

日本大学経済学部経済科学研究所研究会

【第190回】

2014年7月26日

平成24～25年度共同研究中間発表  
**「経済および経営問題における  
数理・確率モデルの解析」**

日本大学経済学部教授

大澤 秀雄

日本大学理工学部教授

中村 正彰

東海大学理学部教授

土井 誠

## 「The ruin probability and the ruin time for the risk reserve process」

東海大学理学部教授 土井 誠

土井です。こんにちは。

ruin probabilityは破産確率、ruin timeは破産するまでの時間、risk reserve processというのは危険準備過程で、生命保険会社や火災保険会社で緊急の支払いのための準備金を積んでいます。そのような責任準備金の積み立て・支払の過程のことで、ずいぶん昔、どこかの銀行が潰れまして、銀行といえども潰れる時代が来たと実感しました。この研究をすることによって、破産を避ける方策が何か出てくればいいなというのがきっかけで、この研究が始まったわけです。

まずrisk reserve processの確率モデルを作ろうと思います。 $\{U(t)\}$ を危険準備過程と名付けます。時刻 $t$ で、準備金の金額がどのぐらいあるか、貯金で言えば預金残高です。 $u$ は初期準備金の残高です。最初に時刻0でどのぐらいため込んでいるか、あるいは危険準備金がどのぐらいあるかを示しています。 $X_n$ は $n$ 番目のクレーム（保険金などの支払い請求）の額です。 $T_n$ は $n$ 番目の支払い要求が来る時刻。もちろん $T_0$ は0としています。原点では支払いはない。 $W_n$ は $T_n$ と $T_{n-1}$ との間の時間で、支払い請求がある時間間隔です。

$X_n$ と $W_n$ に確率分布を与える。それは2種類で後で考えます。 $c$ はpremium rate、積立額で、単位時間当たりどのぐらい積立てるか。これは時刻に関係なく、コンスタントです。これで数学モデルの一番最初のところことができました。

(資料1) イメージとしては、横軸が時間、縦軸が準備金の残高です。今回の話では上限は設けませんけれども、大抵は上限を設けていて、無限にためるということは一般にはしない。 $t_1, t_2, t_3, t_4$ は支払い請求があった時刻です。支払い請求があるまでは積立てておく、危険準備金は増加する。 $t_1$ で支払い請求があって、すぐに支払うと準備金残高は減る。それからまた増やして、上限があれば、そこで増やすのをやめておいて、また $t_2$ で支払い請求があれば準備金残高は即時に減る。 $t_3$ で×になっているのは、ここで準備金残高がゼロになって破産したということです。しばらく

経ってまた復活する。たとえばりそな銀行が、いったん国営になって潰れたわけですが、しばらくして今はまた復活していますね。北海道拓殖銀行みたいに、潰してそのまま復活しないということは、今はない。

ここでまた数学モデルを構築します。時刻 $t$ までに何件支払い請求が来たか、 $N(t)$ 件支払い請求が来た。また $X_1$ から $X_n$ までの支払い請求の総額を $S(t)$ とします。この $N(t)$ は確率変数ですから、複合過程で、こういう文字を提示しております。時刻 $t$ までにどのぐらい危険準備金をためておくかということ、線形にしておりますので $ct$ 。単位時間当たり $c$ ため込んでいきます。 $c$ は正の実数です。時刻 $t$ までにこれだけため込んで、 $S(t)$ だけ支払うということですから、時刻 $t$ での危険準備金の残高は、初期準備金にため込んだ $I(t)$ を足して、それから $S(t)$ 支払って、もしこれがマイナスだったら破産です。

(資料2) 破産(ルーイン)をこういうふうに定義しました。危険準備金の残高が負になったら破産である。 $I(T) - S(T)$ をこのようにしておく。 $(X_i - cW_i)$ を $Z_n$ 、 $S_n$ はその $Z_n$ の和です。このようにしておく、解析するのに都合がいい。

われわれは二つのモデルをつくりました。一つは $R | Ex | Ex$ モデル。最初に $R$ があって、risk reserve processですよという宣言です。次の $Ex$ は支払い請求時間間隔が指数分布に従っていることを示し。最後の $Ex$ は支払い請求の大きさ、支払い請求額で、これもやっぱり指数分布であることを示しています。

もう一つは $R | Ex | Er$ モデルです。たとえば生命保険などでは、死亡があると死亡保険金を払う。これは非常に単純な保険ですが、オプションをつけて、たとえば入院したら幾らか交通事故にあったら幾らか、それは指数分布の和になるわけですからアーラン分布( $Er$ )です。それは後でまた説明します。

(資料3) 最初に $R | Ex | Ex$ モデルです。支払い請求の時間間隔が指数分布で、支払い間隔も指数分布という一番単純なものを解析しようと思います。 $X - Y$ を $Z$ として、 $Z$ の確率密度関数が欲しい。支払い請求時間間隔と支払い額は独立であるとしていますので、 $Z$ と $V$ の同時確率密度になるわけです。ただし、パラメーターは $\lambda/c$ で、 $\mu$ は支

払い額、こちらは支払い請求の時間間隔です。周辺分布を出すと、 $Z$ は先ほどのこのところ（資料2のこのところ）が正になったり負になったりする。正の数で $\mu$ より大きかったら破産ですけれども、ここが負になれば破産ではない。ということは、 $Z_n$ が正の数になる場合もあるし、負になる場合もある。 $z$ が0以上だと普通の指数、 $z$ が負だとここはプラスになる、両側指数分布のような形です。

（資料4） $n$ 回目までの支払い請求があっても破産しないという確率をこのように定義します。第1回目の支払いがあったときに、初期準備金よりその支払い額が小さければ破産しません。危険準備金から請求額を払って残りが $u - S_{n-1}$ なので、もちろん積立額も入っていますが、それより小さければ大丈夫というわけで、 $n$ 番目まで積立金と初期準備金の中から請求額を引いた金額が負にならないければ破産しない。初期準備金が $u$ で、 $n$ 番目までの支払いがあっても破産しない確率を $r_n(u, c)$ と定義します。ただし積立の傾きは $c$ です。

（資料5, 6）これに関する定理が欲しいのですが、そのためにはあらかじめこういう計算をしておきます。 $n$ 回目までの支払いで破産しない確率は $n-1$ 回目まで破産しない確率で表現できて、実はこれは $n$ 回目の支払いで初めて破産する確率なんです。が、 $K$ はこういう定義をするとよらしい。 $K$ のためにLEMMAを計算しておくとは非常に簡単に使える。複雑に見えるけれども、こういう係数をつくっておくと計算は簡単になります。

（資料7）それで計算しますと、縦軸が100回目までの破産しない確率。初期準備金が10兆円。 $c$ は準備金が増加する傾きで、これが1.137ぐらいまでだったら破産しない確率が80%以上になるというグラフです。もちろん $1/\mu$ とか $1/\lambda$ は1にしておきます。支払い時間間隔の平均が1、支払い額の平均も1、両方とも指数分布で、非常にきれいなグラフができます。そうすると、どうやら保険金をため込む傾きが1.1程であればいいであろうと分かります。

（資料8） $c$ を1.1にして、100回目までの支払いで破産しない確率を80%以上にするには初期準備金どのぐらい必要なのかというと、11兆5,700億円程必要になることが分かります。

これがモデル1で、死亡保険金だけという、普

通の一番単純なモデルです。

次の $R | Ex | Er$ モデルは支払い額が独立な指数分布の和である。死亡保険金プラス、入院したとかそういうオプションがつく場合です。パラメーターは $\mu$ で、フェーズが $k$ で、 $k$ が2のときが多いんですけども。

（資料9）先ほどと同じように、 $Z$ と $V$ の同時確率を求めて、変数変換して周辺分布を出します。こういう係数が必要ですのであらかじめ計算しておきます。

（資料10）またさっきと同じように、 $n$ 回目までの支払い請求でも破産しない確率で、今度はフェーズが $k$ になっていますが、不等号の向きは変わっていませんから破産しないということです。これをモデル2として、あらかじめこのような計算をする。

（資料11）この証明は数学的帰納法で簡単にできます。こういうものを三つばかり用意しておく。

（資料12）すると1回目の支払いで破産しない確率はこのようになります。あとは数学的帰納法で証明する。

（資料13）証明するために、またこういう補題を用意しておいて、この証明もほとんど数学的帰納法で証明できる。

（資料14）そうすると第2のモデルに対する $n$ 回目までの請求で破産しない確率はこのようになるのですが、

このsummationが $n$ 個で、非常に複雑です。 $a$ と $\beta$ と $A$ は先ほどと同じですが、これをなんとかsummationを減らしたい。

