日本大学経済学部経済科学研究所研究会

【第 146 回】
2004 年 9 月 25 日

金融分析の最先端

日本大学経済学部助教授　　畠　田　　　敬

日本大学経済学部専任講師　　三　井　秀　俊

日本大学経済学部の畠田です．よろしくお願いします．本日はどうもご出席いただきましてありがとうございます．早速ですが，今回の研究成果について，現段階で分かっている限りのことを報告したいと思います．

本研究は不確実性と企業の設備投資に関する実証研究をテーマとしたものですが，その議論は10年ぐらい前からだんだんと活発に行われています．そして，「不確実性と設備投資の間の関係について実証研究を行ったところ，負の関係が存在している」という報告が数多く出されています．わが国でも何人かの研究者がこの問題に取り組んでおり，その中でもやはり「負の関係」が報告されており，そこからさまざまな解釈，そして，その解釈をサポートするようなさらなる実証研究が行われています．

先行研究のほとんどが収益に関する不確実性と設備投資の間の関係を主に調べていますが，そもそも何をもって「不確実性」を計るかということも１つの問題として議論されています．本研究でもその点に着目して，まず，収益に関する不確実性についての先行研究を大まかに紹介したいと思います．そして，収益の中でどのような要因が主に問題となっているのかという点について，収入の不確実性と費用の不確実性に着目して，それらが設備投資の決定をどの程度説明しているかについて実証分析を行い，その実証結果のいくつかを本日紹介したいと思います．

設備投資と不確実性に関する議論を簡単に紹介すると，設備投資理論は新古典派経済学によって洗練されたかたちで展開されています．新古典派経済学ではある一定の条件のもとでは，投資を決定する要因は平均 q あるいは限界 q によって説明されます．しかしながら，設備投資と q の間の関係をいざ実証分析してみると，様々な問題が生じています．特に大きな問題は，q が設備投資を説明する確かな要因となっているが，その説明力は思ったほど高くないということです．どうしてこの q が設備投資を説明するには十分でないのかということで，そこから設備投資に関する研究が進展しています．

資本市場において取引費用の存在といった不完全性が存在する，あるいは，情報の非対称性が存在する状況のもとでは，企業は自分の思ったときに思ったほど資金調達ができない（資金制約に直面する）状態に陥ることがあります．もしそのような状況にあるならば，資金制約が企業の設備投資を説明する要因として浮上してくるだろう．この資金制約を表す代理変数として，キャッシュフロー，資本構成，負債比率，自己資本比率，流動資産比率などを投資関数の推定式の中に入れて推定すると，それらの変数が説明力を有しているという内容が様々な先行研究で報告されています．そこから，投資と限界 q の間の説明力が不足している原因として資金制約という問題があるというのが１つ目の説です．

もう１つの説は，設備投資の非可逆性に着目した議論です．設備投資というのは，一旦行うとそれをすぐに回収することはできない埋没費用の側面を有しています．通常のネット・プレゼント・バリューの理論では，設備投資の決定は「現時点で実施するか，あるいは実施しないか」という意思決定についての議論ですが，そうではなくて，「設備投資を今実施するのか．あるいは，今は実施しないのか．言い換えれば，いつかは実施するかもしれないけれども，現時点ではとりあえず先送りにする」，このようにネット・プレゼント・バリューの考え方を少し考え直すところから派生した議論が投資の非可逆性に関する議論です．

不確実な要素が蔓延している状況では，企業は設備投資を直ちに実施しない．実施を延期して，不確実性がある程度解消されてから実施すると考えるわけです．従って，不確実性が高まれば，企業は設備投資を一時的に控えるということから，不確実性と設備投資の間に負の関係が存在する．そして，これによって限界 q の説明力不足を補足できるのではないかということが２つ目の議論であります．

資本市場の不完全性の議論についてはかなりの先行研究が蓄積されていますので，本研究では投資の非可逆性に着目した研究ということになりますが，それに関する今までの実証研究に共通する主張を紹介してお

こうと思います．論文にする際にはこの詳しい内容を紹介したいと思いますが，いずれの研究においても，「設備投資と不確実性の間には負の関係が成立する」というのが１つの統一的な見解となっています．ただし，では何をもって「不確実性」の尺度とするのかに関しては一致した見解は存在していません．従って，今回の「不確実性の尺度」という問題に取り組むことには十分な意義があります．本論文は2002年に執筆された私の先行研究を踏襲したかたちになっておりますので，その先行研究の結果をある程度紹介しながら，今回の内容についてのお話をしたいと思います．

