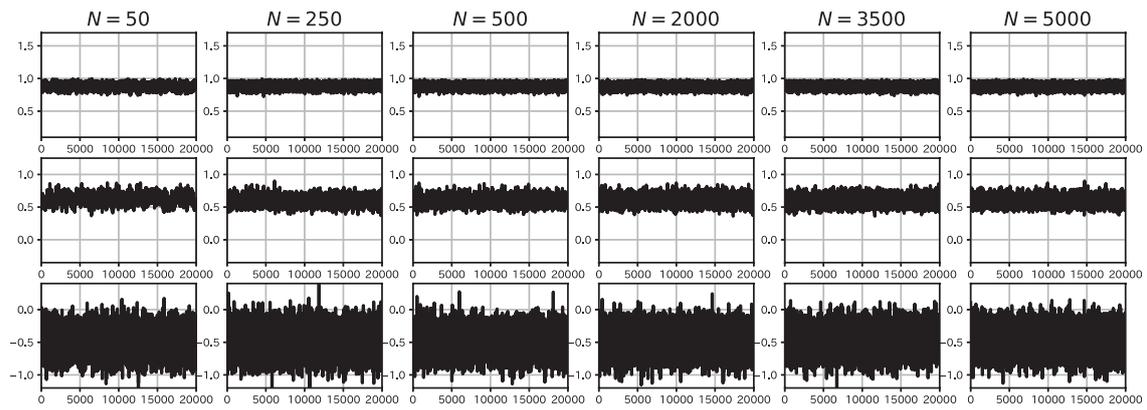


図 4: テストデータを用いた SV モデルの標本経路; ステップ数依存性
 パラメータ ϕ (上段), パラメータ σ_η (中段), パラメータ μ (下段).

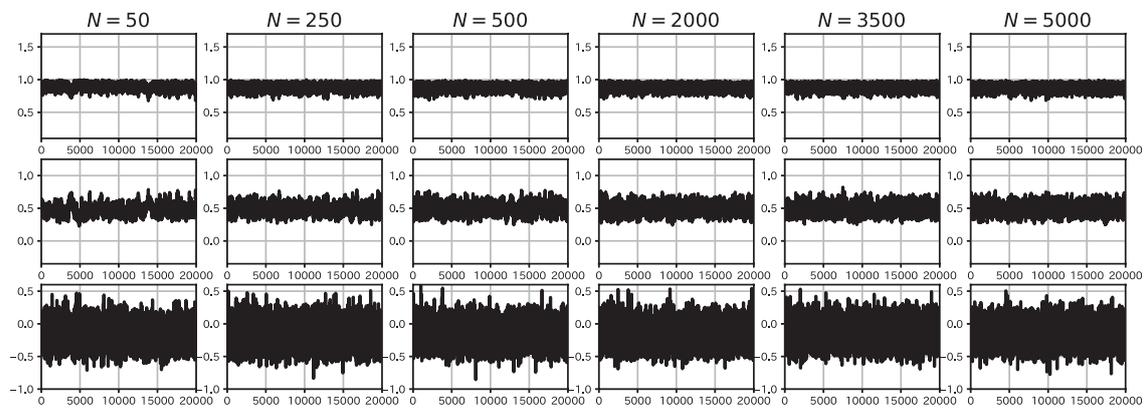


図 5: 日経平均株価を用いた SV モデルの標本経路; ステップ数依存性
 パラメータ ϕ (上段), パラメータ σ_η (中段), パラメータ μ (下段).

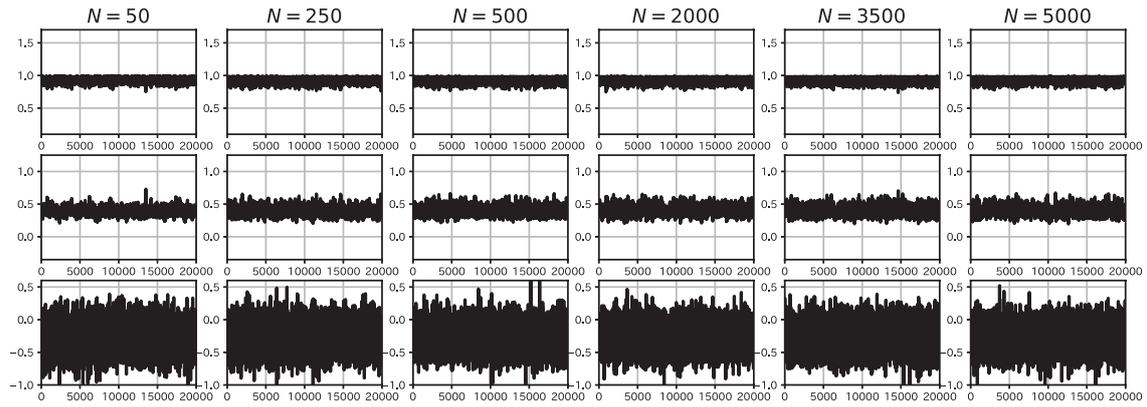


図 6: TOPIX を用いた SV モデルの標本経路; ステップ数依存性
 パラメータ ϕ (上段), パラメータ σ_η (中段), パラメータ μ (下段).