（資料15）多重のsummationを一つにできた。これは非常に面白いです。

（資料16）そのためには、先ほどの $K$ という係数を計算していくと、この式を満たすことが分かりますので、これをうまく使うことができました。

（資料17）ただし、この係数がちょっと複雑ですけれども、summationが $n$ 個あったものが、一見一つにまとまったように見える。数値計算するときにはこれは非常に便利です。実はsummationを $n$ 回やっているのと同じなんですけれども、数値計算するときには便利です。プログラムを組むのはちょっと難しいんですが、あたかもsummationが

一つになったように見える。

(資料18) そこで、 $n$ 回目までの支払いで破産しない確率は $n-1$ 回目までに破産しない確率から $n$ 回目初めて破産する確率を引いたものだという同様の結果が得られて、また同じように計算します。

(資料19) クレームの発生する、保険金支払いの発生する時間間隔は指数分布で、支払い請求の大きさの平均が1、初期準備金が10兆円。基本的な生命保険に交通事故と入院とか、オプション二つ。そのときにため込む傾きはどのぐらいにしたらいいか。さっきよりちょっと小さくて、1.068以上であれば破産しない確率が80%以上になる。

(資料20) ということが分かったので、また同じように準備金をため込む傾きを1.1にして、100回目までの支払いで破産しない確率が80%以上にするには初期準備金をどのぐらいにしたらいいかというと、8兆5,550億円という結論が得られました。

(資料21)  $n-1$ 回目の支払いまでずーっと破産しない状態で、 $n$ 回目の支払いで初めて破産する確率を  $P_n(u, c)$  とすると、モデル1はこのようになる。モデル2のほうも同じようになりました。

(資料22) 問題は破産するまでの時間分布が欲しい。独立の指数分布の和ですが、じゃどんな形なのか実際計算しようとする、このようになってしまって分からない。定式化はできますから定理はできたのですが、きれいな形になるかどうか、いま考えているところです。  $f(x)$  は支払い額の大きさの確率密度関数、  $h(y)$  は支払い請求の起こる時間間隔の確率密度関数で、複雑に絡み合っていますが両方とも指数分布とすれば、やってできないことはない。定式化すれば数値計算は簡単にできるだろうということです。  $h(y)$  が指数分布であれば、破産するまでの時間分布は条件付きアーラン分布であることがわかりました。

以上です。

## A system of ODE's describing a default risk

日本大学理工学部教授 中村 正彰

日本語にすると「ある債務不履行リスクモデル」ということで、土井先生の倒産と同じような話ですが、こちらは常微分方程式系として債務不履行に陥るときの時間との関係を調べます。途中から解析の話になって、確率・統計から離れた話になってしまいます。

これは私と一橋大学の石村直之先生との共同研究で、数理ファイナンスの一つの簡単な例として計算しよう。最初に方程式だけ出してしまいますと、 $u$ ,  $v$ ,  $w$ という三つのお互いにつながりがある会社の間で、どちらかが潰れるとこっちも連鎖倒産する、そういうかたちのモデルになっています。一番簡単なモデルでやってみますと、線形では全然問題なくなってしまうんですが、非線形性でお互いの関連ルーピングモデルで、 $t$ が時間、 $u$ がデフォルトになるためのファクターを表す、そういう方程式です。

もともとの方程式はJarrowと、Yuというのは中国人じゃないかと思えますけれども、この人たちの二変数のモデルだった。それを三変数に拡張したのがわれわれのモデルです。もともとのモデルの出し方は、 $\lambda$ の1云々というのはインジケータファンクションで、 $F$ と $G$ を周辺分布関数として、 $T^A$ ,  $T^B$ でジャンプするような方程式をつくる。 $F$ と $G$ を同じようにしてつくっておいて、これを微分したのがこの二つの式です。

微分したら $1$ が消えますから、これをさらにつくっていくと、パラメーターに条件をつけますと $F$ と $G$ が同じものになってしまう。この $F$ と $G$ はやさしいから解くことができるんで、それでは面白くないので、同じ発想で三つの会社の間話に拡張する。単純に拡張するとうまくいかないので、積分で表すようなかたちで $U$ ,  $V$ を計算すると、積分と微分と両方入ったような話になりまして、(9)という方程式が出てきます。

$a_i$ とか $b_i$ とか $c_i$ とか、 $a$ ,  $b$ ,  $c$ は全部定数にしておいて計算したのがこういう方程式で、これに適当な変数を入れたものが(9)で、これか得られる。(1)と(2)は係数が少し違うんですけども、本質的に同じようなものですので、(1)だけを扱

うようにする。

これを計算しますと、微分方程式のほうの解析になりますが、解の存在は問題ないんですけども、このモデルについてどんなことが言えるか。こういう方程式の解というのは初期値問題として考えて、それからどのぐらい会社がつつかという話になります。初期値が小さければ解は永久に続く。だけど、ある程度大きいと、数学用語ではブローアップと言うんですけども、無限大に与えられて、そのときは爆発、解がなくなってしまうということだから、このモデルはもう使えないということと実際会社が潰れるということと、どのぐらいつながりがあるか。こういうモデルで解析するのはこういうこと。

もう一つは爆発時間の計算をしよう。解が爆発するというのは、 $T$ の爆発のところで解がなくなるというのが分かる。小さいときはいいんですが、大きいとそうなる。そのときのそれに行く行き方が、こういうかたちで、こういう値をつけて極限を計算しますと、 $u$ ,  $v$ ,  $t$ と定数に行く。しかもその定数はこういう条件を満たしていることが分かる。

これがまず一つで、さらにこのへんでこういうちょっとした変数を導入しますと、 $u$ ,  $v$ ,  $t$ に対して $x$ ,  $y$ ,  $z$ という関数を導入しますと、 $t$ が $T$ に行くところで無限大に $u$ ,  $v$ ,  $t$ は発散してしまう。そのときにこういうのをに入れて計算しますと、これは全部 $1/2$ に行くという、微分方程式では面白い結果で、 $u$ の $t$ が $T$ に行くときの行き方がこれである程度分かる。

それを解析的に示したのがこの仕事の一つです。最初は解析的にまだあんまりはっきりできなかったんですが、数値シミュレーションをやってみますと、もともとの方程式の(1)を主にやることにしましたが、平衡点、つまり $du/dt$ ,  $dv/dt$ が0になるような点は5個ありまして、原点は全然変わらない。こういう点における安定性はどうか。平衡点が安定ということは、その周りに小さなのは全部そこへ収束しちゃう。そこからちょっと大きくなると不安定になって、どこかへ飛んでいってしまう。安定性というのはそういうことを意味していますが、この安定性を計算しますと3次方程式が出てきまして、三つの線形化方程式を計算し、その固有値を計算すればよろしい。

3次方程式だって、こういうやさしい3次方程式になりますので、非常に分かりやすい。正根が一つと二つの負根がある。ということはどこかで爆発する可能性があるということが分かる。 $a$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ は係数でしたが、その係数の大きさに対応して $\varepsilon$ を適当に小さくとると、原点の周りにとったDというのは、3次元ですから球みたいなものですが、そこから出ていった解は大きくなることなく、どんどん小さくなって0に行ってしまう。その証明は、こういう微分不等式を $u$ 、 $v$ 、 $w$ と全部掛けていってエネルギー不等式をつくるのと同じやり方で、さっきの方程式を使うと、ここがマイナスで、 $\delta$ でこれとこれの引き算が出てきますので、 $-\delta$ というかたちにして、ちょうど負になりますので、どんどん減少していく。しかもそれがこのように指数的に減少する。だから0になる。

問題なのは爆発する解のほうがかめんどうくさくて、爆発する場合は初期値をこのようにとれば確実に爆発する。 $a$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ は最初のあれで決まりますけれども、それはどうやってやるかという、これはちょっとテクニカルで、こういうやつをつくるんですけど、結局は微分方程式を計算していって収束するか発展していくか計測する。これはオーダーエスティメートみたいなものを使う。それでこんなものを出して、これで無限に行くことはない。 $t$ がこれの値で抑えられてしまうというような話になるので、有限なときにしか、この解の存在が言えない、そういう話をします。

このへんは破綻するのは分かっていますが、破綻しているときに、さっき $u^*$ とかいうような定義をしましたが、これを計算するとこういうのが出て、先ほどの計算でこれが出てくることが分かります。さらにこれを定義して計算していって、また似たようなオーダーエスティメートを次々にやると、これがこういう話で出てきて、最後に結局微分方程式、微分不等式に持っていくというかたちで最大値の評価をする。そうしますと、こういうかたちのことが全部言える。