設備投資と不確実性との間でどのような関係が成立しているかを検証するために，不確実性の尺度として先行研究は２つの方法を用いております．１つ目は，単純に資本の限界収益の割引現在価値を計測して，その標準偏差を計算し，その数値を不確実性の尺度とする方法です．２つ目の不確実性の尺度は，企業の限界収益に関する予測方程式を想定して，この予測方程式を推定し，その回帰残差から計算される標準偏差を不確実性の尺度とする方法です．標準偏差を計測する期間に関しては過去３年ともう少し長めの過去５年という２つの期間から計測しています．それぞれ手法に関して２つ，合計４つの不確実性を作成し，それらが設備投資とどのような関係にあるか検証したのが私の先行研究です．

今回も同様の形式でありますが，先行研究との違いは，収益を構成する収入と費用に分解し，収入に関する不確実性と費用に関する不確実性をそれぞれ計測している点です．先行研究に対応して，まず，先行研究の最初の方法を踏襲して，収入と費用の標準偏差をそれぞれ計算するというのが１つ目の尺度です．２つ目の尺度は，先行研究の２つ目の方法を踏襲して，企業の限界収入あるいは限界費用に関する予測方程式を推定して，その回帰残差からそれぞれの不確実性を計測するのが２つ目の尺度です．標準偏差を計測する期間に関しては過去３年ともう少し長めの過去５年という２つの期間を想定し，１つ目の尺度で，収入の不確実性が２つ，費用の不確実性が２つ計算されます．同様に，２つ目の尺度においても収入の不確実性が２つ，費用の不確実性が２つ計算されます．

それらの尺度を説明変数として加えた誘導型の投資関数を推定します．計測期間は1983～93年までの機械系製造業のパネルデータを用いて，基本的に次の３つの推定モデル

$$I_{i,t}/K_{i,t-1} = \alpha_1 MRQ_{i,t} + \alpha_2 FIN_{i,t-1} + \alpha_3 LK_{i,t-1} + \alpha_4 US(m,q)_{i,t} + z_i + d_t + u_{i,t}$$

$$I_{i,t}/K_{i,t-1} = \alpha_1 MRQ_{i,t} + \alpha_2 FIN_{i,t-1} + \alpha_3 LK_{i,t-1} + \alpha_4 US(m,q)_{i,t} + \alpha_5 UC(m,q)_{i,t} + z_i + d_t + u_{i,t}$$

$$I_{i,t}/K_{i,t-1} = \alpha_1 MRQ_{i,t} + \alpha_2 FIN_{i,t-1} + \alpha_3 LK_{i,t-1} + \alpha_4 U(m,q)_{i,t} + z_i + d_t + u_{i,t}$$

を操作変数法により推定しています．

MRQというのは限界qを表し，いわゆる投資機会の代理変数です．投資機会が高まれば企業は積極的に設備投資を行うことが予想されますので，その係数は正となることが予想されます．FIN，LKは流動資産比率，土地ストック比率で，これらは資金制約を表す代理変数です．流動性資産比率が高ければ，それだけ企業には資金に余裕があるということになり，企業は設備投資を積極的に行おうとするであろう．従って，その係数は正になると予測されます．土地ストック比率は担保比率とも言われ，日本の場合，銀行等から資金を借り入れたりするときに担保が大きな役割を果たします．従って，流動性資産比率と同じ意味で，その係数は正になると予測されます．

３つの式は基本的には同じですが，違いとしては採用される不確実性の変数で，まず１つ目の式は収入の不確実性の変数US(m,q)のみを説明変数として用いています．２つ目の式は収入の不確実性US(m,q)と費用の不確実性UC(m,q)を併せて取り入れたものです．３つ目の式は，収入と費用の差額，即ち収益の不確実性U(m,q)を説明変数に入れた推定式です．

推定結果として先に表３を見てください．これは2002年の先行研究の結果をまとめたものですが，先ほどの３番目の式を推定したものです．１つ目の不確実性の計測の方法で，期間として３年のデータを使って

不確実性を計算したものがU(1,3)です．同じ１つ目の方法で５年のデータを使って計算した不確実性がU(1,5)です．U(2,3)は２つ目の方法で３年間のデータを使って計算された不確実性，U(2,5)は２つ目の方法で５年のデータを使って計算された不確実性です．４つの不確実性が存在しますので，それぞれについて実証結果が報告されています．まずMRQの係数推定値は正で有意な値を示しており，予想通りの結果が得られております．資金制約を表す変数としてのFINとかLKも同様に正で有意な値を示しています．これは，資金流動性制約の存在を支持する実証結果であり，資金制約が緩くなるほど，その企業が設備投資に対して積極的になることを示しています．