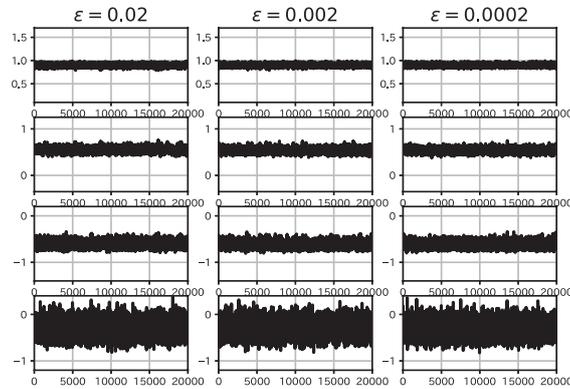


図 7: テストデータを用いた SVL モデルの標本経路; ステップサイズ依存性
 パラメータ ϕ (一段), パラメータ σ_η (二段), パラメータ ρ (三段), パラメータ μ (四段).

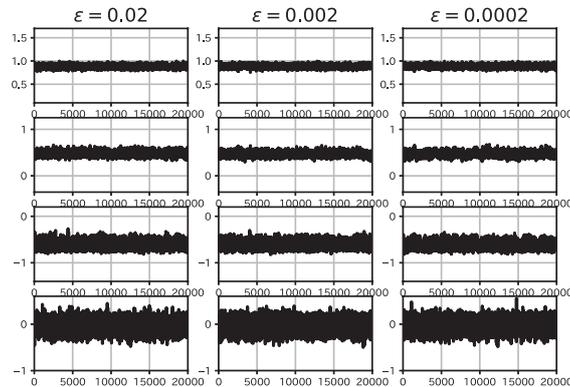


図 8: 日経平均株価を用いた SVL モデルの標本経路; ステップサイズ依存性
 パラメータ ϕ (一段), パラメータ σ_η (二段), パラメータ ρ (三段), パラメータ μ (四段).

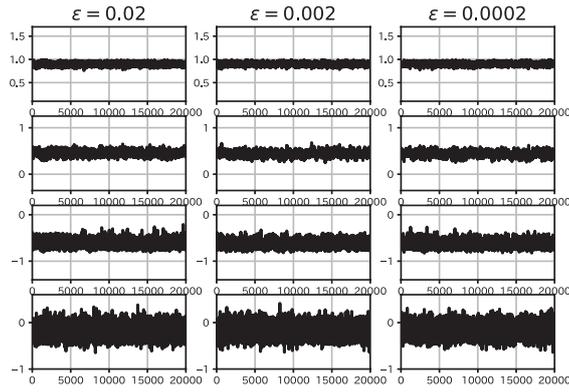


図 9: TOPIX を用いた SVL モデルの標本経路; ステップサイズ依存性
 パラメータ ϕ (一段), パラメータ σ_η (二段), パラメータ ρ (三段), パラメータ μ (四段).

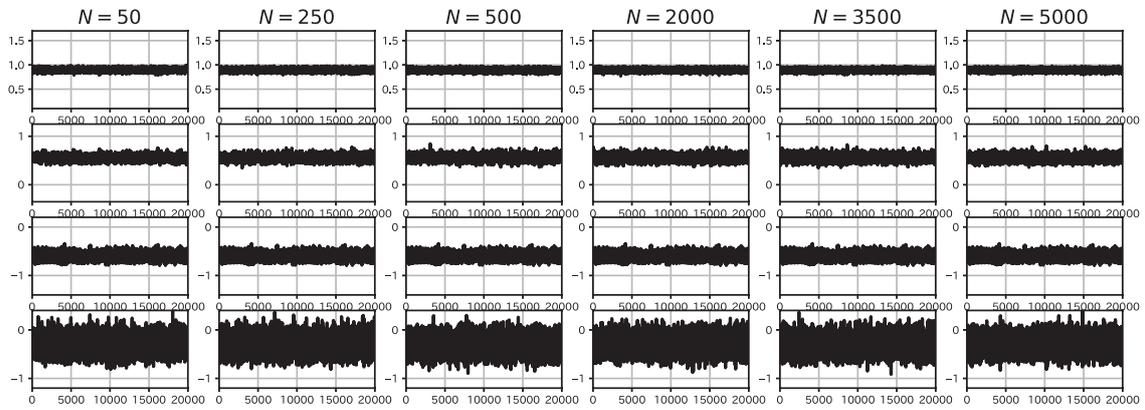


図 10: テストデータを用いた SVL モデルの標本経路; ステップ数依存性
 パラメータ ϕ (一段), パラメータ σ_η (二段), パラメータ ρ (三段), パラメータ μ (四段).