計算するとこうなるのですが、これで数値シミュレーションをやった例を紹介して終わりにします。この爆発時間はこうなっていくので、非常に計算しにくくなる。数値シミュレーションやろうとすると、同じタイムステップにするとオーバーしちゃう。爆発時間に近づいたらどんどん小

さくする。それを継ぎ足していって継ぎ足していってという計算をする。そのためには、普通にやったのではあまりいい結果が得られないので、100桁の多倍長計算をする。前に修士の学生がやってくれたんですが、あまり速くない計算機を使ったのですごい時間がかかった。かなり速い時間でやっても多倍長というのは時間がかかる。

計算はこういうやつに対してやると、Dが小さい値ですと、全て0に収束する。先ほどのかたちでいくと、 $u$ 、 $v$ 、 $w$ という三つを書いたつもりなのですけれども、ある時間で大体全部0に行く。これは会社が潰れないでいくという話です。

こちらは、さっきのように少し大きくしていくと、ブローアップしていく。ブローアップの仕方というのは、こちらへんでこう来て、ある $t$ というのに近づくとボンと飛ぶわけですね。ここにこういうふうに立っていって無限大に行くわけですけど、この立ち方というのはこういうかたちで、一番やさしい場合を書いていったんですけども、この何桁かまでは同じなのですが、そのへんで大きくなりかけたらどんどん行くので、多倍長を使ってどんどん小さく小さくしていって計算する。

今のこのかたちでは分かりにくいので、それを引っくり返してみますと、真っ直ぐ平らに行っているわけではなくて、少しは上がっている。ほとんど真っ直ぐにしか見えななくても、ちょっと上がっている、そういう計算になってきます。

こっちのさらに $u^*$ に行く計算というのも、やはりブローアップタイムがひっかかるので、ここがちょうど1/2 だったかな。このへん、ぐっと近づくんですが、最後の最後でボンと飛んで、実際の計算では収束はしていない。これは収束はさせられないんじゃないかという気がします。

こっちの2番目の1/2というのも、こういうふうにとどんどん行って、このへんでボンと飛ぶわけです。こっちはこれが1/2、これにどんどん近づいていくんですね。だけど、最後の最後でブローアップタイムでボンと飛んで、やっぱり爆発する。そういう話になっています。

基本的な最後のこのへんの数値シミュレーションは前の学生がやってくれたんですけども、解析的な結果のほうは去年、理工のジャーナルで出

して、これはかなり解析的なので、もう少し数理ファイナンスでということ、業績もそれなりに出ているので、そのうちにまた発表させていただきます。

どうもありがとうございました。

## 「ラウンドアバウトのシミュレーションモデル」

日本大学経済学部教授 大澤 秀雄

交差点で信号機がない制御システムをラウンドアバウトと言うんですが、私も2007年にケンブリッジ大学に1年間行ったときに経験して、慣れれば快適な部分もありますし、逆に混雑して大変だったときもあります。帰国してから見ると、地方の都市を中心に、日本においても社会実験的にラウンドアバウトを取り入れようとしているところがあります。そこでラウンドアバウトと通常の信号機による交差点との効率性がどうなのかという疑問がありまして、こういうテーマを取り上げました。

ラウンドアバウトと信号機交差点との比較研究はまだ始まったばかりですが、イギリスは日本と同じで車は左側通行です。だから向こうへ行っても何ら問題なく運転できますが、唯一違うのが交差点における走行に注意しないとイケないということです。フランスとかドイツとかほかのヨーロッパの国々では車は右側通行ですから、また逆の進み方になりますけれども、ここでは日本と同じ左側通行のイギリスの場合のラウンドアバウトについて説明します。

まずラウンドアバウトの構造は、車が進入する、また退出する進退口がありまして、中に入るとサークルがある。交差点の中の車が回るところをステージと呼ぶことにしますが、進退口に1対1で対応しています。

(資料1) たとえばケンブリッジの例ですが、Chesterton RoadとElizabeth Wayの交差点と、Milton RoadとElizabeth Wayの交差点があります。ヤフーの地図からとったものですが、ケンブリッジのセンターからケム川を渡る道路がエリザベスウェイで、ミルトンロードを抜けて郊外につながる。チェスタートンロードはエリザベスウェイと交差して、ここにサークルがある。これが一つのラウンドアバウトです。さらにミルトンロードとエリザベスウェイとが交差する、ここもラウンドアバウトです。

これで見て分かるように、ラウンドアバウトの交差点をつくるには相当土地が必要である。その

点でも日本には向かない面があると思いますし、少なくとも都市の中ではこういうシステムをつくるわけにはいかないかもしれない。先ほど言ったように、地方を中心に社会実験が行なわれているけれども、取り入れるかどうかまだ分からないという実情があるということです。

こちら(A)もこちら(B)も4方向で、AもBも日本で言うとクロスした道路に相当するものと考えてください。

(資料2) Bの交差点を大きく描いて、ここをモデルにラウンドアバウトの車の走行について解説します。進退口1, 2, 3, 4とあって、これがクロスしたかたちの交差点に相当するものです。進退口1は交通量の多いところで、センターから郊外へ抜けようとする、ほかの道もあるけれども、大体この道が一般に使われる、ケンブリッジの中では重要なところ。真ん中がサークルで、たとえば進退口1から入って次の進退口に抜けるサークルを結ぶ場所をステージと呼ぶことにして、進退口1に対応してステージ1、進退口2に対応してステージ2、進退口3に対応してステージ3、進退口4に対応してステージ4と呼ぶことにします。

(資料3) いま例にとった交差点を模式的に描くと、こういう形(A)になります。信号機のシステムだと、こういう(B)十字型交差点に相当するものになります。見れば分かる通り、Aの場合はB以上に広いスペースが必要になる。

(資料4) 走行の規則ですが、ラウンドアバウトの場合、進退口1, 2, 3, 4とあって、車は左側通行で右側優先が原則です。たとえば1から入ろうとする黄色い車は、4のほうから走行してくる車がなければ、そのまま入れる。赤い車が来ていますが、まだ間隔があるので入れる可能性がある。2から入ろうとする紫の車と白の車は、空色の車が右から近づいてきているので、こちらの車の流れがなくなるまで待たなければならない。3から入ろうとする空色の車は、紫の車は進退口から抜けてしまえば、そのまま入ることができる。4から入ろうとしている緑の車は、赤い車が進めば入れる。こんな状況で車は流れていきます。

進退口が四つぐらいならば、あらかじめどこで抜ければいいのか分かっているのでもいいんですが、大規模なラウンドアバウトとか進退口が何個も放



射状にあるようなラウンドアバウトだと、回っていてどこで抜ければいいのか分からない。抜けるところを失敗すると、またもう一周しなければいけないようなこともあります。私自身もそういう経験を何回かしましたので、あらかじめどういう経路で行くか調べておかないとラウンドアバウトの走行は大変なことになるなと思いました。

(資料5) 日本のような信号機のシステムではこのようになります。赤で止まり、青で進む。青である限り、直線的に進むことができる。ラウンドアバウトでは交差点を抜けるまでに直感的に考えて円の長さぐらいの走行を余計にしなければいけないので、交差点における車の流れとしては差が出てくるのが考えられます。

日本でもラウンドアバウト化しようという社会実験が行なわれていて、これはちょっと分かりにくい写真ですが、飯田の吾妻町ロータリーの例です。軽井沢六本辻ラウンドアバウトのほうが有名かもしれませんが、放射状に6カ所の進退口があります。

そこでラウンドアバウトと信号機交差点との効率性がどうなのか、簡単な比較は難しいので、とりあえず数学的なモデルを考えます。ステージがKあるラウンドアバウトシステムを想定して、時刻tにおいて進入口iで進入を待つために並んでいる車の数を $L_i(t)$ とします。時刻tにおいてステージを走行中の車の数を $Q_i(t)$ とし、各ステージで容量が異なりますので、ステージiの容量を $C_i$ とすると、 $Q_i(t)$ は0から $C_i$ の間になります。時間hの間に進入口iに新たに来た車の数を $A_i(h)$ 、さらに時間hの間に進入口iからステージに進入した車の数を $B_i(h)$ とします。

