Gibbs Sampler を用いたベイズ推定法による オプション評価の方法

三　井　秀　俊

I　はじめに

ボラティィリティ変動モデルを用いてオプション価格付けを分析[1]する場合には，大きく 2 つに分けて研究が行われている．1 つは，確率的分散変動モデル（Stochastic Volatility Model; 以下，SV モデル）[2]を用いる方法である．SV モデルはボラティィリティを観測されない変数として扱っているため，尤度を求めることが難しいなどの難点がある．したがって，SV モデルを用いたオプション価格に関する実証研究は非常に少ないのが現状である. SV モデルを利用したオプション評価の実証研究としては, Wiggins［1987］，Scott［1987］，Chesney / Scott［1989］，Melino / Turnbull［1990］，三井［1998］などがある．

もう 1 つは，Engle［1982］の ARCH（Autoregressive Conditional Heteroskedasticity）モデルとそれを一般化した Bollerslev［1986］の GARCH（Generalized-ARCH）モデルを用いることである[3]．これら ARCH 型モデルはファイナンス時系列の非線型性をうまく捉えるため多くの拡張をもたらし，また容易に推定することができるため，オプションの実証研究に対しても有用である．しかし，オプション理論に応用した実証研究は上記の SV モデルと同様に僅かしかない．ARCH 型モデルを利用したオプション価格付けの実証研究としては，Engle / Mustafa［1992］，Noh / Engle / Kane［1994］，Saez［1997］，Sabbatini / Linton［1998］，森保［1999］，三井［2000］，Duan / Zhang［2001］，三井・渡部［2003］などがある．

SV モデルや ARCH 型モデルのような非線形モデルの推定方法[4]としては，積率法（MM: Method of Moments),および MM を精緻化した一般化積率法（GMM: Generalized Method of Moments）と最尤法（ML: Maximum Likelihood method），および疑似最尤法（QML: Quasi-Maximum Likelihood method）がよく知られている．多くの研究では，SV モデルや ARCH 型モデルをこれらの推定法でパラメータの推定を行い，モンテカルロ・シミュレーションなどの数値解法でオプション価格を計算することが一般的であっ

1）　ファイナンス理論では，ボラティィリティは資産収益率の分散(または，標準偏差)により定義され，株式など将来の収益が不確定な危険資産のリスクの指標として用いられる．Black / Scholes［1973］モデルでは，行使日までボラティィリティは一定であるという仮定を前提にしてオプション価格の解を導出しているが, 現実にはボラティィリティは確率的に変動している. したがって，ボラティィリティが変動するモデルを定式化してオプション価格の分析を行う必要がある．詳しくは，三井［2001］，竹内［2003］参照.

2）　SV モデルの理論・実証研究とオプション評価への応用のサーベイ論文としては，Ghysels / Harvey / Renault［1996］，Shephard［1996］，渡部［2000，第 3 章］，三井［2002c］参照.

3）　ARCH 型モデルの理論•実証研究とオプション評価への応用のサーベイ論文としては，Bollerslev / Engle / Nelson［1994］, Shephard［1996］，渡部［2000，第 2 章］，三井［2002c］参照.

4）　ファイナンスの実証研究で用いられる古典的な計量分析の手法については Hamilton［1994］，Campbell / Lo / Mackinlay［1997］，Gourieroux / Jasiak［2001］参照.

た[5]．これらの推定法の問題点は，パラメータ推定に伴う誤差を考慮していないことである．また，SVモデルでは正確な尤度を評価することが困難などの問題がある．これらの問題を解決するため，最近のファイナンスの実証研究では，マルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC: Markov-chain Monte Carlo）[6]を用いたベイズ推定法（Bayes procedure）[7]を利用した研究が大幅に増加している．今後，オプション市場での実証研究に関しても，この方法は頻繁に用いられると思われる．代表的なマルコフ連鎖モンテカルロ法としては，Gibbs Sampler と Metropolis-Hastings アルゴリズム[8]の 2 つがある[9]．本論文では，Gibbs Sampler を用いたベイズ推定法によるオプション価格付け理論についてサーベイを行った．

本論文の以下の構成は次の通りである．第Ⅱ節では，Gibbs Sampler について，定義・完備化・収束の性質などの解説を行う．第Ⅲ節では，2 段階 Gibbs Sampler について解説を行う．第Ⅳ節では，Gibbs Sampler を用いたベイズ推定法について説明する．第Ⅴ節では，最初に SV モデルについて解説を行い，SV モデルの Gibbs Sampler を用いたベイズ推定法によるオプションの実証研究についてサーベイを行う．次に，ARCH 型モデルについて解説を行い，ARCH 型モデルの Gibbs Sampler を用いたベイズ推定法によるオプションの実証研究についてサーベイを行う．最後の第Ⅵ節では，簡単に今後の展望について述べる．

Ⅱ　Gibbs Sampler

2.1　定義

ある $p>1$ に対して，確率変数 $\mathrm{X}\in\chi$ は $\mathrm{X}=(X_1,\cdots,X_p)$ と書くことができる．ここで，X_i は一次元か多次元であると仮定し，χ は標本空間とする．更に，対応する一変量の条件付密度 $f_1,\cdots,f_p$，すなわち，

$$\mathrm{X_i}=x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_p\sim f_i(x_i|x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_p)$$

$i=1,2,\cdots,p$ をシミュレートすることができる．Gibbs Sampler（または，Gibbs Sampling アルゴリズム）は，$X^{(l)}$ から $X^{(l+1)}$ までの以下の推移により与えられる．

アルゴリズム 2.1　-The Gibbs Sampler-

Given　$X^{(l)}=\left(x_1^{(l)},\cdots,x_p^{(l)}\right)$, generate

$$1.\quad X_1^{(l+1)}\sim f_1(x_1|x_2^{(l)},\cdots,x_p^{(l)}),$$

5）数値解法によるオプション評価に関して詳しくは，湯前/鈴木［2000］，三井［2002c］参照.

6）MCMC に関して詳しくは，Casella / George［1992］, Gilks / Richardson / Spiegelhalter［1996］，Tanner［1996，Chapter 6］，Bauwens / Lubrano / Richard［1999］，Robert / Casella［1999］，渡部［2000，第 3 章］，丹後［2000，第 10 章］，Chib［2001］，大森［2001，2002］参照.

7）ベイズ統計学の経済学・計量経済学への応用について詳しくは，Zellner［1971］，鈴木・国友［1989］，繁桝［1995］，和合［1998］，渡部［2002］参照.

8）三井/渡部［2003］は，Tierney［1994］により提案された Acceptance-Rejection / Metropolis-Hastings（A-R / M-H）アルゴリズムを用いてオプション価格の評価を行っている．また，三井［2002a］では，この手法と QML 法とを用いてのオプション価格の比較を行っている．A-R / M-H に関して，詳しくは Tierney［1994］，Chib / Greenberg［1995］，渡部［2000，第 3 章］，渡部［2002］参照.

9）Jacquier / Polson / Rossi［1994］は MCMC を用いたベイズ推定法と GMM や QML とを比較し，MCMC が最も効率性が高いと結論づけている．

$$
\begin{aligned}
&2.\quad X_2^{(l+1)} \sim f_2(x_2|x_1^{(l+1)}, x_3^{(l)}, \cdots, x_p^{(l)}),\\
&\quad\vdots\\
&p.\quad X_p^{(l+1)} \sim f_p(x_p|x_1^{(l+1)}, \cdots, x_{p-1}^{(l+1)}).
\end{aligned}
$$

密度$f_1,\cdots,f_p$は，Full Conditionalsと呼ばれる．Gibbs Samplerの大きな特徴は，シミュレーションに用いる密度はこれらしかないことである．高次元の問題でも，シミュレーションは一変量のみであり，これがGibbs Samplerの利点となっている. Gibbs Samplerの他の特徴は, 次の通りである.（ⅰ）Gibbs Samplerの採択率は1である．収束判定はMetropolis-Hastingsアルゴリズムとは異なる.（ⅱ）Gibbs Samplerの利用は，条件付分布の解析的，確率的特性の事前の知識を必要とする.（ⅲ）Gibbs Samplerは多次元である.（ⅳ）Gibbs Samplerはパラメータの数が変化する問題の場合には適用できない.