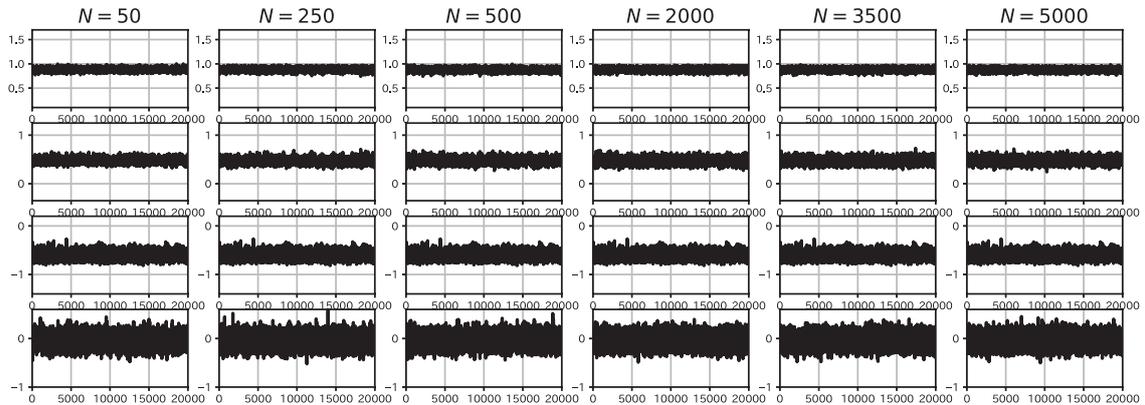


図 11: 日経平均株価を用いた SVL モデルの標本経路; ステップ数依存性
 パラメータ ϕ (一段), パラメータ σ_η (二段), パラメータ ρ (三段), パラメータ μ (四段).

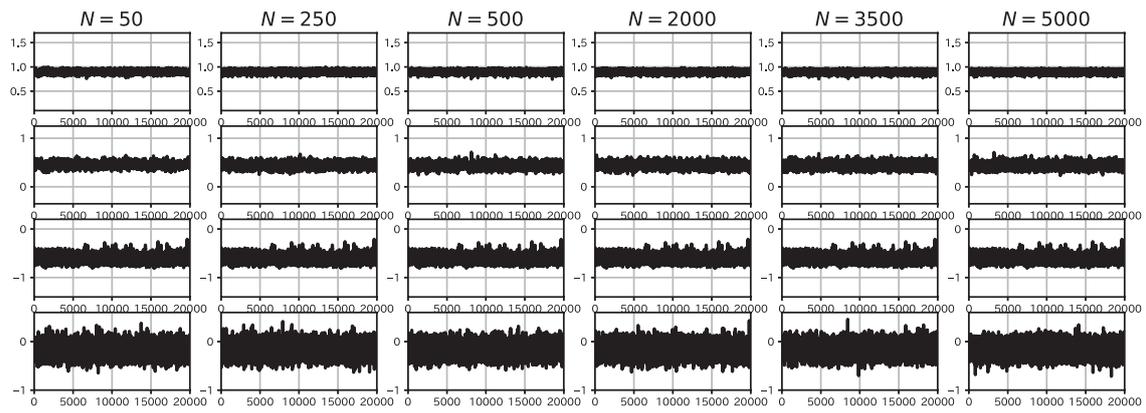


図 12: TOPIX を用いた SVL モデルの標本経路; ステップ数依存性

パラメータ ϕ (一段), パラメータ σ_η (二段), パラメータ ρ (三段), パラメータ μ (四段).