ここまでは多くのアメリカや日本の実証研究の中で報告されている結果の内容とほぼ同様であります．本研究の焦点は，不確実性が設備投資に与える影響にありますので，以下では，不確実性の係数の推定値に注目します．収益に関する不確実性の係数推定値を見ていただくと，４つの不確実性の係数推定値のすべてが負の値を示しており，そのうち３つが５％で有意，１つに関しては10％で有意であるという結果が得られております．従って，概して設備投資と不確実性の間には負の関係が成立しています．これは，投資の非可逆性の存在を支持する実証結果であり，収益に関して不確実性が高まると，その企業はその不確実性が解消されるまで設備投資を控えようとすることを示しています．

設備投資と不確実性において収益に関しては負の関係が存在するが，ではその収益のどの要素（収入の不確実性と費用の不確実性）が主に負の関係をサポートしているのかを検証したものが，表１および表２になります．表１は１つ目の手法に基づいて不確実性を計測したもの，表２は２つ目の手法に基づいて不確実性を計測したものです．１列目，３列目は収入の不確実性のみを考慮した場合の推定結果で，２列目，４列目は収入と費用を同時に考えた場合の推定結果です．

まず表１の実証結果を簡単に述べますと，収入の不確実性の係数推定値は，１列目は正で有意，２列目は正で有意，３列目は負で有意，４列目は正で有意でないという結果が報告されています．その値も，１列目，２列目は比較的大きな値を示し，３列目，４列目は負の値でかつ小さな値を示しています．すなわち，収入の不確実性については推定結果が不確実性の尺度によってばらついています．他方，費用の不確実性に関する係数の推定結果を見てみますと，－0.06，－0.075とほぼ同じ値を示し，負でかつ統計的に有意な値を示しています．

同様に，表２の実証結果においても，収入の不確実性の係数推定値は，１列目，２列目，あるいは３列目，４列目，正あるいは負の値を示し，かつ有意でないという結果が報告されています．他方，費用の不確実性に関する係数推定値は負で有意という結果が報告されています．

以上の結果をまとめると，まず資本の限界収益に関する不確実性は，設備投資に対して負で，かつ有意な効果を持つ．次に収益を収入と費用に分解して議論すると，収入の不確実性は設備投資に対して推定結果にばらつきがあり，従って，設備投資に関してあまり有効な効果を持っていない．それに対して，費用の不確実性は，一様に負で，かつ有意な効果を持っている．先行研究においては，収益に関する不確実性が設備投資に対して有意な負の効果を持つと報告されてきましたが，本研究では，特に，その中の費用に関する不確実性が設備投資に対して大きな影響力を持っていることを主張しています．言い換えれば，収益の不確実性と設備投資の負の関係は費用の不確実性によって説明されているといえます．これは，日本において生産物市場に存在する不確実性よりもむしろ生産要素市場に存在する不確実性が，企業の設備投資の意思決定において重要な影響を及ぼしているというのが今回の結果から導き出される一つの結論であります．

渡部先生は日本経済学会に出席のため，今日は来られないということで，私，三井が発表の代役を務めさせて頂きます．渡部先生は非常に忙しいにもかかわらず，論文もフルペーパーで完成していまして，皆さん

のお手元にあると思いますので，こちらも見ながら聞いて頂ければより理解が深まると思います．内容的にはテクニカルな話が多いですが，どうしてこのような統計的分析手法が必要か，なぜMCMC（マルコフ連鎖モンテカルロ；Markov Chain Monte Carlo）やベイズ推定法（Bayes procedure）が金融分析において重要か，ということを中心に説明していきたいと思います．

テーマは「確率的ボラティリティ変動モデルの分析法とモデル発展」ということで，先程の畠田先生の実証研究とは違い，サーベイです．確率的ボラティリティ変動モデルというのは略してSVモデルと言いますが，SVモデルの推定方法についてかなり詳しくサーベイをして頂きました．

概要としましては，最初にSVモデルを説明して，次に，近ごろ学会やジャーナルや専門誌でよくみかけるマルコフ連鎖モンテカルロ（通称MCMC）を使ったベイズ推定法について説明します．皆さん，統計学を勉強した方は，教科書の２～３ページぐらい，ちょこっとベイズの方法が顔を出していたと思いますが，最近，金融分析の最先端ではベイズを使うのが一般的となり，古典的な統計手法はもうあまり使わないというのが現状です．３番目に，MCMCを使ったSVモデルにおける推定方法について説明します．そして，今後SVモデルをどのように発展させたら金融分析により応用できるかということを最後に説明していきたいと思います．