2.2　完備化

Gibbs Samplingアルゴリズムは，完備化（completion）により一般化することができる.

定義 2.1　所与の確率密度fに対して，密度gが

$$\int_Z g(x,z)dz = f(x)$$

を満たすことをfの完備化と呼ぶ.

gのFull Conditionalsが容易にシミュレートすることができ，fの代わりにg上で**アルゴリズム 2.1**が実行されるような密度gを選択する．$p>1$に対して，$y=(x,z)$と記述し，以下によって$g=g(y_1,\cdots,y_p)$の条件付密度を表記する.

$$
\begin{aligned}
&Y_1|y_2,\cdots,y_p \sim g_1(y_1|y_2,\cdots,y_p),\\
&Y_2|y_1,y_3\cdots,y_p \sim g_2(y_2|y_1,y_3,\cdots,y_p),\\
&\vdots\\
&Y_p|y_1,\cdots,y_{p-1} \sim g_p(y_p|y_1,\cdots,y_{p-1}).
\end{aligned}
$$

$Y^{(l)}$から$Y^{(l+1)}$への推移は，以下の**アルゴリズム 2.2**のように定義される.

アルゴリズム 2.2　-Completion Gibbs Sampler-

Given $\left(y_1^{(l)},\cdots,y_p^{(l)}\right)$，simulate

$$
\begin{aligned}
&1.\quad Y_1^{(l+1)} \sim g_1(y_1|y_2^{(l)}, \cdots, y_p^{(l)}),\\
&2.\quad Y_2^{(l+1)} \sim g_2(y_2|y_1^{(l+1)}, y_3^{(l)}, \cdots, y_p^{(l)}),\\
&\quad\vdots\\
&p.\quad Y_p^{(l+1)} \sim g_p(y_p|y_1^{(l+1)}, \cdots, y_{p-1}^{(l+1)}).
\end{aligned}
$$

次に，Slice Sampler と呼ばれている一般的な Gibbs Sampler の変形をみる．Slice Sampler は，ほとんどの分布に対して適用でき，特殊な一様確率変数のシミュレーションに基づいている．$f(\theta)$ は積として書くことができる．

$$\prod_{i=1}^{k} f_i(\theta)$$

ここで，f は正の関数であり，密度である必要はなく，f は，

$$\prod_{i=1}^{k} I_{0\leq\omega_i\leq f_i(\theta)}$$

の中に完備化することができ，以下の**アルゴリズム 2.3** を導く．

アルゴリズム 2.3　-Slice Sampler-

Simulate

$$\begin{array}{ll}
1. & \omega_1^{(l+1)} \sim \mathcal{U}_{[0,f_1(\theta^{(l)})]}, \\
 & \vdots \\
k. & \omega_k^{(l+1)} \sim \mathcal{U}_{[0,f_k(\theta^{(l)})]}, \\
k+1. & \theta^{(l+1)} \sim \mathcal{U}_{A^{(l+1)}}, \qquad with \quad A^{(l+1)} = \{y; f_i(y) \geq \omega_i^{(l+1)},\ i=1,\cdots,k\}.
\end{array}$$

ここで，$\mathcal{U}_{[\cdot,\cdot]}$ は一様分布を表す．

2.3　収束の性質

ここでは，Gibbs Sampler の収束の性質について概観する．Gibbs Sampler は，最小の条件としてエルゴート性（ergodicity）を必要とする．一般的な Gibbs Sampler である**アルゴリズム 2.2** では，マルコフ連鎖[10]（$Y^{(l)}$）が分布 g に収束し，部分連鎖（subchain）（$X^{(l)}$）が分布 f に収束することを示す．データ拡大（Data Augmentation）[11] 以外では，（$Y^{(l)}$）はマルコフ連鎖であるが，（$X^{(l)}$）はマルコフ連鎖とはならない．

定理 2.1　アルゴリズム 2.2 の *Gibbs Sampler* に対して，（$Y^{(l)}$）がエルゴート的（*ergodic*）であるならば，g の分布は，連鎖（$Y^{(l)}$）に対して定常分布（*stationary distribution*）であり，f は部分連鎖（$X^{(l)}$）の極限分布（*limiting distribution*）である．

10）マルコフ連鎖 X とは，離散時点における過程（$X_0, X_1, \cdots, X_{p-1}$）が，

$$Pr(X_p \in \Xi | X_0, X_1, \cdots, X_{p-1}) = Pr(X_p \in \Xi | X_{p-1})$$

を全ての集合について満たす確率過程である．

11）詳しくは，Tanner［1996, Chapter 5］参照．

Gibbs Sampler によって生成されるマルコフ連鎖の既約性（irreducibility）[12] を考える．Gibbs マルコフ連鎖の既約性の十分条件は，以下の条件である．

定義 2.2 Y_i の周辺分布を $g^{(i)}$ と表記し，$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_p)\sim g(y_1,\cdots,y_p)$ とする．$i=1,\cdots,p$ に対して $g^{(i)}(y_1)>0$ が $g(y_1,\cdots,y_p)>0$ を意味するならば，g は正値性条件（*positivity condition*）を満たす．

定理 2.2　アルゴリズム 2.2 の *Gibbs Sampler* に対して，密度 g が正値性条件を満たすならば，既約（*irreducible*）である．

定理 2.2 の条件を確かめることは難しく，Tierney［1994］は代わりに扱いやすい条件を与えている．以下の補題で示す．

補題 2.1　アルゴリズム 2.2 に結合した推移核（*transition kernel*）が支配測度に関して絶対連続ならば，結果として生じる連鎖は *Harris* 再帰的（*Harris recurrent*）[13] である．

定理 2.3 *GibbsSampling* マルコフ連鎖（$Y^{(l)}$）の推移核が支配測度に関して絶対連続であると仮定する．

(*i*) $h_1,h_2\in L^{(1)}(g),\int h_2(y)dg(y)\neq 0$ ならば，

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\sum_{t=1}^{T}h_1(Y^{(l)})}{\sum_{t=1}^{T}h_2(Y^{(l)})}=\frac{\int h_1(y)dg(y)}{\int h_2(y)dg(y)}\quad a.e.\ g$$

である [14]．

(*ii*) （$Y^{(l)}$）が非周期的（*aperiodic*）[15] ならば，すべての初期分布（*initial distribution*）μ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\int K^n(y,\cdot)\mu(dx)-g\right\|_{TV}=0$$

である [16]．

補題 2.2 $\mathrm{y}=(y_1,\cdots,y_p)$，$\mathrm{y}'=(y_1',\cdots,y_p')$ として，$\mathrm{y},\mathrm{y}'\in supp(g),|\mathrm{y}-\mathrm{y}'|<\delta$ に対して，$\delta>0$ の存在と

$$g_i(y_i|y_1,\cdots,y_{i-1},y_{i+1}',\cdots,y_p')>0,\quad i=1,\cdots,p$$

を仮定する．2 つの連続な球正量の共通部分の測度を持つ半径 δ' を有限な球の数列によって結合することができる殆どすべての組 $(\mathrm{y},\mathrm{y}')\in supp(g)$ に対して $\delta<\delta'$ が存在するならば，**アルゴリズム 2.2** によって生成される連鎖は既約であり，非周期的である．