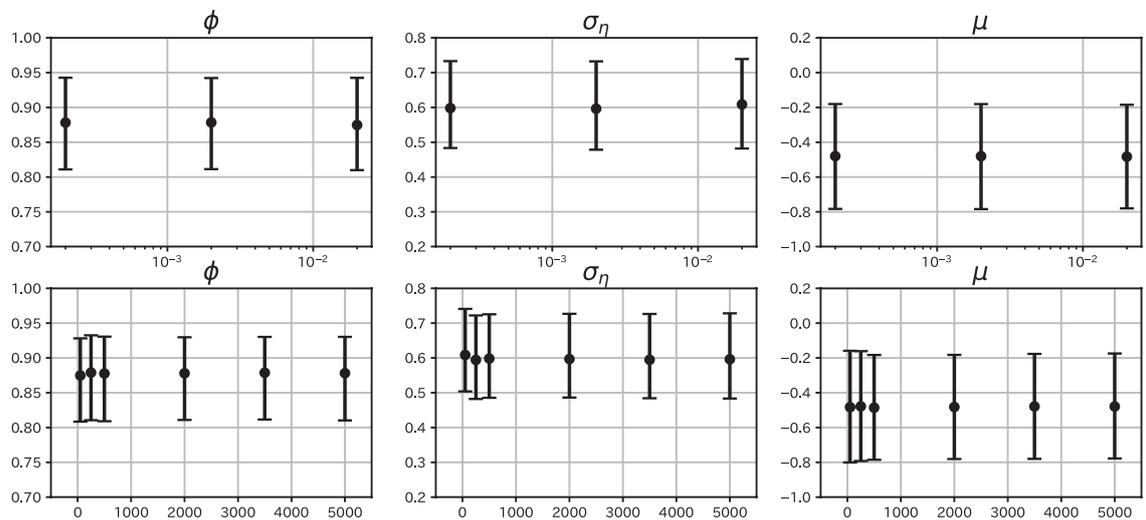


図 13: テストデータを用いた SV モデルの推定結果

ステップサイズ依存性 (上段), ステップ数依存性 (下段).

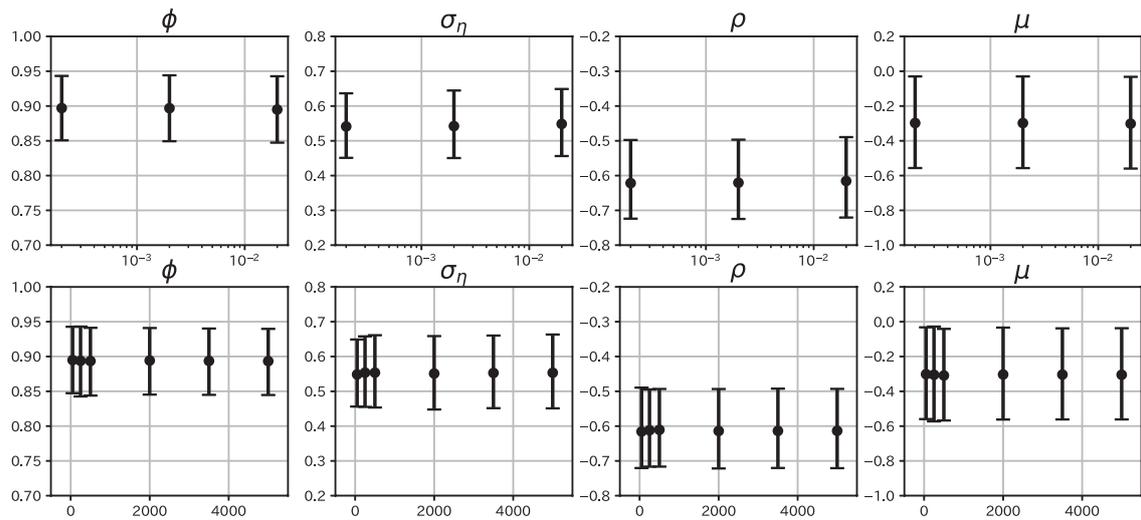


図 14: テストデータを用いた SVL モデルの推定結果
ステップサイズ依存性 (上段), ステップ数依存性 (下段).