全くファイナンスを知らない人もいると思いますので，簡単に書いてみました．

$$R_t = \sigma_t u_t$$

上の式の R_t というのは株価や株価指数や為替レートなどの収益率です．それが $\sigma_t \times u_t$ で表されます．σ_t が，表題に出ているボラティリティと言われるもので，標準偏差で定義します．u_t は計量経済学で言う誤差項（error term）と言われるもので，これはi.i.d.（独立で同一の）標準正規分布に従うとして定式化します．

これは簡単な式ですが，多くの示唆を含んでいると思います．株価というのは日々変動しています．σ_t が変動の大きさを表し，u_t が変動の方向を表しています．単純ですが意味が深い定式化をしているわけです．そしてその最初の σ_t が金融業界では，ボラティリティと呼ばれているもので，このボラティリティの変動をどのようにして推定するのか，というのが問題になっているということです．

これまでどういう方法があったかといいますと，2003年，Engleという人がARCHモデルでノーベル経済学賞を取りました．これはボラティリティの変動を捉えるために広く用いられるモデルで，時系列分野の発展の基礎をつくったということでノーベル賞を取るぐらい重要な研究です．これから始まって，次にBollerslevによってGARCHモデルが定式化されました．もう１つは，今回渡部先生が論文で扱っているSVモデルで，ボラティリティの過程に対数をとった１次の自己回帰モデルにして定式化しています．

ではどうしてSVモデルを金融分析，特に株価や為替レートや株価指数などの時系列の分析に使うかという理由を書いてみました．まず１つは，収益率だけでなくボラティリティ自身の変動も捉えることができます．２番目が重要でして，株価の取引をする場合に，毎日毎日あるいは毎時間毎時間情報が入ってくるわけですが，株価というのは変動します．その情報が入ってきた場合の株価の変動というのがSVモデルの定式化に近いことがわかっていまして，株価や株価指数を分析する上ではSVモデルが情報に関しても加味しているということです．３つ目は，もともとSVというのは連続時間型から発達したわけですが，実証研究を行う場合には離散型にしなければいけません．離散型にする場合に近似が容易なのでよく使われます．この３つのポイントがSVモデルが金融分析でよく使われる主な理由だと思います．

SVモデルのパラメータを推定する場合に，積率法（MM：Method of Moments），積率法を発展させた一般積率法（GMM：Generalized Method of Moments），最尤法（ML：Maximum Likelihood method），疑似最尤法

（QML：Quasi-Maximum Likelihood estimation），そしてBayes推定法など，いろいろな推定法がありますけれども，MM，GMM，ML，QMLは最近ではほぼ古典的な手法と言われています．MCMCによるベイズ法を使った推定が最先端だということです

ベイズで推定する方法についてちょっと話をしますと，通常，古典的な方法ではパラメータを所与として考えるわけですが，ベイズはそうではなくて，データを所与として，そこからパラメータを求めようという方法です．いまθを未知パラメータとして，yを標本データとします．今回の趣旨は金融分析ですから，株価や株価指数や為替レートなどの収益率のデータをyに持ってくるわけです．そこでベイズを使って推定する方法ですが，事後分布が解析的に解けるケース（a）と事後分布が解析的に求められないケース（b）の２つに分かれます．解析的に求められれば，MCMCという方法は必要ありません．ベイズ法をそのまま使えるわけですが，一般的に金融のデータを使った場合にはうまく解けません．事後分布が求められないケースが多いですから，金融分析の場合には一般的に（b）の方法を使って分析を行うわけです．

ではどうやって行うかというと，まずパラメータは条件付の分布として表さます．条件付確率の計算をしていくと，真ん中のように書けます．計算をしていくと，分母はデータだけの関数になるわけです．そうすると，もう分母は関係ないので，ただ単に分子の事後分布と事前分布を掛けたものに比例するという形で書けます．

$$f(\theta \mid y)=\frac{f(\theta, y)}{f(y)}=\frac{f(\theta, y)}{\int f(\theta, y)\,d\theta}=\frac{\int f(y \mid \theta) f(\theta)}{\int f(y \mid \theta) f(\theta)\,d\theta}$$

$$f(\theta \mid y) \propto f(y \mid \theta) f(\theta)$$

Gibbs SamplerとMetropolis-Hastingsという２つ方法があって，全く分布がわからないところからサンプリングするのがGibbs Samplerという方法です．分布はある程度わかっているけれども，複雑でサンプリングするのが難しいという場合に用いるのがMetropolis-Hastingsアルゴリズムと言います．詳しく知りたい方は参考文献に載っている大森先生の論文や中妻先生や渡部先生の本を購入して見て下さい．これらの方法で事後分布からGibbs SamplerやMetropolis-Hastingsでサンプリングして事後分布の期待値を計算すればよいわけです．