系 2.1 *Gibbs Sampling* マルコフ連鎖（$Y^{(l)}$）が**補題 2.2** の仮定を満たす条件付密度

$$g_i(y_i|y_1,\cdots,y_{i-1},y_{i+1}',\cdots,y_p')$$

を持つならば，**定理 2.3** の結論は成立する．

12）状態空間のどこからスタートしても，何回か反復する内にどこにでも到着することができるという性質．

13）状態空間のどこからスタートしても，確率 1 で再び元の場所に無限回戻ってくるという性質．

14）a.e.は，「殆どいたるところ」(almost everywhere)を表す．

15）特定の場所ばかりからサンプリングしてしまうことが無いということ．

16）$\|\cdot\|_{TV}$ は，全変動ノルム（Total Variation norm）を表す．

2.4　Gibbs Sampling と Metropolis-Hastings との関係

ここでは，Gibbs Sampler と Metropolis-Hastings アルゴリズム[17] との関係について考察する．

定理 2.4　アルゴリズム 2.2 の *Gibbs Sampling* の手法は，受容率が 1 の p 結合の *Metropolis-Hastings* アルゴリズムと同値である．

Gibbs Sampling と Metropolis-Hastings アルゴリズムとの比較は, 先験的には Gibbs Sampling の方が有利であると思われる．Gibbs Sampling は真の分布 f から条件付分布を導出しているが，Metropolis-Hastings は真の分布 f の近似を基にしているからである．これらのアルゴリズムを形式的に比較することは可能であるが，これら代表的な 2 つの MCMC アルゴリズムを順位付けすることは非現実的であり，無意味なことである．Metropolis-Hastings アルゴリズムの欠点は，Gibbs Sampler の欠点とは異なる．Tierney［1994］は両方のアルゴリズムの利点を取り上げ，Metropolis-Hastings アルゴリズムと Gibbs Sampler の両方を用いた以下のような hybrid 接近法を考案した．

アルゴリズム 2.5　-Hybrid MCMC-

For $i = 1, \cdots, p$, **given** $\left(y_1^{(l+1)}, \cdots, y_{i-1}^{(l+1)}, y_i^{(l)}, \cdots, y_p^{(l)}\right)$,

1. **Simulate** $\tilde{y}_i \sim q_i(y_i | y_1^{(l+1)}, \cdots, y_i^{(l)}, y_{i+1}^{(l)}, \cdots, y_p^{(l)})$
2. **Take** $y_i^{(l+1)} = \begin{cases} y_i^{(l)} & \text{with probability } 1-\varphi, \\ \tilde{y}_i & \text{with probability } \varphi, \end{cases}$

   where

$$\varphi = 1 \wedge 1 \left\{ \frac{g_i(\tilde{y}_i | y_1^{(l+1)}, \cdots, y_{i-1}^{(l+1)}, y_{i+1}^{(l)}, \cdots, y_p^{(l)})}{q_i(\tilde{y}_i | y_1^{(l+1)}, \cdots, y_{i-1}^{(l+1)}, y_i^{(l)}, y_{i+1}^{(l)}, \cdots, y_p^{(l)})} \Big/ \frac{g_i(y_i^{(l)} | y_1^{(l+1)}, \cdots, y_{i-1}^{(l+1)}, y_{i+1}^{(l)}, \cdots, y_p^{(l)})}{q_i(y_i^{(l)} | y_1^{(l+1)}, \cdots, y_{i-1}^{(l+1)}, \tilde{y}_i, y_{i+1}^{(l)}, \cdots, y_p^{(l)})} \right\}$$

ここで，$a \wedge b$ は a と b との最小値を表す．

2.5　Hammersley-Clifford の定理

Gibbs Sampler の興味深い特徴は，条件付分布 $g_i(y_i | y_j \neq i)$ が g からサンプルを行うための十分な情報を含んでいることである．周辺分布 $g^{(i)}$ の集合では Full Conditional Distribution は完全に同時密度 $g(y)$ を要約できる（周辺分布 $g^{(i)}$ の集合では不可）．以下の結果は，同時分布が条件付分布から導出されることを示している．

定理 2.5　条件付密度 g_1 と g_2 とを結合した同時分布は，密度

17）Metropolis-Hastings アルゴリズムは，以下の推移により与えられる．

アルゴリズム 2.4　-Metropolis-Hastings-

1. **Generate** $Y_t \sim q(y | x^{(l)})$
2. **Take** $X^{(l+1)} = \begin{cases} Y_t & \text{with probability } \varphi(x^{(l)}, Y_t), \\ x^{(l)} & \text{with probability } 1-\varphi(x^{(l)}, Y_t), \end{cases}$

   where

$$\varphi(x, y) = min \left\{ \frac{f(y)}{f(x)} \frac{q(x|y)}{q(y|x)}, 1 \right\}.$$

ここで，q は，提案された分布（proposal distribution）を表す．詳しくは，Chib / Greenberg［1995］，Tanner［1996, Section 6.5］，Robert / Casella［1999, Chapter 6］参照.

$$g(y_1,y_2)=\frac{g_2(y_2|y_1)}{\int g_2(v|y_1)/g_1(y_1|v)dv}$$

を持つ．

$p>2$ の一般的なケースは，Hammersley-Cliffordの定理として知られている．任意の p について**定理 2.5**を拡張するためには，正値性の条件を必要とする．

定理 2.6　Hammersley-Clifford

正値性条件の下で，同時分布 g は，$\{1,2,\cdots,p\}$ 上のすべての順列 l と，すべての $y\in\mathcal{Y}$ に対して，

$$g(y_1,\cdots,y_p)\propto\prod_{j=1}^{p}\frac{g_{l_j}(y_{l_j}|y_{l_1},\cdots,y_{l_{j-1}},y'_{l_{j+1}},\cdots,y'_{l_p})}{g_{l_j}(y'_{l_j}|y_{l_1},\cdots,y_{l_{j-1}},y'_{l_{j+1}},\cdots,y'_{l_p})}$$

を満たす．

2.6　階層的構造

階層的モデル（Hierarchical Models）は，分布 f を構造上，あるいは計算上の理由のため，以下のように分解することである．

$$f(x)=\int f_1(x|z_1)f_2(z_1|z_2)\cdots f_I(z_I|z_{I+1})f_{I+1}(z_{I+1})dz_1\cdots dz_{I+1}$$

このようなモデルは，事前情報の多様性や観測結果の散らばり具合などの複雑なモデルのベイズ分析に用いられる．

Ⅲ　2段階 Gibbs Sampler

3.1　双対確率構造

データ拡大の手法は，$g_1(y_1|y_2)$ と $g_2(y_2|y_1)$ が両方共に利用可能であるような f が g の中で，X が $y=\ln(y_1,y_2)$ の中で完備化される**アルゴリズム 2.2**の場合に対応する．

アルゴリズム 3.1　-Data Augmentation-

Given $y^{(l)}$,

1. **Simulate** $Y_1^{(l+1)}\sim g_1(y_1|y_2^{(l)})$,
2. **Simulate** $Y_2^{(l+1)}\sim g_2(y_2|y_1^{(l+1)})$.

補題 3.1　アルゴリズム 3.1によって生成される系列 $Y_1^{(l)}$ と $Y_2^{(l)}$ は各々，定常分布

$$g^{(2)}(y_1)=\int g(y_1,y_2)dy_2\quad and\quad g^{(1)}(y_2)=\int g(y_1,y_2)dy_1$$

に対応するマルコフ連鎖である．g 上の正値制約が成立するならば，両方の連鎖とも強既約（*strongly irreducible*）である．

3.2　可逆と Interleaving 連鎖

2段階の Gibbs Sampler あるいは，データ拡大は，強い構造上の性質を持つ．2つの連鎖，$X^{(l)}$ と $Y^{(l)}$ は Interleaving と呼ばれる双対性（duality）の性質を満たし，この性質はデータ拡大の特徴である．

定義 3.1　マルコフ連鎖（$X^{(l)}$）と（$Y^{(l)}$）は，

(ⅰ) $X^{(l)}$ と $X^{(l+1)}$ は $Y^{(l)}$ に対して条件付で独立である;

(ⅱ) $Y^{(t-1)}$ と $Y^{(l)}$ は $X^{(l)}$ に対して条件付で独立である;

(ⅲ) $(X^{(l)},Y^{(l+1)})$ と $(X^{(l)},Y^{(l)})$ は定常性の下で同一に分布する;