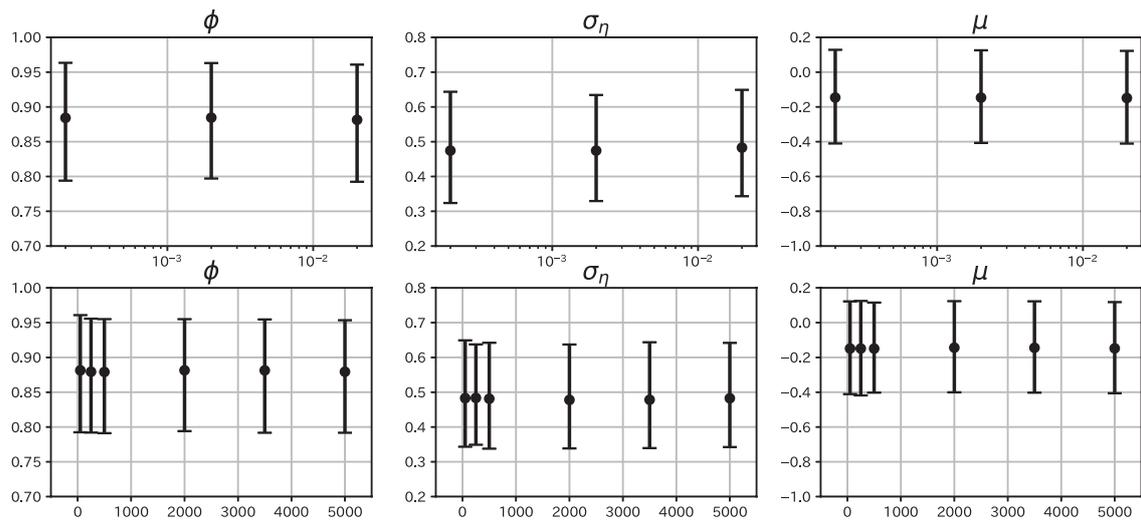


図 15: 日経平均株価を用いた SV モデルの推定結果
ステップサイズ依存性 (上段), ステップ数依存性 (下段).

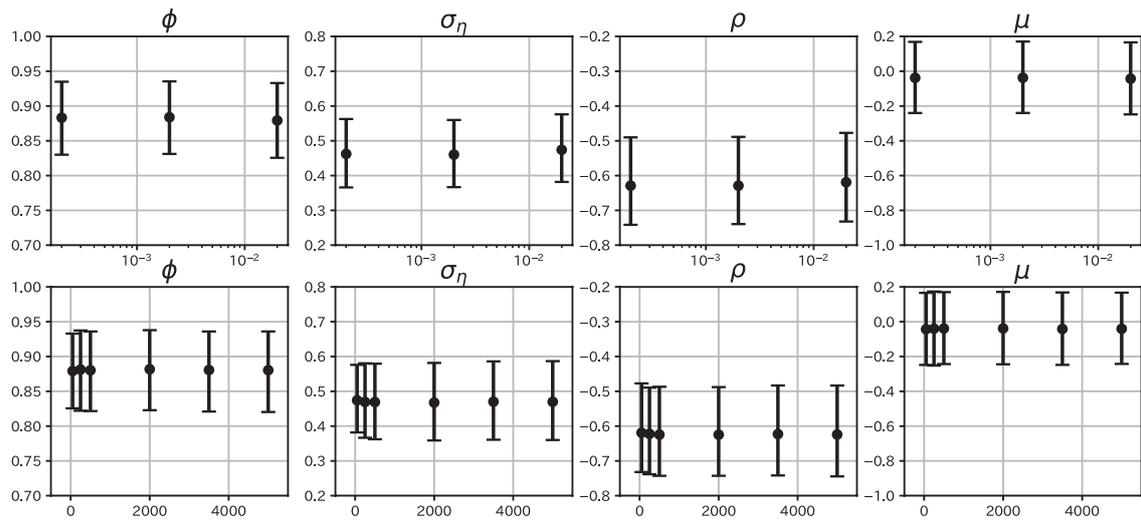


図 16: 日経平均株価を用いた SVL モデルの推定結果
ステップサイズ依存性 (上段), ステップ数依存性 (下段).