さらに仮定を設けまして、 $A_i(h)$ は時刻tに無関係で、他の変量とも独立である。 $B_i(h)$ は $A_i(h)$ を除く変量に依存する。ステージに入れる車ですので、一つ手前の進入口に並んでいる車とかその前の一番目のステージの状態に依存して決定される。一般的に $L_i(t+h) = L_i(t) + A_i(h) - B_i(h)$ になります。 $A_i(h)$ は新たに到着した車、 $B_i(h)$ はステージに入れた車です。

このままでは解析困難なので、とりあえずシミュレーションで対応しようというので、離散時化モデルをつくって考察することにします。先ほどの $L_i(t)$ に相当するものですが、時点nにおい

て進入口iで進入を待つために並んでいる車の数を $L_i(n)$ とする。時点nにおいてステージiを走行している車の数を $Q_i(n)$ 、時点nにおいて進入口iに新たに来た車の数を $A_i(n)$ 、時点nにおいて進入口iからステージiに進入した車の数を $B_i(n)$ と、先ほどの $Q_i(t)$ 、 $A_i(h)$ 、 $B_i(h)$ に相当する変数を定義します。

(資料6) それに対して仮定を設けています。 $A_i(n)$ は進入口iに新たにやってくる車の数ですが、時点に関係なく、nに関係がある。時点を細分化しますので、単位時間の中にやって来られるのは1台という制限を設けます。そこで、単位時間内に新たにやってくる確率を $\lambda_i$ とします。つまり、 $\lambda_i$ は進入口iで単位時間当たり新たな到着がある確率ということになります。 $L_i(n+1)$ の時点では、nの時点の状態と新たに来た車から新たにステージに進入できた車を引けば、 $L_i(n+1) = L_i(n) + A_i(n) - B_i(n)$ という式で表現できることになります。

(資料7) さらに仮定を設けます。ステージの状態として新しい変数を動員しまして、 $q_i^+(n)$ はステージiを走行中の車の数として、 $q_i^-(n)$ は先ほどの $Q_i(n)$ に相当するものですけれども、ステージiから次のステージi+1へラウンドする、または退出してしまう車の数で、これも単位時間当たり1台限りという制限を設けます。 $q_i^+(n)$ はステージiの容量によりますので、 $C_i$ より小さい。 $q_i^+(n)$ と $q_i^-(n)$ を足すと $C_i$ が入った不等号になります。さらに、ここにラウンドするかどうか決定しなければいけない車がいた場合に、ステージiから次のステージへラウンドする確率を $\zeta_i$ とします。 $1 - \zeta_i$ はステージi+1から退出する確率になります。

(資料8) 今の例はステージが三つのラウンドアバウトを考えてシミュレーションを実行してみました。これもケンブリッジのまちの中に実際あるラウンドアバウトで、Newnham RoadとThe Fen Causewayという、センターから郊外へ向かう、また郊外からセンターへ向かう、進退口1が一番交通量の激しいところです。ニューナムのもうちょっと先に娘が行っていた学校がありまして、進退口3を抜けるとケンブリッジのカレッジや図書館がたくさんあるところで、この道も私は何回も通ったんですが、結構交通量の激しいところで

す。ステージ1, ステージ2, ステージ3とあって、ステージによって容量が異なりますので、そのへんも考慮して考えなければいけない。

(資料9) 3ステージのモデルですが、パラメーターとして、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は各進入口に単位時間当たり新たにやってくる車の確率です。 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ は各ステージで退出するかどうかという車がいた場合に、ラウンドする、さらにラウンドアバウトを次のステージに向かって進む確率になります。

(資料10) さらに $B_i(n)$ は0か1です。ステージ $i-1$ からラウンドがある場合、または進入口に並んでいる車が0の場合は、前のステージから次のステージへ進むということはありませんので、これは0になる。 $i-1$ からラウンドがなくて、かつ $L_i(n-1)$ のときは、新たに進入口 $i$ から中へ入れる可能性が出てきますので、このときは1になる。さらに、実際に右側から車がこないということになると、並んでいる車はまとも中へ入っていきますので、その状況を想定して、いまこの仮定では2台まで同時に入ることができるという仮定を設けています。

(資料11) そういう仮定のもとで、このようなパラメーターでシミュレーションを行なった結果を、二つの例で示します。上の例は、ブルーが一番交通量が激しい進入口1に並んでいる車の数の変化で、このように激しい動きをしている。緑が進入口2の状況、少し濃い緑が進入口3の状況です。これを見て分かるように、進入口2と進入口3は、新たにやってくる確率は同じですが、進入口2のほうが少し輻輳が激しい状況が生まれている。進入口1は交通量が一番激しいので、このようにところどころで異常な混雑を示す。ところが、これだけ混雑があっても、だんだん解消する部分が出てくる、というような状況です。

このようにうまくいく場合もあるし、下の例では、進入口1はこのへんから交通渋滞が始まって、なかなか解消できない。ラウンドアバウトではたまにこういう状況が起こります。それに比べて進入口2と3ではそれほど交通輻輳の状況を示さないという結果がこのシミュレーションではいかががえます。

(資料12) 通常の信号機交差点モデルとの比較をしますと、先ほどのラウンドアバウトの形態はT字路型信号機交差点では、これが進入口1に相

当しまして、2と3はストレートな状況です。進入口1が一番交通量が激しく、2と3は同じような状況で、1ほどではない。そこで信号の青の時間帯、赤の時間帯、その間隔の制御によって交通量の調整が行なわれるわけですが、パラメーターとしては、新たに到着する確率と、 $\tau_1, \tau_2$ は信号機が青の時間の長さを表すことにします。進入口2と3はストレートですから、この間隔は同じです。さらに $v$ は青信号のときに交差点内を通過する車のスピードとします。これをいま、円周率 $\pi$ とする。ラウンドアバウトでは円周上を回ることになりませんが、ストレートに抜ける場合は大体円周率分ぐらいスピードが違うだろうと考えて、 $v$ を $\pi$ と仮定してシミュレーションすることにします。

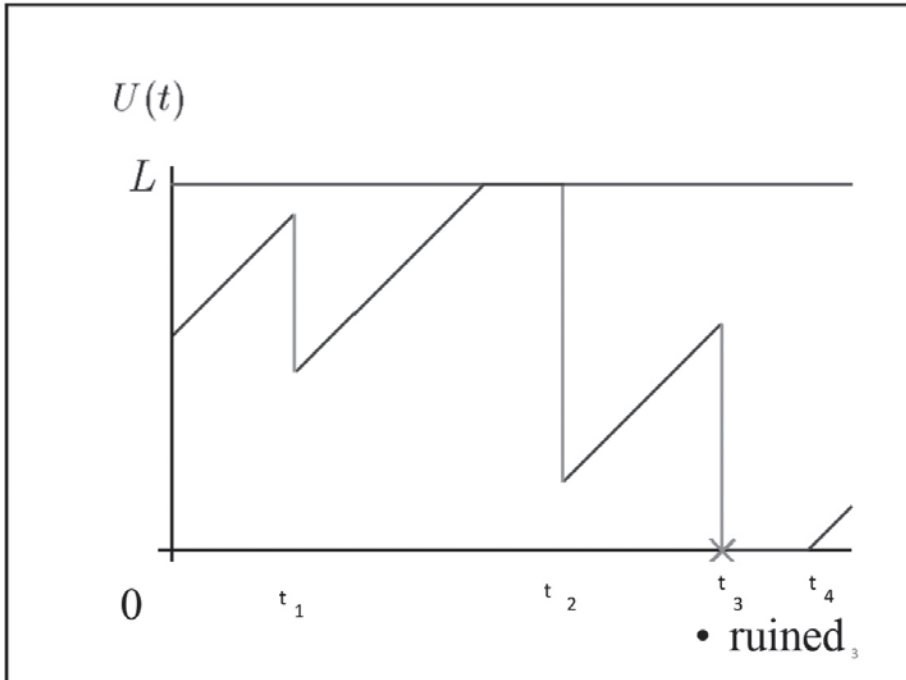
(資料13) これがシミュレーションの例ですが、色は先ほどのシミュレーションの結果と対応していますけれども、さっき言った状況とちょっと違います。青は進入口1の交差点に並んでいる車の状況で、薄い緑と濃い緑は進入口2と3です。交差点で信号が青の時間帯を調整していますので、スムーズに流れている。これだけたまたまでも、調整によって周期的に解消されていく状況が確認できます。

少なくともここで扱ったパラメーターに関しては、信号機のある交差点のほうが交通量をコントロールされている。ただ、これは一つの例だけなので、さらに進めてみなければ分かりません。実際にイギリスなどではラウンドアバウトだけでやるというのは少なくなってきた、交通量の激しいところはラウンドアバウトの中にさらに信号機を設けて信号機で制御するというも行なわれていますし、ロンドンのような大都市になると、ラウンドアバウト自体があまりない。郊外に行くとありますが、まちの中ではないという状況が生まれていますので、ラウンドアバウトはやはり郊外向けの交通システムなのかなという気がしています。