$$E[f(\theta \mid y)]=\int \theta f(\theta \mid y)\,d\theta$$

時間も迫っていますが，Gibbs SamplerとMetropolis-Hastingsについて簡単に説明しておきます．ある分布を仮定します．これは別に何でもいいわけです．例えば，θ_1というパラメータが欲しければ，θ_1以外のパラメータからθ_1をサンプリングします．θ_1がサンプリングされましたら，サンプリングされたθ_1とθ_2以外のθ_3からθ_kまでの初期値とデータからθ_2というのをサンプリングします．１個１個わかったものは条件に入って，またそこからサンプリングしてやって，またわかったものはもう１回条件に入って，またサンプリングをするという方法を何万回と繰り返します．何万回と繰り返していくと，結局$f(\theta_1,\cdots,\theta_k \mid y)$からサンプリグされたパラメータの分布に収束するわけです．

実際やってみると，何十万回というサンプリングが必要なわけです．パソコンが発達していなかったころは，MCMCという方法は存在していましたが，あまり実用的ではなかったそうです．最近，パソコンの計算速度が速くなって，10万回でもかなり速く収束するため，実用的になったということでMCMCが金融分析の分野で活躍することになりました．先程言ったように期待値を計算するわけですが，最後に，標本平均を求めると，それがパラメータの推定値ということになります．

$$E[f(\theta_1,\cdots,\theta_k)]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\theta_1^i,\cdots,\theta_k^i)$$

問題は，パラメータを推定した場合に，そのパラメータに有意性があるかどうか検定しなければいけないということです．古典的な統計学の場合には信頼区間と言いますが，ベイズの場合には信用区間と言いますけれども，上2.5%，下2.5%の値を取って，それを

信用区間としています．MCMCというのはサンプリングが１期前に依存しますので，サンプリングした値には自己相関があるので，そのまま全部使えるわけではありません．かなり多くサンプリングしても，ある一定の数を捨てないと使えないということです．通常サンプリングする場合には，ランダムな自己相関がないようなかたちでサンプリングをしなければいけないのですが，それは分布がわかっているときだけしか使えません．MCMCというのは分布がわからないところからサンプリングしているのです．

Gibbs Sampler や Metropolis-Hastings 以外にも，ARMH（Acceptance-Rejection Metropolis-Hastings）アルゴリズムという方法があります．渡部先生は詳しく書いてくれましたけれども，ここまで来ると金融分析よりも統計の話になってしまうので，渡部先生には申し訳ないですが飛ばしまして，ではどうやってベイズ推定法を金融分析に応用するかという話に移らせて頂きます．資料の19ページをご覧ください．

先程，標準正規分布の話をしましたけれども，株価や株価指数の分布は正規分布ではなくて裾が厚い分布に従っています．従って，金融分析を行う場合には，先程の誤差項に標準正規分布を仮定するのではなくて，例として，t分布という分布を使うことが考えられます．t分布に関しては，品質管理を行っている人はよく知っていると思います．あるいは，一般化誤差分布（GED: Generalized Error Distribution）という裾が厚い分布を使って分析します．また正規分布を２，３個くっつけて，新しい混合分布をつくる方法も行われています．TOPIX（Tokyo Stock Exchange Price Index）や日経平均株価や外国為替レートの円・ドルレートなどではt分布を使うと精密な分析ができることがわかっています．

誤差項の分布と並んで最近よく研究されているのが非対称性SVモデルです．非対称性の話は次の私の発表でしますので簡単に説明したいと思いますが，株式市場を見ると，株価が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティは高まることが実際にわかっています．そういう非対称性が入った場合の推定法については，大森・渡部やYuの論文を読んで頂きたいと思います．

SV以外にもGARCHモデルをMCMCを使ってベイズ推定する方法があります．これに関しては，灰色の冊子（三井・渡部（2003）の論文）を参照して下さい．

t分布を仮定したり非対称性を考えたりする以外に，もっとアドバンスな方法としてスイッチングを入れる方法があります．ボラティリティは，高い時期だけが続いたり低い時期だけが続いたりするときがあるわけですが，回帰分析とか通常の時系列というのは，そういうことを全く考慮していません．そうではなくて，高い時期と低い時期があるわけですから，そこをきちんと分けて考えるというのがマルコフ・スイッチングSVモデルで，最近の学会誌にはこの話がよく出ています．

いままでは収益率とボラティリティの関係の話でしたが，次に取引高とボラティリティの関係を考えますと，ボラティリティと取引高との関係には正の相関があり，ボラティリティが高まると取引高は高まるという関係があります．