ならば，*Interleaving property* な互いに共役（*conjugate*）となる．

補題 3.2　データ拡大によって生成された各々の連鎖（$X^{(l)}$）と（$Y^{(l)}$）は可逆（*reversible*）であり，連鎖 $(X^{(l)},Y^{(l)})$ は *Interleaving property* を満たす．

全体の連鎖 $(X^{(l)},Y^{(l)})$ は可逆であり，**アルゴリズム 3.1** で必要である．

アルゴリズム 3.2　-Reversible Data Augmentation-

Given $y_2^{(l)}$,

$$
\begin{aligned}
&1.\quad \textbf{Simulate}\ \ W \sim g_1(w|y_2),\\
&2.\quad \textbf{Simulate}\ \ Y_2^{(l+1)} \sim g_2(y_2|w),\\
&3.\quad \textbf{Simulate}\ \ Y_1^{(l+1)} \sim g_1(y_1|y_2^{(l+1)}).
\end{aligned}
$$

Gibbs Sampler **アルゴリズム 2.2** は，Systematic scan である Gibbs Sampler とも呼ばれる．以下のアルゴリズムは連鎖（$X^{(l)}$）の可逆性（reversibility）を保証する．

アルゴリズム 3.3　-Reversible Gibbs Sampler-

Given $(y_1^{(l)},\cdots,y_p^{(l)})$, generate

$$
\begin{array}{rl}
1. & Y_1^* \sim g_1(y_1|y_2^{(l)},\cdots,y_p^{(l)}),\\
2. & Y_2^* \sim g_2(y_2|y_1^*,y_3^{(l)},\cdots,y_p^{(l)}),\\
 & \vdots\\
p-1. & Y_{p-1}^* \sim g_{p-1}(y_{p-1}|y_1^*,\cdots,y_{p-2}^*,y_p^{(l)}),\\
p. & Y_p^{(l+1)} \sim g_p(y_p|y_1^*,\cdots,y_{p-1}^*),\\
p+1. & Y_{p-1}^{(l+1)} \sim g_{p-1}(y_{p-1}|y_1^*,\cdots,y_{p-2}^*,y_p^{(l+1)}),\\
 & \vdots\\
2p-1. & Y_1^{(l+1)} \sim g_1(y_1|y_2^{(l+1)},\cdots,y_p^{(l+1)}).
\end{array}
$$

アルゴリズム 2.2 に対して**アルゴリズム 3.4** の修正は定常分布 g を持つ可逆連鎖を生成し，すべてのシミュレートされた値を用いる．

アルゴリズム 3.4　-Random Sweep Gibbs Sampler-

$$
\begin{array}{rl}
1. & \textbf{Generate a permutation } \sigma \in \mathcal{G}_p, \\
2. & \textbf{Simulate } Y_{\sigma_1}^{(l+1)} \sim g_{\sigma_1}(y_{\sigma_1} | y_j^{(l)},\ j \neq \sigma_1), \\
 & \vdots \\
p+1. & \textbf{Simulate } Y_{\sigma_p}^{(l+1)} \sim g_{\sigma_p}(y_{\sigma_p} | y_j^{(l)},\ j \neq \sigma_p).
\end{array}
$$

このアルゴリズムは，**アルゴリズム 3.3** を改善したものであり，2 つの内の 1 つのシミュレーションだけ使用する．

3. 3　双対性原理

定理 3.1　マルコフ連鎖（$X^{(l)}$）と以下の条件付分布から生成される確率変数の系列（$Y^{(l)}$）を考える．

$$X^{(l)}|y^{(l)} \sim \pi(x|y^{(l)}),\quad Y^{t+1}|x^{(l)}, y^{(l)} \sim f(y|x^{(l)}, y^{(l)}).$$

連鎖（$Y^{(l)}$）がエルゴート的であり，$\pi_{y(0)}^t$ が初期値 $y^{(0)}$ と結合した（$X^{(l)}$）の分布を表記するならば，t を無限大にしたとき，ノルム $\| \pi_{y^{(0)}}^t - \pi \|_{TV}$ は 0 になる．

定理 3.2　（$Y^{(l)}$）が

$$P(Y^{(l+1)} = k|y^{(l)}, x) > 0,\quad \forall k \in \mathcal{Y},\ \forall x \in \mathcal{X}$$

のような状態空間 Z での有限状態空間マルコフ連鎖ならば，推移 $\pi(x \,|\, y^{(l)})$ によって（$Y^{(l)}$）から導出された（$X^{(l)}$）は一様エルゴート的（*uniformly ergodic*）である．

この収束結果は，推移 $\pi(x \,|\, y)$ には制約を課していないことに注意する必要がある

系 3.1　2 つの *Interleaved* マルコフ連鎖 $(X^{(l)}), (Y^{(l)})$ に対して（$X^{(l)}$）がエルゴート的ならば，（$Y^{(l)}$）はエルゴート的である．

最後に，収束率の問題に戻る．

命題 3.1　（$Y^{(l)}$）がコンパクト状態空間で収束率 φ を持つ幾何収束（*geometrically convergent*）であるならば，$y^{(0)} \in \mathcal{Y}$ で一様にすべての関数 $h \in \mathcal{L}_1(\pi(\cdot \,|\, x))$ に対して

$$\left|\left|\mathbf{E}[h(X^{(l)})|y^{(0)}] - \mathbf{E}^{\pi}[h(X)]\right|\right| < C_h \varphi^t$$

のような C_h が存在する．

Ⅳ　Gibbs Samplerを用いたベイズ推定法

4. 1　ベイズ推定法

未知のパラメータ集合を θ とし，θ に関する事前分布（prior distribution）を $f(\theta)$ とする．ベイズ推定法では，データ（data）を入手する前の事前分布 $f(\theta)$ が，データ入手後，どのような事後分布（posterior distribution） $f(\theta\,|\,data)$ に代わるかを考える [18]．事後分布 $f(\theta\,|\,data)$ はベイズの定理より以下のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} f(\theta|data) &= \frac{f(\theta, data)}{f(data)} \\ &= \frac{f(\theta, data)}{\int f(\theta, data)d\theta} \\ &= \frac{f(data|\theta)f(\theta)}{\int f(data|\theta)f(\theta)d\theta} \end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで， $\int f(data\,|\,\theta)f(\theta)d\theta$ は， θ に依存しない基準化定数なので無視することができる．したがって，

$$f(\theta|data) \propto f(data|\theta)f(\theta) \tag{4.2}$$

と表すことができる．ここで， $f(\theta\,|\,data)$ は尤度を表す．このときパラメータ θ の推定値は，事後分布の期待値（事後平均），

$$E[f(\theta|data)] = \int \theta(\theta|data)d\theta \tag{4.3}$$

として求めることができる．

4.2　Gibbs Sampler

事後分布がベイズの定理により解析的に求めることが出来ない場合には，事後分布 $f(\theta\,|\,data)$ からパラメータ θ をサンプリングして求める方法がある [19]. このような場合に用いられる代表的な方法として，第Ⅱ節で説明した Gibbs Sampler がある．適当な初期値 $(\theta_1^{(0)},\theta_2^{(0)},\cdots,\theta_p^{(0)})$ から始め，以下のようなサンプリングを繰り返し行う．

1. $\theta_1^{(1)}$ は， $f(\theta_1\,|\,\theta_2^{(0)},\theta_3^{(0)},\cdots,\theta_p^{(0)},data)$ からサンプリングを行う．
2. $\theta_2^{(1)}$ は， $f(\theta_2\,|\,\theta_1^{(1)},\theta_3^{(0)},\cdots,\theta_p^{(0)},data)$ からサンプリングを行う．

⋮

p. $\theta_1^{(p)}$ は， $f(\theta_p\,|\,\theta_1^{(l)},\theta_2^{(l)},\cdots,\theta_{p-1}^{(l)},data)$ からサンプリングを行う．

$l \to \infty$ とすると $(\theta_1^{(l)},\theta_2^{(l)},\cdots,\theta_p^{(l)}\,|\,data)$ は，同時事後分布 $f(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p\,|\,data)$ に分布収束する．したがって， $f(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)$ の事後平均は，

$$E[f(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)] = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} f(\theta_1^{(l)},\theta_2^{(l)},\cdots,\theta_p^{(l)}). \tag{4.4}$$