研究としてはまだ最初の段階なので、これからもっと発展させていかなければいけないと考えています。

以上です。

(資料1)



(資料2)

$$\begin{aligned}\{\text{ruin}\} &= \left\{ \inf_{t>0} U(t) < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \geq 1} [u + I(T_n) - S(T_n)] < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \geq 1} \left[ u - \sum_{i=1}^n (X_i - cW_i) \right] < 0 \right\}.\end{aligned}$$

we define

$$\begin{aligned}Z_n &= X_n - cW_n, \quad (n \geq 1), \\ S_n &= Z_1 + \cdots + Z_n, \quad (n \geq 1, S_0 = 0).\end{aligned}$$

(資料3)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}y} & (y \geq 0) \\ 0 & (y < 0). \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z = X - Y \\ V = Y. \end{cases}$$

$$f_{ZV}(z, v) = \mu e^{-\mu(z+v)} \cdot \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}v}$$

7

(資料4)

Define the probability that the process doesn't ruin until the  $n$ -th claim ( initial level  $u$ , premium rate  $c$  ) :

$$r_n(u, c)$$

$$= P(Z_1 < u, Z_2 < u - S_1, \dots, Z_n < u - S_{n-1} | U(0) = u, T_1 < T_2 < \dots < T_n < \infty)$$

9

(資料5)

**LEMMA 1** For any non-negative integer  $i$ , the following relation holds.

$$(3) \quad \int_{-\infty}^u g(z)(u-z)^i e^{\mu z} dz = \frac{\lambda\mu}{\lambda+c\mu} \sum_{j=0}^{i+1} \frac{i!}{(i-j+1)!} \left(\frac{c}{\lambda+c\mu}\right)^j u^{i-j+1}.$$

**LEMMA 2** For any natural numbers  $m$  and  $n$  ( $m \leq n$ ), the following relation holds.

$$(4) \quad \sum_{i=1}^m K_{n,i} = K_{n+1,m}.$$

10

(資料6)

**THEOREM 1** For R|Ex|Ex model, we obtain the probability  $r_n(u, c)$  as follows :

$$r_0(u, c) = 1,$$

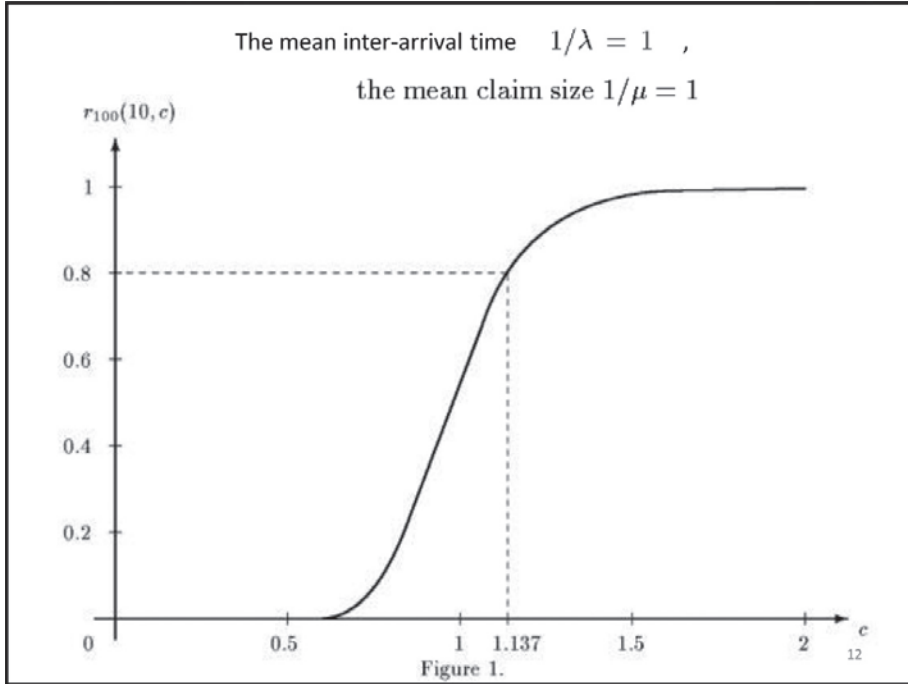
$$(3) \quad r_n(u, c) = r_{n-1}(u, c) - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+c\mu}\right)^n e^{-u\mu} \sum_{i=0}^{n-1} K_{n,n-i} \frac{u^i}{i!} \left(\frac{c}{\lambda+c\mu}\right)^{n-i-1} \quad (n \geq 1),$$

where

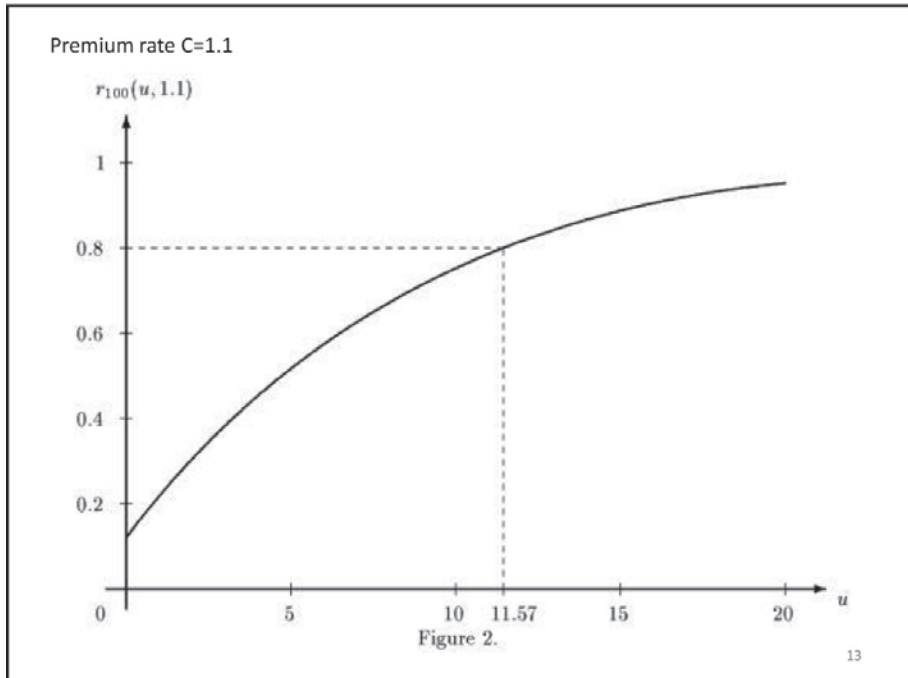
$$(4) \quad \begin{cases} K_{n,1} = 1, & (n \geq 1) \\ K_{n,n} = K_{n,n-1}, & (n \geq 2) \\ K_{n,l} = K_{n-1,l} + K_{n,l-1}, & (n \geq 3, 2 \leq l \leq n-1) \\ K_{n,l} = 0, & (\text{others}). \end{cases}$$

11

(資料7)



(資料8)



(資料9)

p.d.f of Z

$$\begin{cases} \alpha = k\mu + \frac{\lambda}{c} \\ \beta = k\mu \\ A = \alpha^{-1}\beta, \end{cases}$$

$$g_k(z) = \begin{cases} \frac{\lambda}{c} A^k e^{-\beta z} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha^i}{i!} z^i & (z \geq 0) \\ \frac{\lambda}{c} A^k e^{\frac{\lambda}{c} z} & (z < 0) \end{cases}$$

15

(資料10)

Define the probability that the process doesn't ruin until the  $n$ -th claim ( initial level  $u$ , premium rate  $c$  ) for Model-2 :

$$r_n^{(k)}(u, c) = P(Z_1 < u, Z_2 < u - S_1, \dots, Z_n < u - S_{n-1} | U(0) = u, T_1 < T_2 < \dots < T_n < \infty)$$

16

(資料11)

**LEMMA 5** For any non-negative integer  $i$ , the following relation holds.

$$(15) \quad \int_0^u z^i e^{-\beta z} dz = \frac{i!}{\beta} \left( \beta^{-i} - e^{-u\beta} \sum_{j=0}^i \frac{\beta^{-j}}{(i-j)!} u^{i-j} \right).$$

**LEMMA 6** For any natural number  $k$  and  $n$ , the following relation holds.

$$(16) \quad \sum_{i=0}^n \binom{k+i}{i} = \binom{k+n+1}{n}.$$

We have the following lemma with respect to  $\beta$  and  $A$  of (12).