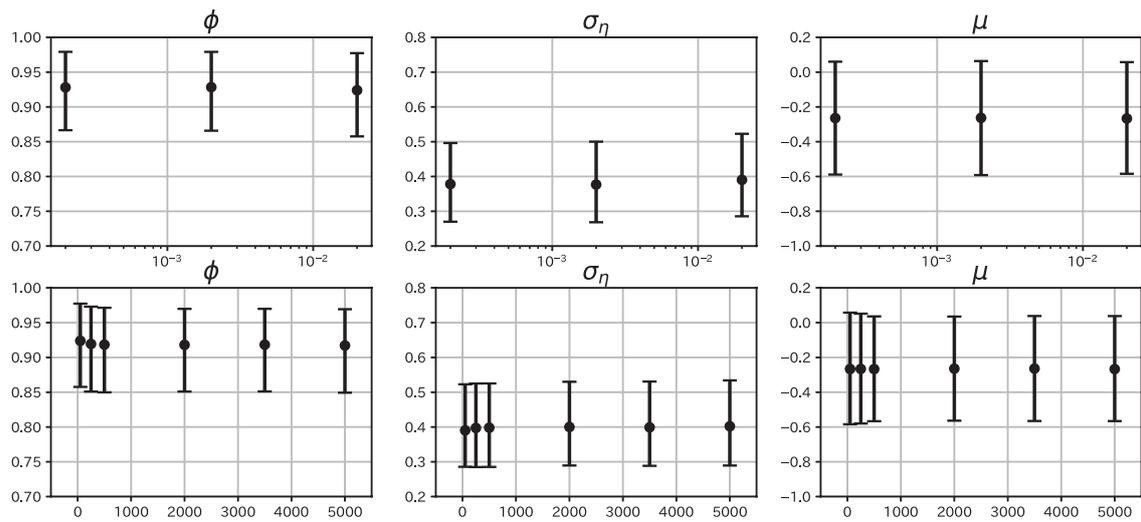


図 17: TOPIX を用いた SV モデルの推定結果
ステップサイズ依存性 (上段), ステップ数依存性 (下段).

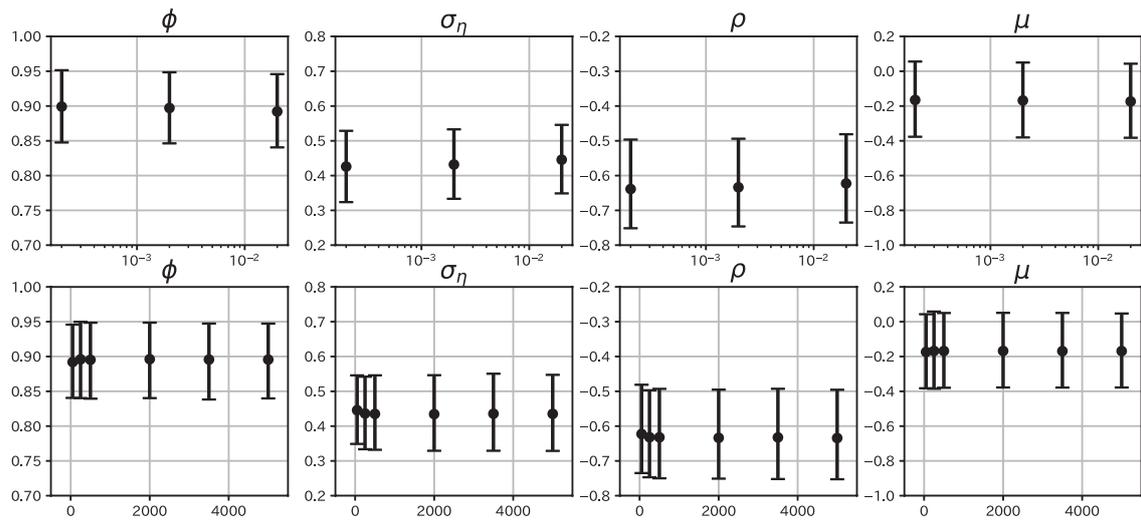


図 18: TOPIX を用いた SVL モデルの推定結果
 ステップサイズ依存性 (上段), ステップ数依存性 (下段).