として推定することができる．

18）パラメータ θ も確率変数として考える．

19）経済学・ファイナンスで用いられるモデル（特に，非線形モデル）の場合，事後分布が解析的に求めることができないケースがほとんである．

収束の判定を行うには，サンプル系列の前半の値と後半の値を比較し検定を行えばよい[20]．サンプルの内のパラメータの i 番目のサンプルを $\theta^{(i)}$ とし，前半と後半の平均値をそれぞれ $\bar{\theta}_A = \frac{1}{N_A}\sum_{i=1}^{N_A}\theta^{(i)}$，$\bar{\theta}_B = \frac{1}{N_B}\sum_{i=N-N_B+1}^{N}\theta^{(i)}$ とおく．これらの値を用いて，以下のような CD（Convergence Diagnostics）統計量を計算する．

$$\mathrm{CD} = \frac{\bar{\theta}_A - \bar{\theta}_B}{\sqrt{\hat{\sigma}_A^2/N_A + \hat{\sigma}_B^2/N_B}} \tag{4.5}$$

ここで，$\sqrt{\hat{\sigma}_A^2/N_A}$ と $\sqrt{\hat{\sigma}_B^2/N_B}$ は，$\bar{\theta}_A$ と $\bar{\theta}_B$ の標準誤差を表す．$\theta^{(i)}$ の系列が定常ならば，漸近的に標準正規分布に収束する．収束の判定は，上記の CD 統計量を用いて検定を行えばよい．

V　オプション評価への応用

この節では，SV モデルと ARCH 型モデルとの Gibbs Sampler を用いたベイズ推定法を利用したオプションの実証研究についてサーベイを行う．これらの実証研究の内容は，表1に纏められている．

表1　Gibbs Samplerを用いたベイズ推定法によるオプション評価の実証研究

著者	原資産	データ期間*	ボラティリティ過程
Watanabe［1997］	Nikkei 225	1994.1-1995.12	SV
Mahieu / Schotman［1998］	4種類の通貨**	1973.1-1994.2	SV
Bauwens / Lubrano［1998］	Brussels index	1986.1-1996.1	GARCH, GJR
Bauwens / Lubrano［2002］	Brussels index	1993.11-1996.1	GARCH, GJR, STR

*データ期間はオプション・データの期間を表す．
**米ドル，英ポンド，円，ドイツ・マルク．

5.1　SV モデル

原資産価格 S が対数正規に分布し，原資産価格 S の変動過程が以下の幾何ブラウン運動モデルで記述されるとする．

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz_1 \tag{5.1}$$

ここで，μ はドリフト項，dt は時間の微小変化，σ は標準偏差，dz_1 はウィナー過程を表す．SV モデルの研究の多くは，ボラティリティ σ^2 の変動が Ornstein-Uhlenbeck 過程のような平均回帰性を持つ以下のような確率過程によって定式化している．

$$d\sigma^2 = \kappa[\theta^* - \sigma^2]dt + \delta\sigma dz_2 \tag{5.2}$$

ここで，ウィナー過程 dz_2 は（5.1）式の dz_1 と相関 ρ を持つと仮定する．ボラティリティは，平均回帰の速度が κ によって決定される長期の平均 θ^* に向かって動く．したがって，平均ボラティリティ θ^* が上昇するとオプション価格も上昇する．平均回帰が正ならば，ボラティリティは平均 θ^* の定常状態の分

20）詳しくは，Geweke［1992］参照．

布を持つ．そのため，長期における原資産の収益はθ^*によって与えられる時間あたりのボラティリティを伴う漸近的な正規分布を持つ．

実証研究を行うためには，連続時間モデル（5.1），（5.2）式を離散時間モデルに変換しなくてはならない．（5.1），（5.2）式を離散時間モデルに近似すると

$$\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} = \mu + u_t\sigma_t \tag{5.3}$$

$$\ln\sigma_{t+1}^2 = \alpha + \beta\ln\sigma_t^2 + \eta_t \tag{5.4}$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}\right)$$

となる．ここで，u_t，η_t は過去と独立で同一な（*i.i.d.*: independently and identically distributed）標準正規分布に従い，u_t と η_t とは相関 ρ を持つと仮定する[21]．簡単化のため，$(\ln S_t / S_{t-1} - \mu) \equiv R_t$，$\psi^2\exp(h_t) \equiv \sigma_t^2$，$u_t$ と η_t とは無相関$(\rho = 0)$とすると（5.3），（5.4）式は以下のように書き換えられる．

$$R_t = \psi\exp\left(\frac{h_t}{2}\right)u_t \tag{5.5}$$

$$h_{t+1} = \phi h_t + \eta_t \tag{5.6}$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}\right)$$

ここで，φ はスケール・パラメータ（scale parameter）を表す．多くの実証研究では，（5.5），（5.6）式で記述される SV モデルが用いられている．

5.2　SV オプションへの応用

Watanabe［1997］は，Gibbs Sampler の手法を利用したベイズ推定法を 5.1 節の（5.5），（5.6）式に用いてオプション価格付けに適用している．未知のパラメータ集合$\theta=(\phi,\psi,\sigma_\eta^2)$とする．このとき条件付分布は，データ系列を$\{R_s\}_{s=1}^t$とすると，$f(\phi \mid \psi,\sigma_\eta^2,\{R_s\}_{s=1}^t)$，$f(\psi \mid \phi,\sigma_\eta^2,\{R_s\}_{s=1}^t)$，$f(\sigma_\eta^2 \mid \phi,\psi,\{R_s\}_{s=1}^t)$となる．しかし，これらの条件付分布は求めることができない．そこで，$\{h_s\}_{s=1}^t$も未知パラメータとし，$\theta = (\phi,\psi,\sigma_\eta^2,\{h_s\}_{s=1}^t)$とすると条件付分布は以下のようになり，求めることができる．

1. $f(\phi|\psi,\sigma_\eta^2,\{h_s\}_{s=1}^t,\{R_s\}_{s=1}^t)$
2. $f(\psi|\phi,\sigma_\eta^2,\{h_s\}_{s=1}^t,\{R_s\}_{s=1}^t)$
3. $f(\sigma_\eta^2|\phi,\psi,\{h_s\}_{s=1}^t,\{R_s\}_{s=1}^t)$
4. $f(h_s|\phi,\psi,\sigma_\eta^2,\{h_s\}_{t\neq s},\{R_s\}_{s=1}^t),\quad s=1,\cdots,t$

t 時点でのオプション価格を推定する際には，$\{R_s\}_{s=t+1}^T$ と $\{h_s\}_{s=t+1}^T$ も未知のパラメータに含め，$\theta = (\phi,\psi,\sigma_\eta^2,\{h_s\}_{s=1}^T,\{R_s\}_{s=1}^T)$として考えれば良い．

21）u_t と μ_t とが相関 ρ を持つ場合の QML 推定とオプション評価への応用に関しては，三井［1998］参照．

1. $f(\phi|\psi, \sigma_\eta^2, \{h_s\}_{s=1}^T, \{R_s\}_{s=1}^T)$
2. $f(\psi|\phi, \sigma_\eta^2, \{h_s\}_{s=1}^T, \{R_s\}_{s=1}^T)$
3. $f(\sigma_\eta^2|\phi, \psi, \{h_s\}_{s=1}^T, \{R_s\}_{s=1}^T)$
4. $f(h_s|\phi, \psi, \sigma_\eta^2, \{h_s\}_{t\neq s}, \{R_s\}_{s=1}^T), \quad s = 1, \cdots, t$
5. $f(R_s|\phi, \psi, \sigma_\eta^2, \{h_s\}_{s=1}^T, \{R_s\}_{t\neq s}), \quad s = t+1, \cdots, T$