**LEMMA 7** For any natural number  $k$ , the following relation holds.

$$(17) \quad A^k + \frac{\lambda}{c\beta} \sum_{i=1}^k A^i = 1.$$

17

(資料12)

**PROPOSITION 1** For  $R|Ex|Er$  model, the following relation holds.

$$(18) \quad r_1^{(k)}(u, c) = 1 - \frac{\lambda}{c\beta} e^{-u\beta} \sum_{i_1=1}^k A^{i_1} \sum_{i_2=0}^{k-i_1} \frac{\beta^{i_2}}{i_2!} u^{i_2}.$$

18



(資料13)

**LEMMA 8** For any non-negative integer  $i$ , the following relation holds.

$$(19) \quad \int_{-\infty}^0 e^{\alpha z} (u-z)^i dz = \alpha^{-i-1} i! \sum_{j=0}^i \frac{(u\alpha)^j}{j!}, \quad \alpha > 0.$$

**LEMMA 9** For any non-negative integer  $i$  and  $j$ , the following relation holds.

$$(20) \quad \int_0^u (u-z)^i z^j dz = \frac{i!j!}{(i+j+1)!} u^{i+j+1}.$$

19

(資料14)

**PROPOSITION 2** For  $R|Ex|Er$  model, we obtain the probability  $r_n^{(k)}(u, c)$  as follows:

$$(21) \quad r_0^{(k)}(u, c) = 1,$$

$$r_n^{(k)}(u, c) = r_{n-1}^{(k)}(u, c) - \left(\frac{\lambda}{c}\right)^n \alpha^{-n} A^{k(n-1)-1} e^{-u\beta}$$

$$\cdot \sum_{i_1=1}^k A^{i_1} \sum_{i_2=0}^{k-i_1} A^{i_2} \sum_{i_3=0}^{k+i_2} \sum_{i_4=0}^{k+i_3} \dots \sum_{i_{n+1}=0}^{k+i_n} \frac{(u\alpha)^{i_{n+1}}}{i_{n+1}!}, \quad n \geq 1,$$

$$\begin{cases} \alpha = k\mu + \frac{\lambda}{c} \\ \beta = k\mu \\ A = \alpha^{-1}\beta. \end{cases}$$

20

(資料15)

## Redution of multi-sammation

$$(23) \quad \phi_k(n) = \sum_{i_1=1}^k A^{i_1} \sum_{i_2=0}^{k-i_1} A^{i_2} \sum_{i_3=0}^{k+i_2} \sum_{i_4=0}^{k+i_3} \cdots \sum_{i_{n+1}=0}^{k+i_n} \frac{(u\alpha)^{i_{n+1}}}{i_{n+1}!}, \quad n \geq 1.$$

21

(資料16)

**LEMMA 10** *If  $k$  is given, for any natural number  $m$  and  $n$  ( $m \leq kn$ ), the following relation holds.*

$$(24) \quad \sum_{i=1}^m K_{n,i}^{(k)} = K_{n+1,m}^{(k)}.$$

22

(資料17)

**PROPOSITION 3** *If we define the following, for any natural number  $k$ ,*

$$(25) \quad \begin{cases} K_{n,1}^{(k)} = A^{k-1}, & (n \geq 1) \\ K_{1,m}^{(k)} = \sum_{j=1}^m A^{k-j}, & (2 \leq m \leq k) \\ K_{n,kn-j}^{(k)} = K_{n,k(n-1)}^{(k)}, & (n \geq 2, 1 \leq j \leq k) \\ K_{n,m}^{(k)} = K_{n-1,m}^{(k)} + K_{n,m-1}^{(k)}, & (n \geq 2, 2 \leq m \leq k(n-1)) \\ K_{n,m}^{(k)} = 0, & (\text{others}), \end{cases}$$

then (23) is reduced to

$$(26) \quad \phi_k(n) = A \sum_{i=0}^{kn-1} K_{n,kn-i}^{(k)} \frac{(u\alpha)^i}{i!}, \quad n \geq 1.$$

23

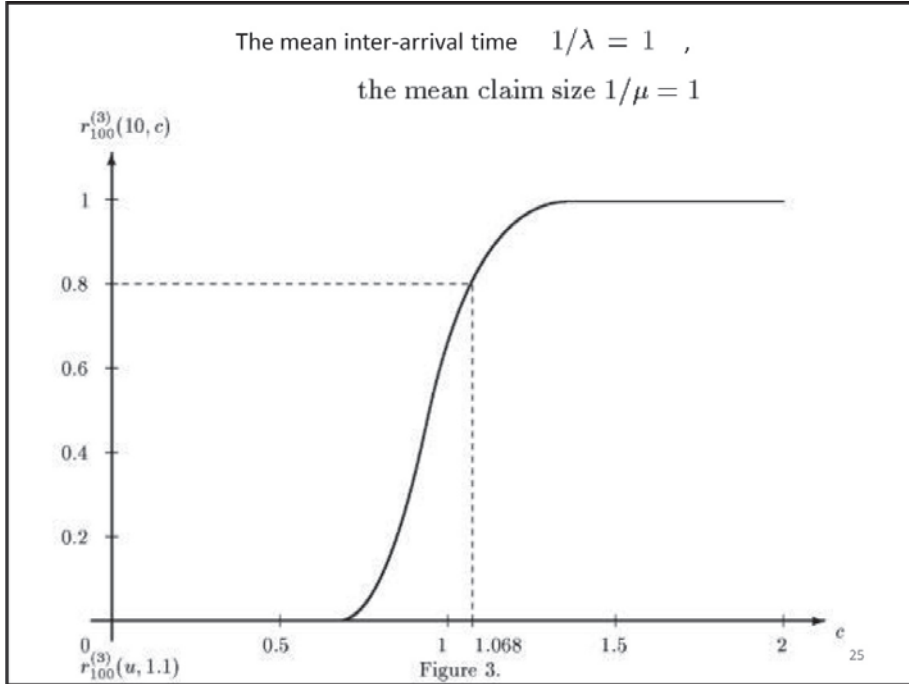
(資料18)

**THEOREM 2** *For R|Ex|Er model, we obtain the non-ruin probability in finite time  $r_n^{(k)}(u, c)$  as follows:*

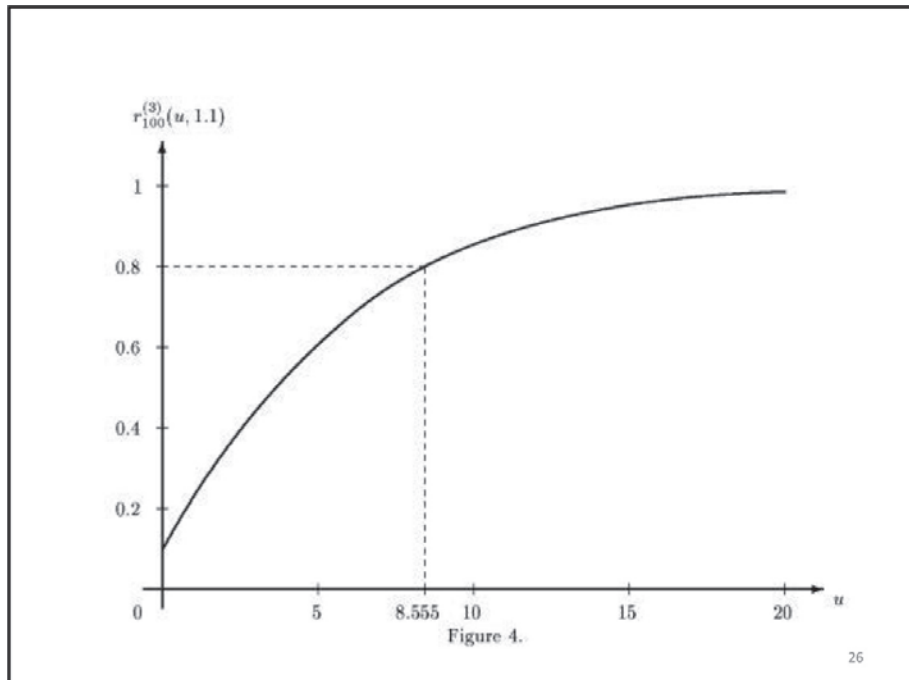
$$(27) \quad \begin{aligned} r_0^{(k)}(u, c) &= 1, \\ r_n^{(k)}(u, c) &= r_{n-1}^{(k)}(u, c) - \left(\frac{\lambda}{c}\right)^n \alpha^{-n} A^{k(n-1)} e^{-n\beta} \sum_{i=0}^{kn-1} K_{n,kn-i}^{(k)} \frac{(u\alpha)^i}{i!}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

24

(資料19)



(資料20)



(資料21)

**6.1 RUIN PROBABILITY** We could find the ruin probabilities in finite time for Model-1 and Model-2 in Theorem 1 and Theorem 2, respectively.