以上，途中かなり端折りましたけれども，渡部先生のSVモデルをベイズ推定により推定する方法のサーベイの概要を簡単に説明しました．

私，三井の報告の表題は，「非対称確率的ボラティリティ・モデルによるオプション価格の分析」というもので，先程のSVモデルをオプション価格の分析に応用したものがこの研究のテーマです．

なぜこのような研究をしたかというモチベーションですけれども，株価や株価指数や為替レートなどの原資産価格のボラティリティは時間を通じて確率的に変動しています．そこで，日本の株式市場では原資産価格とボラティリティとの間には相関関係はないのか，というのがまず１つです．もう１つは，ボラティリティはオプション価格の導出で使う重要な要因です．オプションの場合には，ボラティリティだけを取り引きする場合もあります．

株価指数オプションとしては，日経225，TOPIXが

ありますが，これらの原資産価格とボラティリティとの相関関係がもしあるとすれば，その相関関係がオプション価格にどのくらい影響するのか，というのが今回の論文のテーマです．

概要ですが，まずSVモデルについて簡単に説明して，次に非対称SVモデルについて説明します．３番目が論文の中心テーマですが，非対称SVモデルをオプション価格に応用するということです．今回実証研究をしていますので，実証研究に使ったデータと今回の研究の結果を報告して，最後に結論と今後の課題について述べたいと思います．

はじめに，ボラティリティが確率的に変動するモデルは大きく分けて２つありまして，１つは渡部先生の論文にもありましたSVモデルです．もう１つは，ARCH（Autoregressive Conditional Heteroskedasticity）familyといいまして，Engleがノーベル経済学賞を取る基になったARCHモデルを基にして発展したグループです．

SVモデルについては，渡部先生の論文の場合には，ベイズ推定法を使った方法のサーベイでした．ベイズを使ってオプションを推定するというのは，GARCH（Generalized-ARCH）の場合には先程配った論文があります．今回は，最先端ではなくて最先端の手前の疑似最尤法（QML: Quasi-Maximum Likelihood estimation）と言われる手法を使ってSVモデルの推定をして，それをオプション価格に応用してみました．疑似最尤法による推定法に関しては，1994年にRuiz，あるいは1996年にHarvey/Shephard，こういう人たちがすでに研究をしていますから，これらを使ってオプションに応用するというのが今回の目的です．

重複しますが，なぜ疑似最尤法を使ったかというと，まず推定に時間がかからない．古典的な方法というのはやっぱり意味があって，使い易いから残っているわけで，特にQMLとか最尤法（ML）を行う場合には１分とか２分で終わりますから，MCMCのように非常に回数の多いシミュレーションをする推定方法より楽です．金融取引は時間との戦いですから，あまり時間がかかるともうその情報は使えない．とにかく早く推定をして早く結果を見ないと実際の実務には使えないということで，今回はこの推定に時間がかからない方法でやってみました．

渡部先生の論文の中で，資産価格収益率とボラティリティとの関係と，取引高とボラティリティの関係があると言いましたが，今回は原資産収益率とボラティリティとの相関の方に焦点を当てました．株価収益率が下落すると次の期にはボラティリティは上がる，あるいは株価が上がった次の期にはボラティリティは下がる，そのような傾向があることはわかっています．理由はレバレッジ効果です．株式は変動費用で，負債は固定費用ですから，株価が下がると変動費用が下がりますから，企業自身はリスクが高まるわけです．それでボラティリティが上がると言われています．

オプションの価格は原株の価格（S）と，権利行使価格（K），安全資産利子率（r），行使日までの期間（T−t），そしてボラティリティ（σ）の５つの要因で決まります．ここでS，K，r，T-tは金融市場を見ればわかるわけですが，唯一わからないのがボラティリティです．市場を見ても取引されていませんからわからない．これを自分で推定するなりしてやらないと，オプション価格を推定することができないわけです．オプション価格を導出する方法としてBlack-Scholes（B-S）の公式というのがありまして，これもノーベル賞を取りましたが，このモデルはボラティリティが一定と仮定しています．金融の世界ではボラティリティは変動することがわかっているにもかかわらず，ボラティリティ一定と仮定していますので，仮定がかなりきついわけです．

詳しく話をすると統計の話になってしまいますので簡単に話しますが，カルマン・フィルターという手法を使ってパラメータの推定を行いました．尤度関数を出すのは大変ですが，カルマン・フィルターを使うと，６ページの（2.9）式のように，かなりすっきりしたかたちで尤度関数が出てきます．この尤度関数を最大化して，パラメータを推定します．

$$\ln L = -\frac{T}{2} - \sum_{t=1}^{T} \ln f_t - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \frac{\varepsilon_t^2}{f_t} \qquad (2.9)$$