上記のモデルに従い，$\{R_{t+1}, \cdots R_T\}$を計算する．計算された$\{R_{t+1}, \cdots R_T\}$を以下のように満期日での原資産価格に変換する．

$$S_T = S_t \exp\left(\sum_{s=t+1}^{T} R_s\right) \tag{5.7}$$

このとき投資家のリスク中立性を仮定すると，時点tでの権利行使価格Kのヨーロピアン・コール・オプションは割引現在価値を平均することにより以下のように評価することができる．

$$C_t^{(SV,GS)} = e^{-(T-t)r}\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\mathrm{Max}(0, S_T^{(l)} - K) \tag{5.8}$$

ここで，rは安全資産利子率を表す．ここでは，日経225オプションのデータを用いて実証研究を行っている．Gibbs Samplerを利用したベイズ推定法によるオプション価格は，Black-Scholesモデル[22]と比較して優れているという結果を得ている．

Mahieu / Schotman［1998］は以下のような単純なSVモデルを用いて，（ⅰ）Harvey / Ruiz / Shephard［1994］の提案したカルマンフィルターを利用したQML，（ⅱ）Simulated Estimation and Maximization (SIEM)[23]，（ⅲ）MCMCを用いたベイズ推定法，の3つの推定量の効率性の比較を行っている．

$$R_t^{通貨} = \psi \exp\left(\frac{h_t}{2}\right)u_t \tag{5.9}$$

$$h_t = \beta h_{t-1} + \eta_t \tag{5.10}$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}\right).$$

22）ヨーロピアン・コール・オプション価格C_t^{BS}とヨーロピアン・プット・オプション価格P_t^{BS}は，以下のBlack-Scholesモデルで与えられる．

$$\begin{aligned} C_t^{BS} &= S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \\ P_t^{BS} &= -S_t N(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

ここで，$N(\cdot)$は標準正規分布の分布関数を表す．

23）詳しくは，Tanner［1996, Chapter 4］，Shephard［1996］，Mahieu / Schotman［1998, Appendix］参照．

ここで，$R_t^{通貨}$ は2国間の為替レートの収益率，$\psi^2 \exp(h_t) \equiv \sigma_t^2$ は収益率 $R_t^{通貨}$ の分散を表し，u_t，η_t は過去と独立で同一な標準正規分布に従い，u_t と η_t とは無相関であると仮定する．（5.9）式を $y_t \equiv \ln R_t^2$ として線形の形に書き直すと，

$$y_t = \beta + h_t + \xi_t, \quad \xi_t \sim i.i.d.N(-1.2704, \sigma_\xi^2) \tag{5.11}$$

ここで，$\beta = \ln \psi^2$，$\xi = \ln u_t^2$ とする．（ｉ）$\sigma_\xi^2 = \pi^2/2$ とした場合の QML 推定量を`QML1'，$\sigma_\xi^2$ に制約をおかない場合の QML 推定量を`QML2', とする．また ξ_t の分布 $f(\xi_t)$ が以下のような混合モデル（mixture model）で表されるとする．

$$f(\xi_t) = \sum_{i=1}^{3} p_i N(\mu_i, \sigma_{\xi,i}^2) \tag{5.12}$$

$$\xi_t = \xi(z_t), \quad z_t = 1, 2, \cdots, K, \quad \xi(i) \sim N(\mu_i, \sigma_{\xi,i}^2), \quad Pr(z_t = i) = p_i$$

（ⅱ）$f(\xi_t)$ が所与のパラメータの下での混合分布(fixed mixture)とした場合の Simulated Maximum Likelihood 推定量を`SIEM1'，$f(\xi_t)$ がフリー・パラメータの混合分布（flexible mixture）とした場合の ML 推定量を`SIEM2'，（ⅲ）$f(\xi_t)$ がフリー・パラメータの混合分布とした場合の Multi-move Gibbs Sampler [24] を利用した [25] ベイズ推定量を`Bayesian'，とした5種類のモデルを用いて実証研究を行っている．

ここでは，対数ボラティリティの推定結果を実際のボラティリティ $\sigma_t^2 = \exp(h_t/2)$ に変換するため以下の2つの方法を用いている．Kalman smoother に対してボラティリティの推定値は対数正規分布の特性を用いて以下のように計算することができる．

$$\hat{\sigma^2}_{t|T} = \tilde{\psi} \exp\left(\hat{h}_{t|T} + \frac{1}{2} P_{t|T}\right) \tag{5.13}$$

ここで，$\tilde{\psi}$ は $\tilde{\psi}^2 E[e^{h_t}]$ が収益率の無条件標本分散に等しくなるように選択する．$\hat{h}_{t|T}$ と $P_{t|T}$ は，それぞれすべての標本が与えられたときの条件付平均と条件付分散を表す．また，Simulation smoother に対してボラティリティの推定値は以下のように計算することができる．

$$\hat{\sigma^2}_{t|T} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} \hat{\sigma}_{t|T}^{2(j)} \tag{5.14}$$

ここで，$\hat{\sigma}_{t|T}^{2(j)}$ は mixture indicator を条件とする Kalman smoother である．

24）この他の手法に Single-move Sampler がある．これらの手法に関して詳しくは，渡部［2000, pp.98-103］参照．

25）ここでは，サンプル間の相関をできるだけ弱くするため，5番目ごとのサンプルしか用いていない．

実証研究では，オプションの原資産として米ドル，英ポンド，円，ドイツ・マルクの 4 つの通貨を用いている．また，日次データを用いると週末の扱いと曜日効果（seasonal day-of-the-week effects）の問題があるため週次データを用いて推定を行っている．ヨーロピアン通貨オプションのコール・オプション価格$C_t^{(SV,\text{通貨})}$は，以下のように Hull / White［1987］モデル[26] を応用して導出している．

$$C_t^{(SV,\text{通貨})} = e^{-r_d(T-t)}\hat{E}[BS(W)] \tag{5.15}$$

ここで，r_d は国内の安全資産利子率を表し，$BS(W)$ は以下のような Black-Scholes モデル[27] である．

$$BS(W) = F_t N(d_5) - KN(d_6) \tag{5.16}$$

$$d_5 = \frac{\ln(F_t/K) + W^2/2}{W}, \quad d_6 = d_5 - W$$

$$W^2 = \sum_{s=t+1}^{T} \exp(h_s^2) \tag{5.17}$$

ここで，F_t は t 時点での先物価格を表す．彼らは異なるボラティリティの推定量とオプション価格とを比較し，また，SV オプション価格と Black-Scholes モデルによるオプション価格を比較している．ここでの研究結果をまとめると以下のようになる．(ｉ)ボラティリティ系列の推定値は推定法に強く依存し，推定誤差は非常に大きい．(ii) データの当てはまりの良さは，SIEM 2 が最も良い．(iii) オプション価格の推定値の結果は，ボラティリティの推定値の結果と類似している．例えば，円/米ドル，英ポンド/米ドルのボラティリティの変動は大きく，オプション価格に影響している．(iv) 短期のオプションに関しては，予測されるボラティリティは現時点のボラティリティの近似として表される．長期オプションに関しては，予測されるボラティリティは持続性（persistence）とボラティリティの分散に依存する．(ｖ) 非米ドル為替レートでは，Black-Scholes モデルとの乖離が大きい．これはボラティリティ過程の低い持続性に起因している．以上の結果よりボラティリティの変動がオプション価格の評価を行う際に重要な要因であることがわかる．また，ボラティリティの推定に際しては推定量の効率性に注意する必要がある．

26）解析的に Hull / White［1987］のコール・オプション価格C_t^{HW} は以下のように求めることができる．

$$C_t^{HW} = \int C(V)h(V|\sigma_t^2)dV = \hat{E}_V[C_t^{BS}(V)]$$

ここで，$\hat{E}_V$ はリスク中立的な世界(risk neutral world)での V に関しての期待値を表す．

$$\hat{C}_t^{HW} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_{t,i}^{BS}(V_i), \quad V_i = \frac{1}{T-t}\sum_{s=t+1}^{T}\sigma_{s,i}^2$$