For Model-1, we find the ruin probability at  $n$ -th claim in Theorem 1 as follows:

$$(30) \quad p_n(u, c) = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\lambda\mu}{\lambda + c\mu} \right)^n e^{-u\mu} \sum_{i=0}^{n-1} K_{n, n-i} \frac{u^i}{i!} \left( \frac{c}{\lambda + c\mu} \right)^{n-i-1} \quad (n \geq 1).$$

Also the ruin probability in finite time for Model-2 is

$$(31) \quad p_n^{(k)}(u, c) = \left( \frac{\lambda}{c} \right)^n \alpha^{-n} A^{k(n-1)} e^{-u\beta} \sum_{i=0}^{kn-1} K_{n, kn-i}^{(k)} \frac{(u\alpha)^i}{i!} \quad (n \geq 1).$$

27

(資料22)

## Ruin time distribution :

### THEOREM 3

$$(32) \quad F_n(c, u, t) = \int_0^t \int_{t-w}^t \int_0^{u+c\xi_1} f(x_1) \int_0^{u+c(2\xi_1+w)-x_1} f(x_2) \cdots \\ \cdot \int_0^{u+c((n-1)\xi_1+(n-2)w)-\sum_{j=1}^{n-2} x_j} f(x_{n-1}) \int_{u+c(n\xi_1+(n-1)w)-\sum_{j=1}^{n-1} x_j}^{\infty} f(x_n) dx_n \\ \cdot dx_{n-1} \cdots dx_1 h(\xi_1) d\xi_1 h(w) dw$$

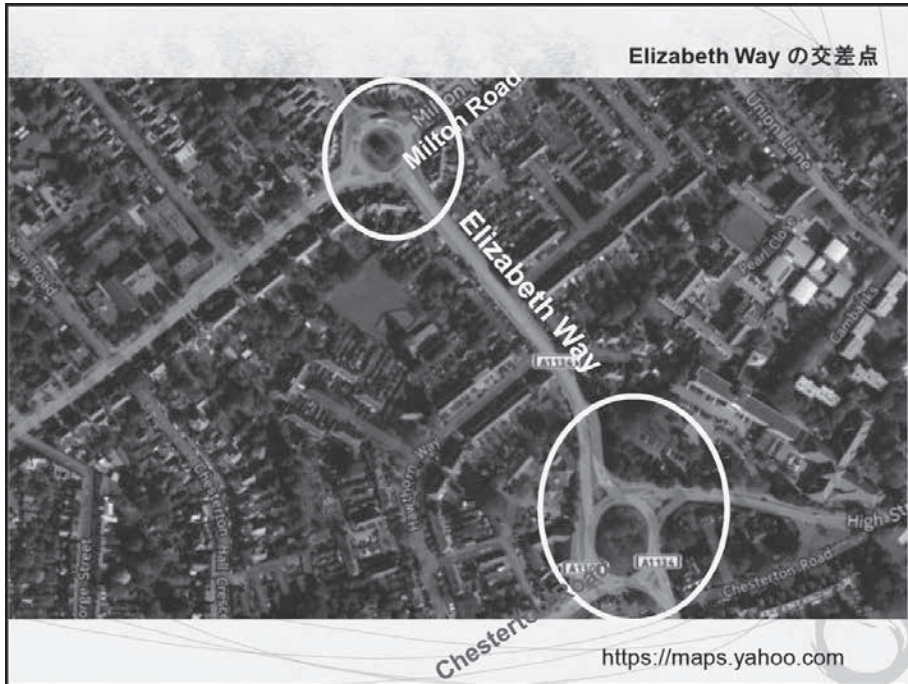
where

$f(x)$  is the p.d.f. for claims

and  $h(y)$  is the p.d.f. for the inter-arrival times.

28

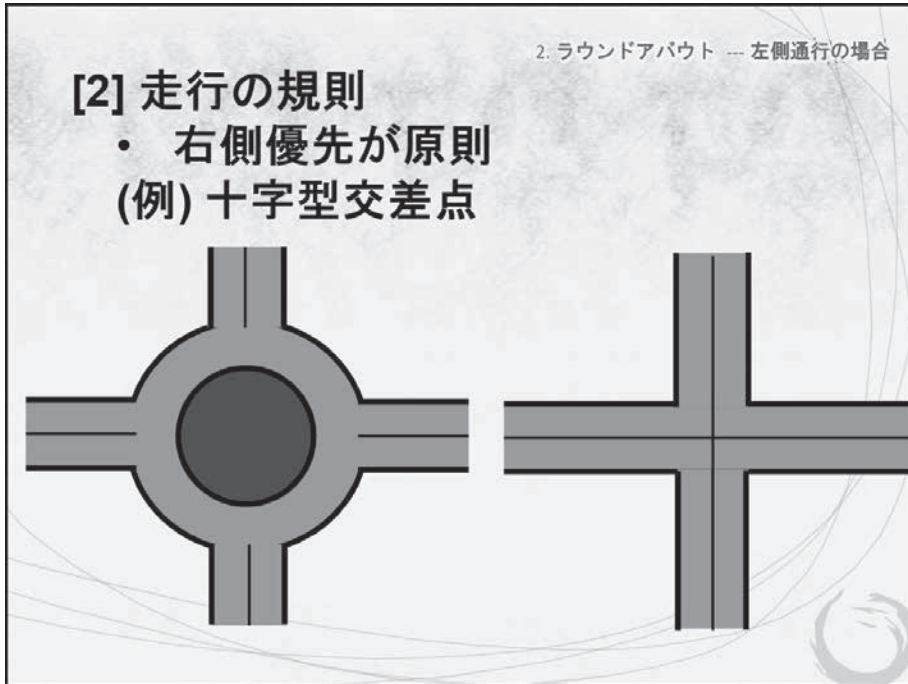
(資料1)



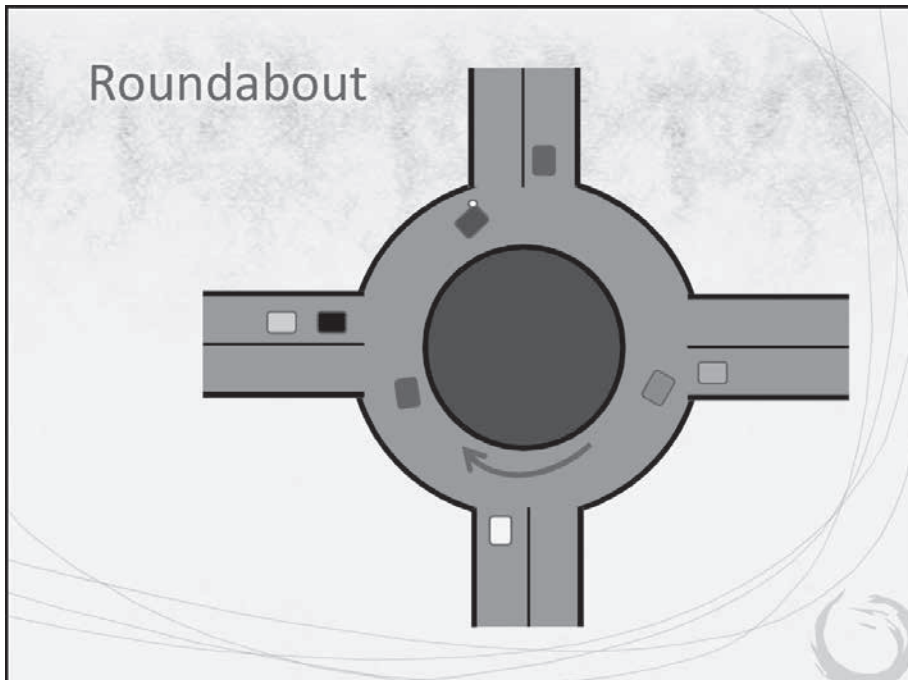
(資料2)