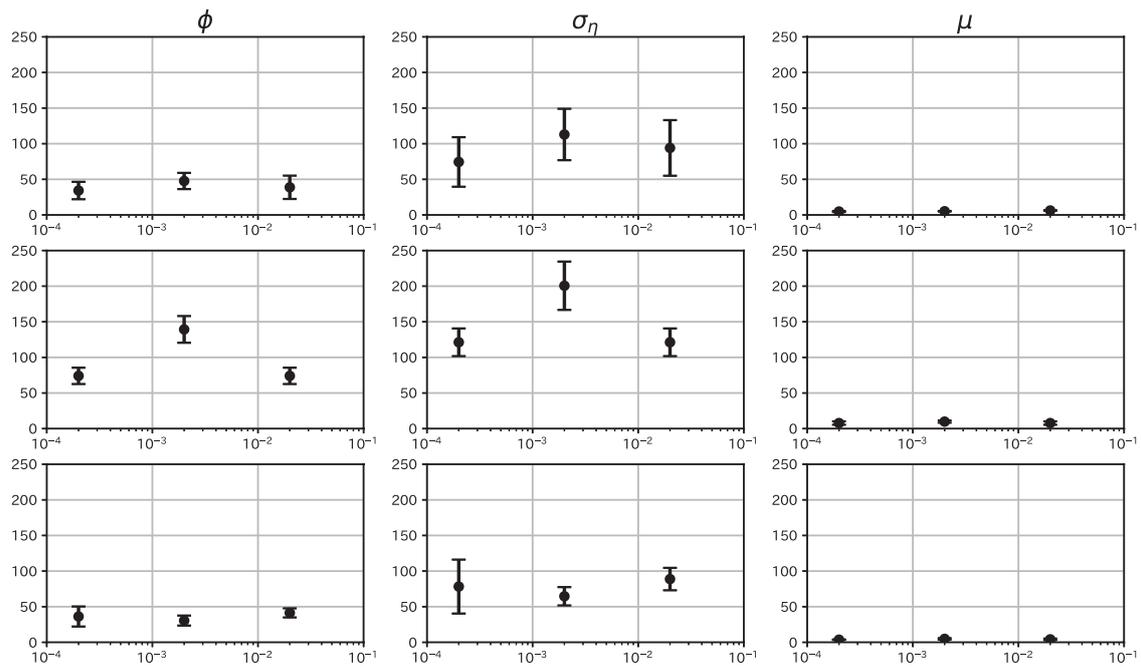


図 19: SV モデルの非効率因子のステップサイズ依存性
 テストデータ (上段), 日経平均株価 (中段), TOPIX (下段).

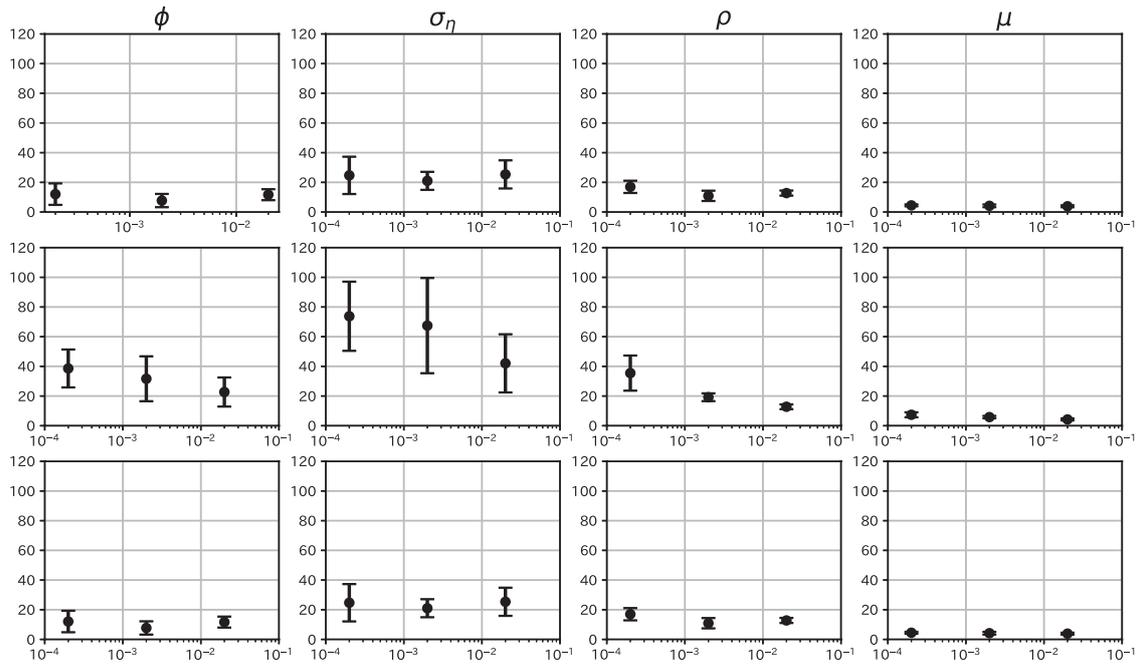


図 20: SVL モデルの非効率因子のステップサイズ依存性
 テストデータ (上段), 日経平均株価 (中段), TOPIX(下段).