27）Black-Scholes モデルを利用した場合の通貨オプション価格は以下のように評価することができる．

$$\begin{aligned}
C_t^{(BS,\text{通貨})} &= S_t e^{-r_f(T-t)}N(d_3) - Ke^{-r_d(T-t)}N(d_4)\\
P_t^{(BS,\text{通貨})} &= -S_t e^{-r_f(T-t)}N(-d_3) + Ke^{-r_d(T-t)}N(-d_4)\\
d_3 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r_d - r_f + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\\
d_4 &= d_3 - \sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}$$

ここで，r_f は相手国の安全資産利子率を表す．詳しくは，Garman / Kohlhagen［1983］参照．

5.3　ARCH 型モデル

離散時間の経済で S_t を時点 t での資産価格とするとき，収益率の過程を以下のようにおく．

$$\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} = r + \epsilon_t, \tag{5.18}$$
$$\epsilon_t|\Omega_{t-1} \sim i.i.d.N(0,\sigma_t^2)$$
$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim i.i.d.N(0,1)$$

ここで，ϵ_t は，平均 0，ボラティリティ σ_t^2 である．r は一定の 1 期間の安全資産利子率，ϕ_{t-1} は時点 $t-1$ を含む $t-1$ 時点までの利用可能な情報集合である．z_t は過去と独立で同一な標準正規分布に従うと仮定する．ボラティリティ σ_t^2 の過程は，Engle［1982］の ARCH モデルを拡張した ARCH 型モデルに従うとする．ARCH 型モデルはファイナンス時系列の非線型性をうまく捉えるため様々なタイプが存在し，オプションの実証研究に対しても有用である．例えば，Bollerslev［1986］の GARCH モデルは，ボラティリティ σ_t^2 は過去の予測誤差の 2 乗と過去のボラティリティの線形の関数として定式化されている．

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^2 \tag{5.19}$$

ここで，ボラティリティの非負性を保証するため ω，α，$\beta > 0$ であると仮定する．また，ボラティリティの過程は定常性を保証するため $\sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{j=1}^{p}\beta_j < 1$ であると仮定する．この他にも，Nelson［1991］の EGARCH（Exponential GARCH）モデルや Glosten / Jagannathan / Runkle［1993］の GJR モデルなど株価収益率のボラティリティの変動を捉える様々な ARCH 型モデルが考案されてる [28)]．

5.4　ARCH 型オプションへの応用

Bauwens / Lubrano［1998］は，Gibbs Sampler の手法を利用したベイズ推定法を以下のような GJR（Glosten / Jagannathan / Runkle［1993］）型の非対称 GARCH-Student モデルを用いてオプション価格付けに適用している．

28）EGARCH モデル:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\ln(\sigma_{t-j}^2) + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\left[\gamma z_{t-i} + \zeta\left(|z_{t-i}| - E(|z_{t-i}|)\right)\right]$$

ボラティリティの対数値を被説明変数としてパラメータの非負制約を取り除き定式化されている．$r<0$ ならば，資産価格が上昇した日の翌日よりも，資産価格が下落した日の翌日の方がボラティリティは上昇する．

GJR モデル:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q}\left(\alpha_i\epsilon_{t-i}^2 + \gamma_i D_{t-i}^{-}\epsilon_{t-i}^2\right)$$
$$D_{t-1}^{-} = \begin{cases} 1 & \epsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

D_{t-i}^{-} は ϵ_{t-i} が負のときには 1，それ以外のときには 0 であるダミー変数である．$r<0$ ならば，資産価格が上昇した日の翌日よりも，資産価格が下落した日の翌日の方がボラティリティは上昇する．

その他の ARCH 型モデルについては，Bollerslev / Engle / Nelson［1994］，Shephard［1996］，渡部［2000，第 2 章］参照．

$$\begin{aligned} R_t &= \mu + \phi R_{t-1} + \epsilon_t & (5.20)\\ \epsilon_t &= z_t \sigma_t,\ \ z_t | \Omega_{t-1} \sim Student(0,1,\nu) & (5.21)\\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha^+ \epsilon_{t-1}^{2+} + \alpha^- \epsilon_{t-1}^{2-} + \beta \sigma_{t-1}^2 & (5.22)\\ \epsilon_t^{2+} &= \epsilon_t^2 \mathbf{1}_{\{\epsilon_t > 0\}},\ \epsilon_t^{2-} = \epsilon_t^2 \mathbf{1}_{\{\epsilon_t < 0\}} \end{aligned}$$

ここで ν は自由度を表す．Bauwens / Lubrano［1998］は，格子点 Gibbs Sampler（GGS: Griddy Gibbs Sampler)，Importance Sampling [29]， Metropolis-Hastings アルゴリズムの 3 種類の MCMC 法の比較を行い，GGS は収益率の系列の誤差項が Student t 分布に従うとき優れた方法であることを示している. GGS は，条件付分布 $f(\theta_j \mid \theta_1,\cdots,\theta_{j-1},\theta_{j+1},\cdots,\theta_p,data)$ からサンプリングを行うことが困難なとき利用され, 以下のアルゴリズムにより与えられる [30]．

1. $f(\theta_j \mid \theta_1,\cdots,\theta_{j-1},\theta_{j+1},\cdots,\theta_p,data)$ の値を n 個の点 $\theta_{j1},\cdots,\theta_{jn}$ で計算を行い， その値を $w_1,\cdots,w_n$ とする．
2. $w_1,\cdots,w_n$ を用いて， $f(\theta_j \mid \theta_1,\cdots,\theta_{j-1},\theta_{j+1},\cdots,\theta_p,data)$ の分布関数の近似を計算する．
3. 区間［0,1］の一様分布から一様乱数を発生させ, 2.で得られた分布関数の近似を用いてサンプリングを行う．

条件付分布からサンプリングを行うことが困難な場合には， n 個の適当な格子点を利用し分布関数を他の関数で近似すれば良い．$\theta = \{\mu,\phi,\nu,\omega,\alpha^+,\alpha^-,\beta\}$ とすると，GGS を用いて事後分布からサンプリングされる $\{\theta_1,\cdots,\theta_N\}$ で表記される N 個のパラメータ集合のサンプルを用いて, コール•オプション価格は, 割引現在価値を平均することにより以下のように評価することができる．

$$C_t^{GGS} = e^{-(T-t)r} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} [Max\,(S_T(\theta_j) - K\ ,\ 0)] \tag{5.23}$$

ここでは Brussels index で簡単な実証研究を行い，（5.23）式で得られるオプション価格は Black-Scholes モデルによるオプション価格と比較してほとんど変わらないという結果を得ている．

Bauwens / Lubrano［2002］は，Gibbs Sampler の手法を利用したベイズ推定法を GARCH，GJR モデルと以下のような STR（Smooth Transition GARCH）モデルを用いてオプション価格付けに適用している．ここでは，Bauwens / Lubrano［1998］と同様に，GGS を用いたベイズ推定を行っている．オプション評価を行う際には，Duan［1995］の局所危険中立性（LRNVR: Locally Risk-Neutral Valuation Relationship）による方法 [31] を用いている．

$$R_t = \mu + \phi R_{t-1} + \epsilon_t \tag{5.24}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 (1 - f_t) + \alpha_2 \epsilon_{t-1}^2 f_t + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{5.25}$$

$$f_t = 1 - \exp\left(-\gamma(\epsilon - c)^2\right) \tag{5.26}$$

29）Importance Sampling に関して詳しくは，Tanner［1996, Chapter 3］，Robert / Casella［1999, Section 3.3］参照.
30）詳しくは，Tanner［1996, Section 6.4］，Bauwens / Lubrano［1998, Appendix］，Bauwens / Lubrano / Richard［1999, Section 3.4］参照.
31）詳しくは，三井［2002b］参照.