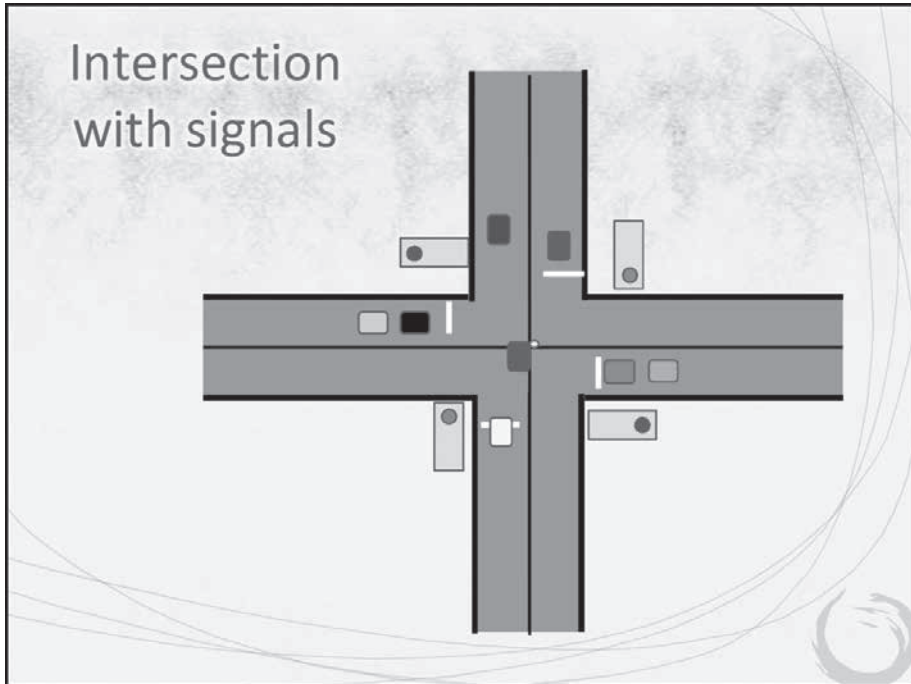
(資料3)



(資料4)



(資料5)



(資料6)

4 シミュレーションモデル

- 仮定 A;  
(到着過程)
  - $A_i(n)$  の取りうる値は 0 または 1
$$P[A_i(n) = 1] = \lambda_i,$$
$$P[A_i(n) = 0] = 1 - \lambda_i$$
 $\lambda_i$ ; 進入口  $i$  で単位時間あたりに新たな到着がある確率
- ◆  $L_i(n+1) = L_i(n) + A_i(n) - B_i(n)$



(資料7)

4 シミュレーションモデル

- 仮定 S;  
(ステージの状態)
  - $q'_i(n)$ ; ステージ  $i$  を走行中の車の数
  - $q_i(n)$ ; ステージ  $i$  からラウンドまたは退出する車の数, 0 または 1
  - $q_i(n) < C_i$ ; ステージ  $i$  の容量
  - $\zeta_i$ ;  $q_i(n)=1$  のもとでステージ  $i$  から  $i+1$  へラウンドする確率
  - $1-\zeta_i$ ; ステージ  $i$  から退出する確率

(資料8)

## 5. シミュレーション例

### ◆ 3ステージモデル

Newnham Road

The Fen Causeway

A1134

進退口 3

ステージ 2

サーステージ 3

ステージ 1

進退口 2

進退口 1

(資料9)

5 シミュレーション例

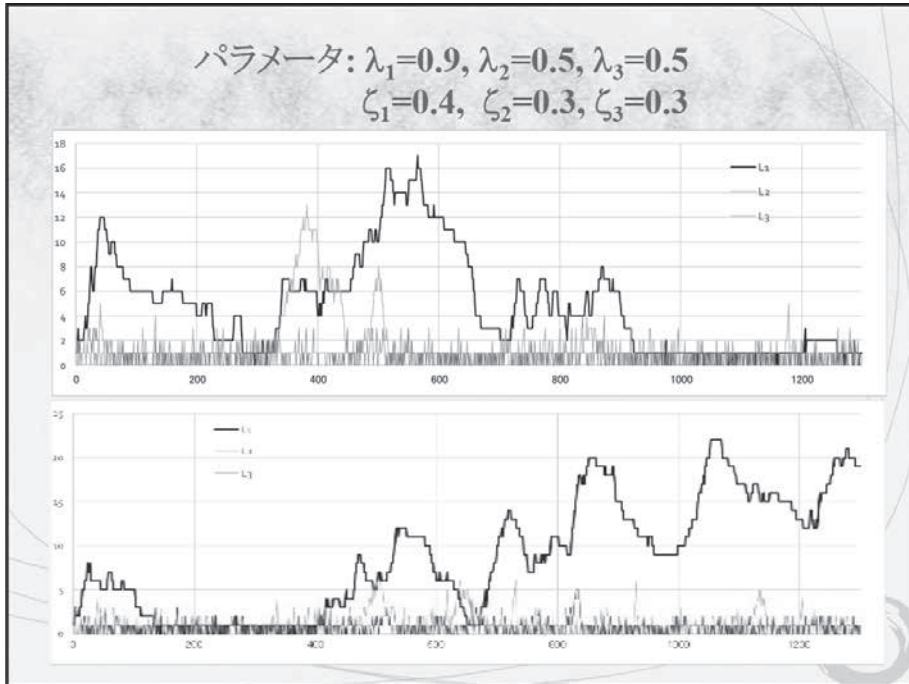
- 3 ステージモデル;  $K = 3$ 
  - パラメータ:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$
  - $q_i(n)$ ; ステージ  $i$  を走行中の車の数  
 $q'_i(n)$ ; ステージ  $i$  からラウンドまたは退出する車の数, 0 または 1  
 $q_i(n) < C_i$ ; ステージ  $i$  の容量
  - $\zeta_i$ ;  $q'_i(n)=1$  のもとでステージ  $i$  からラウンドする確率  
 $1-\eta_i$ ; ステージ  $i$  から退出する確率

(資料10)

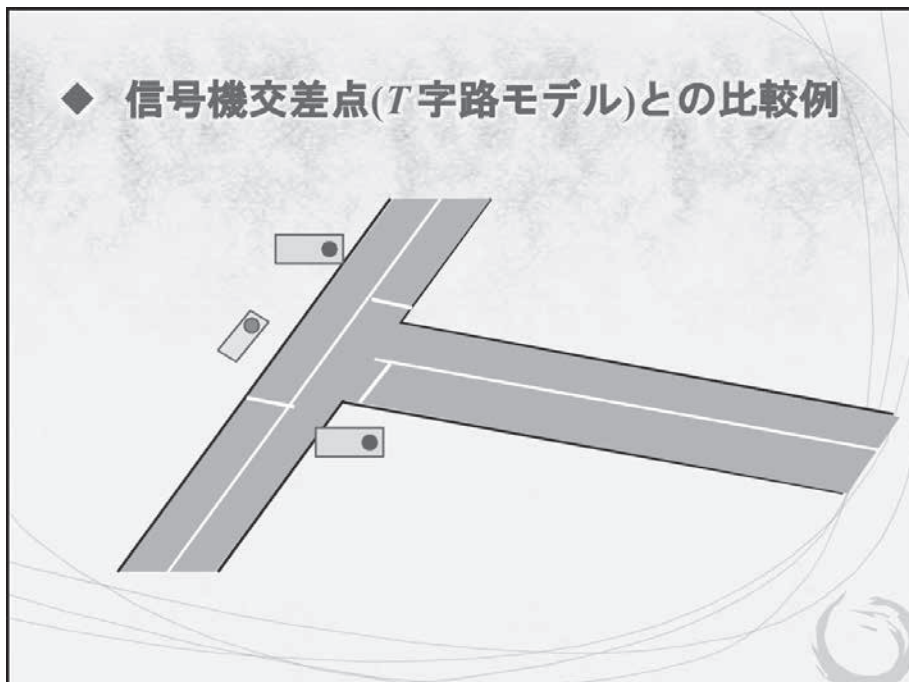
5. シミュレーション例

- 仮定 B; (ステージの進入)
  - $B_i(n) = 0$ ;  $i-1$  からラウンドがある場合  
または  $L_i(n-1)=0$  の場合  
= 1;  $i-1$  からラウンドがなく  
かつ  $L_i(n-1)=1$  の場合  
= 2;  $i-1$  からラウンドがなく  
かつ  $L_i(n-1)>1$  の場合

(資料11)



(資料12)



(資料13)

パラメータ:  $\lambda_1=0.9, \lambda_2=0.5, \lambda_3=0.5$   
 $\tau_1=40, \tau_2=\tau_3=20$