非対称になった場合はどうなるか．非対称性が入った場合にどこが違うかというと，u_t と η_t との間に相関 ρ が入ってきます．先程説明したような負の相関があるということは，ρ が負なら良いわけです．推定した場合に ρ が負の値をとっていれば，株価が下がった場合にはボラティリティは上がると言えるわけです．Harvey/Hephardの論文で提案しているとおりに，カルマン・フィルターを使って計算すると，簡単に尤度関数が得られます．あとはこれを最大化してやればパラメータを推定できるわけです．

それでは，SVをどうやってオプション価格に応用するかということですが，オプションの価格付けでよく使われるのが（3.1）式と（3.2）式のような形で，（3.1）式は株価の変動を表しています．μ というトレンドを持って，σ_t という変動要因があるというかたちです．ボラティリティは先程のSVのところで説明したように，１次の自己回帰に従うような形にする．オプションのBlack-Scholesの公式もこの形を使っています．

$$\frac{dS}{S} = \ldots dt + \wp_t dz_1 \qquad (3.1)$$

$$\frac{d\wp^2}{\wp^2} = \equiv[\div - \ln \wp_t^2]dt + \times dz_2 \qquad (3.2)$$

問題は，dz は連続の確率過程を仮定しているわけですが，実際，実証研究する場合にはデータは離散型なので，連続のモデルを離散型に直してあげないと実証できません．そこで，Black-Scholes公式でも使っている（3.1），（3.2）式を（3.3），（3.4）式のように離散型に直します．（3.4）式を見てもらうと，ボラティリティが対数をとったかたちの１次の自己回帰モデルになっています．だから，連続型を直してやると，うまくSVの形になるわけです．そうすると，連続型を仮定しているBlack-Scholesの公式も離散型に直し，SVを使ってやれば κ とか全部推定できるはずですから，それを推定しようという話です．かつ，ρ というのが入っていますが，これは u_t と w_t が相関を持つという相関係数の ρ です．

$$R_t = \wp_t u_t \qquad (3.4)$$

$$\ln \wp_{t+1} = \doteqdot + (1-\equiv)\ln \wp_t + \times w_t \qquad (3.5)$$

オプション価格を導出するときに，（3.6）式のような偏微分方程式を解けばいいわけですが，ボラティリティの変動を考慮すると解けなくなってしまいます．リスクプレミアム（λ）も考慮すると，これも解けない理由になるわけです．仕方無いので他の方法を考えるしかありません．ベイズ推定法のときも解けなければシミュレーションで解くわけですが，オプションの場合にも，（3.6）の偏微分方程式が解けないので，投資家の危険中立性を仮定して，シミュレーションで解くというのがよくある方法です．

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho\delta\sigma^3 S\frac{\partial^2 C}{\partial S \partial\sigma^2} + \frac{1}{2}\delta^2\sigma^4\frac{\partial^2 C}{\partial\sigma^4} + rS\frac{\partial C}{\partial S}$$
$$+\{\kappa\sigma^2[\theta - \ln\sigma^2] - \lambda\}\frac{\partial C}{\partial\sigma^2} - rC + \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \qquad (3.6)$$

ご存じの方もいると思いますが，権利行使した場合の期末の株価行使価格を引いたものと権利行使しない場合のゼロと大きい方をとったのがオプション価格になるわけで，それを割引現在価値で引いて期待値を出せばいいわけですから，先程はGibbs SamplerやMetropolis-Hastingsなど難しい方法を使用しましたけれども，オプションの場合はそういう難しい方法を使わないで，モンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo Simulation）という昔から使われている方法で解くことができます．モンテカルロ・シミュレーションをする場合にも，負の相関の方法とか，テクニカルな方法が色々ありますが，今回は誤差を一番小さくできる方法だと言われている制御変数法を用いてシミュレーションを行ってみました．

実証研究する前に現実のデータではなく，定性的な簡単なシミュレーションをした結果，行使日までの期間が長いほど，オプション価格は相関の影響を受けることがわかりました．相関が負の場合には，in-the-moneyの価格を上げて，out-of-the-moneyの価格を下落させる．相関係数が正の場合には，in-the-moneyの価

格を下落させ，out-of-the-moneyの価格を上昇させる．プットの場合は逆の結果になりました．この定性的な実験から，ボラティリティと原資産価格収益率の相関関係は非対称性をオプション価格に影響を与えることがわかります．相関関係がない場合は，SVを使った場合，Black-Scholesモデルよりも常に高めの価格を与えるということがわかりました．ということは，行使日までの期間が長いほど，ボラティリティと原資産収益率との相関の値の選択は重要な問題となることがわかります．