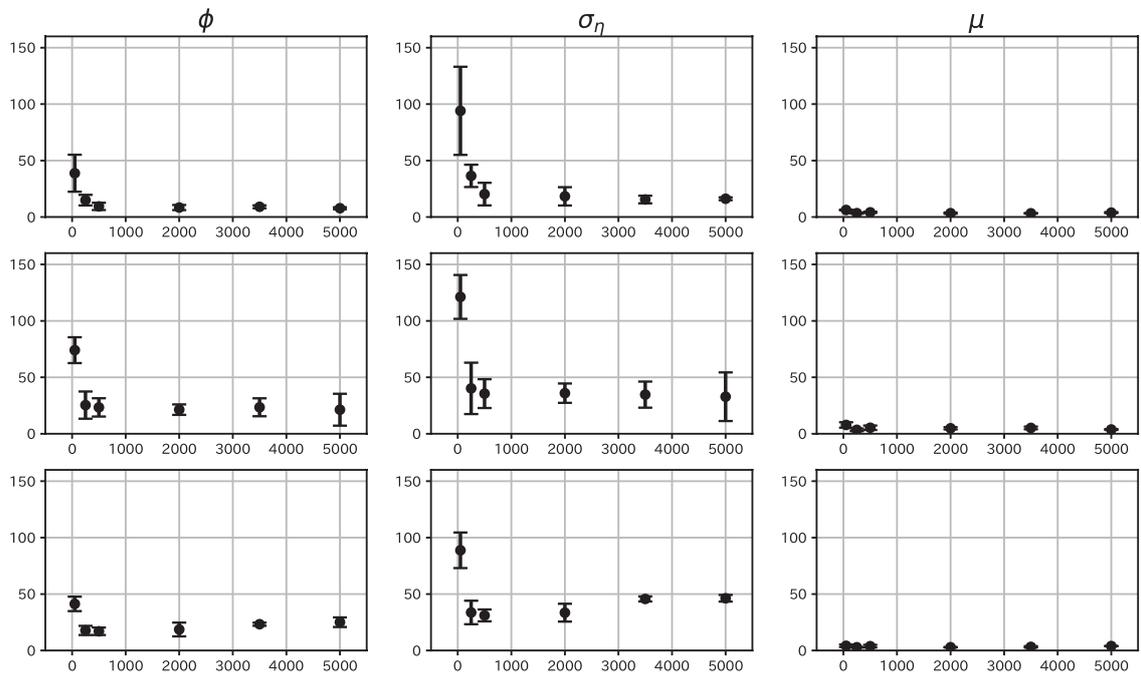


図 21: SV モデルの非効率因子のステップ数依存性
 テストデータ (上段), 日経平均株価 (中段), TOPIX(下段).

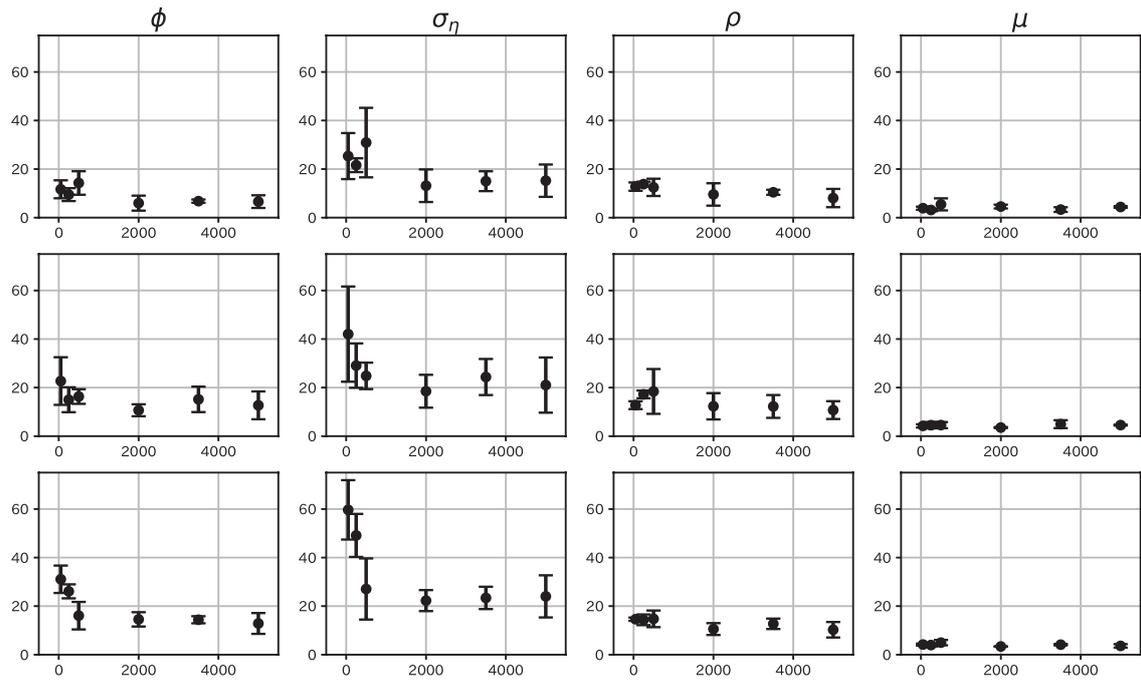


図 22: SVL モデルの非効率因子のステップ数依存性
 テストデータ (上段), 日経平均株価 (中段), TOPIX(下段).

Research Institute of Economic Science
College of Economics, Nihon University

1-3-2 Kandamisaki-cho, Chiyoda-ku, Toyko 101-8360 JAPAN
Phone: 03-3219-3309 Fax: 03-3219-3329
E-mail: keikaken.eco@nihon-u.ac.jp
<http://www.eco.nihon-u.ac.jp/research/economic/>