それでは実際の市場ではどうかなということで実証研究をやってみました．オプションのデータは整理が大変なので，昔，整理したデータを使いました．原資産データは日経225株価指数終値の日次データで，標本期間が1989年12月～1997年12月，標本数は1976です．オプション・データは，原資産が日経225株価指数ですから，もちろん日経225のオプションです．行使日までの期間は営業日ベースで20日のオプション，標本期間は1994年１月～1997年12月までです．標本数はコール・オプションが343，プット・オプションが337です．安全利子率に何を使うか、非常に問題になるかもしれませんが，今回はコール・レートを使ってみました．

ボラティリティですが，オプションを分析する場合，ヒストリカル・ボラティリティとインプライド・ボラティリティという２つのボラティリティがあります．ヒストリカル・ボラティリティは単純な標準偏差の計算方法で出せます．この250というのは，１年間365日で，土日は取引がないので，それを考えると大体取引は年間250日で250となっているだけです．ヒストリカル・ボラティリティは過去のデータを使って計算するわけですが，営業ベースで20日前までのデータを使って計算してみました．インプライド・ボラティリティを出す方法は色々ありますが，今回はNewton Raphson法という一番簡単な方法で出してみました．

パラメータを推定する場合，オプション価格を予測する時点の前日から営業日ベースで1000日前までのデータを使っています．これは最尤法の欠点を補うためでで，最尤法というのはサンプル数が多くないと駄目なわけです．サンプル数の要らない手法でしたら，100日前とか200日前で済みますが，最尤法の場合には500以上ないと収束しにくくなります．そのために1000日前まで考慮しましたが，これは仕方の無いことです．マネネスというのは行使価格と株価がどのくらい離れるかというもので，今回は３つのカテゴリーに分けて考えました．原資産価格と行使価格の比を考えて，S/Kが0.97以上，1.03ならばat-the-moneyオプションとします．S/Kが0.97より小さかったら，コール・オプションはout-of-the-money，プット・オプションはin-the-moneyオプションとします．S/Kが1.03以上だったら，コール・オプションはin-the-moneyで，プット・オプションはout-of-the-moneyオプションとします．こういう３つのカテゴリーに分けてみました．

パラメータを推定して，モンテカルロ・シミュレーションによる理論値と，市場でついているマーケット・プライス，その２つをME，RMSEとME Rate，RMSE Rateで比較しました．実証結果は表６と表７にあります（論文を参照して下さい）．表６はMEとRMSEについて，相関係数がゼロという場合と，推定して相関係数がマイナスの値で出た場合，実際，実務で使われているBlack-Scholesの公式，この３つを比較しました．表７はMEの率とRMSEの率です．どのくらいの幅で乖離するかよりも乖離率の方がいいですから，表７の結果を重視した方がいいわけですね．

結論として言えることは，まず１つは，SVを使うとボラティリティが低い場合のオプション価格を修正できることがわかりました．ヒストリカル・ボラティリティよりもインプライド・ボラティリティの方が大きくなるケースが多いため，こういう結果になったと思われます．コール・オプションではin-the-money，プット・オプションではout-of-the-moneyでそういう傾向が強いことは，先程の表を見てもらえばわかります．

２つ目は，インプライド・ボラティリティとヒストリカル・ボラティリティを比べた場合，インプライ

ド・ボラティリティの方がオプション価格の推定には優れていることがわかりました.

３つ目に，今回SVモデルを使ってオプション価格を出したわけですけれども，全体的に表を見ていただくとわかるように，行使日まで20日という期間が短いコール・オプション価格については，もともと使われているBlack-Scholesの公式を使ったオプション価格よりも格段優れているわけではない．実務家の人たちがBlack-Scholesをいつも使っている理由はここにあって，実務家の人たちがBlack-Scholesの公式を使っているというのはある意味合理的な行動をしていることがわかります.

最後に今後の課題ですけれども，今回はSVの推定方法を疑似最尤法でやりましたが，ほかにもGMMとか，先程の渡部先生の論文にもあったようなベイズを使った推定などで実証研究を行って，今回の研究とその効率性の比較を行うことがまず考えられます．もう１つは，誤差項の分布を正規分布と仮定していますが，株式市場の場合にはｔ分布とか他の裾の厚い分布を使って推定する必要があります．３つ目に，今回オプションに関してそれほど詳しい分析はしませんでしたが，オプションには行使期間が１ヵ月物以外のも，２ヵ月物・３ヵ月物などありますから，異なる行使日までの期間について分析しなければいけません．最後に４つ目ですけれども，今回は株価指数のオプションでしたが，外国通貨オプションとか個別株オプションもありますから，そういうのにも応用して，実際同じような結果が得られるかどうか，今後の課題の１つだと思います.