ここで，c は非対称を捉える閾値(threshold)を表し，γ は飽和(saturation)を表す．ここでは，Brussels index を用いてオプションの実証研究を行っている．推定量として，古典的な統計手法である ML と GGS を用いたベイズ推定との比較を行っている．オプションの推定値は，out-of-the-money と at-the-money では若干差異があるが，in-the-money では STR モデルを除いて殆ど差異が無いという結果を得ている[32)]．また，ベイズ推定で得られるオプション価格は，Black-Scholes モデルによるオプション価格と比較すると，全体的にはほとんど変わらないという結果を得ている．

Ⅵ　今後の展望

本論文は，Gibbs Sampler を用いたベイズ推定法によるオプション価格付け理論についてサーベイを行ったものである．前半では，代表的なマルコフ連鎖モンテカルロ法の一つである Gibbs Sampler についてサーベイを行った．後半では，Gibbs Sampler を用いたベイズ推定法とオプション評価への応用についてサーベイを行った．

マルコフ連鎖モンテカルロ法は，まだ統計学者や計量経済学者が中心に研究を行っており，応用例は少ないのが現状である．日本語の文献でも，Gibbs Sampler を紹介している教科書は，繁桝［1995],丹後［2000］ぐらいである．経済学への応用となると，和合［1998］しかなく，今後更に多くの研究がなされるよう期待される．これまでマルコフ連鎖モンテカルロ法 を用いたベイズ推定法は推定を行う際，非常に時間を要するのが難点であった．しかし，近年のパソコンの高速化と低価格化によって，容易に推定ができるようになり今後応用研究も増加すると思われる．ファイナンスの分野でも応用可能な研究対象は多岐に渡ると思われる[33)]．特に，これまでモデルが複雑過ぎて古典的な統計・計量手法では推定不可能であったモデルに対しても有用である．

オプション価格付け理論では，ボラティリティ変動モデルだけでなく，確率金利モデル（Stochastic Interest-rate）を用いた研究も盛んに行われている．また，SV モデルと確率金利過程を合わせたモデル（Stochastic Volatility and Stochastic Interest-rate Model），ジャンプ過程を組み込んで定式化したモデル（Stochastic Volatility random Jump Model），これらのモデルを全て使用したモデル（Stochastic Volatility and Stochastic Interest-rate random Jump Model）の研究も行われている．こうしたモデルによるマルコフ連鎖モンテカルロ法を用いた実証研究が今後多数行われることが望まれる．ARCH 型オプションでは，モデルの拡張が容易なため様々なモデルが考案されており，どのモデルがマルコフ連鎖モンテカルロ法を利用した場合には，オプション価格評価に適しているかといった研究が望まれる．

（日本大学経済学部専任講師）

32）オプション評価の研究を行う場合には，原資産価格 S と権利行使価格 K の乖離の程度（マネネス）により数種類のカテゴリーに分類して分析を行う．コール・オプションでは，原資産価格 S と権利行使価格 K とを比較して，$S/K=1$ ならば at-the-money, $S/K>1$ ならば in-the-money, $S/K<1$ ならば out-of-the-money と呼ぶ．プット・オプションでは，各々 S/K となる．

33）詳しくは，渡部［2000］参照．また，オプション理論に関しては，三井［2001］参照．

参考文献

［1］ 大森裕浩［2001］，「マルコフ連鎖モンテカルロ法の最近の展開」，日本統計学会『日本統計学会誌』，第 31 巻，第 3 号，305～344 ページ.

［2］ 大森裕浩［2002］，「応用統計・講義ノート」（東京大学大学院経済学研究科）.

［3］ 繁桝算男［1995］，『意思決定の認知統計学』（行動計量学シリーズ 11），朝倉書店.

［4］ 鈴木雪夫・国友直人[1989],『ベイズ統計学とその応用』，東京大学出版会.

［5］ 竹内明香［2003］，「GARCH オプションモデルによる日経 225 オプション実証分析」，修士学位論文，一橋大学.

［6］ 丹後俊郎［2000］，『統計モデル入門』（医学統計学シリーズ 2），朝倉書店.

［7］ 三井秀俊［1998］，「日経 225 株価指数とオプション価格の確率的分散変動モデルによる分析」，日本証券経済研究所『ファイナンス研究』，No.24, 23～40 ページ.

［8］ 三井秀俊［2000］，「日経 225 オプション価格の GARCH モデルによる分析」，MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』，No.7, 57～73 ページ.

［9］ 三井秀俊［2001］，「ボラティリティ変動モデルによるオプション価格付けの実証研究─日経 225 オプション市場 ─」，博士学位論文，東京都立大学.

［10］ 三井秀俊［2002a］，「疑似最尤法とベイズ推定法による GARCH オプション価格の推定と比較」，日本大学経済学研究会『経済集志』，第 72 巻，第 2 号，151～170 ページ.

［11］ 三井秀俊［2002b］，「局所リスク中立評価を用いたオプション価格付け理論」，日本大学経済学研究会『経済集志』，第 72 巻，第 3 号，143～160 ページ.

［12］ 三井秀俊［2002c］，「ボラティリティ変動モデルによるオプション評価法の展開」，日本大学経済学部産業経営研究所 Working Papers，No. 02-01.

［13］ 三井秀俊・渡部敏明[2003]，「ベイズ推定法による GARCH オプション価格付けモデルの分析」，日本統計学会『日本統計学会誌』，第 33 巻，掲載予定.

［14］ 森保洋［1999］，「ARCH モデルによる日経 225 オプション評価」，『現代経済学研究』，第 7 号，143～159 ページ.

［15］ 湯前祥二・鈴木輝好[2000]，『モンテカルロ法の金融工学への応用』（シリーズ〈現代金融工学〉6），朝倉書店.

［16］ 和合肇［1998］，「ベイズ計量経済分析における最近の発展」，日本統計学会『日本統計学会誌』，第 28 巻，第 3 号，253～305 ページ.

［17］ 渡部敏明［2000］，『ボラティリティ変動モデル』（シリーズ〈現代金融工学〉），朝倉書店.

［18］ 渡部敏明［2002］，「経済統計学特殊研究・講義ノート」(東京都立大学大学院社会科学研究科).

［19］ Bauwens, L. and M. Lubrano［1998］, "Bayesian Inference on GARCH Models Using the Gibbs Sampler," *Econometrics Journal*, 1, C23-C46.

［20］ Bauwens, L., M. Lubrano and J. -F. Richard［1999］, *Bayesian Inference in Dynamic Econometric Models*, Oxford University Press.

［21］ Bauwens, L. and M. Lubrano［2002］, "Bayesian Option Pricing Using Asymmetric GARCH Models," *Journal of Empirical Finance* 9, pp.321-342.

［22］ Bollerslev, T.［1986］, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, pp.307-327.

［23］ Bollerslev, T. , R. F. Engle and D. B. Nelson［1994］, "ARCH Models," in R. F. Engle and D. McFadden, eds., *Handbook of Econometrics*, Vol.4, pp.2959-3038, Amsterdam: North-Holland.

［24］ Black, F. and M. Scholes［1973］, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, pp.637-654, Reprinted in Hughston, L. ed., *Options: Classic Approaches to Pricing and Modelling*,［1999］, pp.63-80, Risk Publications.

［25］ Casella, G. and E. I. George［1992］, "Explaining the Gibbs Sampler" *American Statistician*, 46, pp.167-174.

［26］ Campbell, J. Y., A. W. Lo and A. C. Mackinlay［1997］, *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.

［27］ Chesney, M. and L. O. Scott［1989］, "Pricing European Options: A Comparison of the Modified Black-Schole's Model and a Random Variance Models," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24, pp.267-284.

［28］ Chib, S.［2001］, "Markov Chain Monte Carlo Methods: Computation and Inference," in J. J. Heckman and E. Leamer eds., *Handbook of Econometrics*, Vol.5, pp.3569-3649, Amsterdam: North-Holland.

［29］ Chib, S. and E. Greenberg［1995］, "Understanding the Metropolis - Hasting Algorithm," *American Statistician*, 49, pp.327-335.

［30］ Duan, J. -C.［1995］, "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance*, 5, pp.13-32.

［31］ Duan, J. -C. and H. Zhang［2001］, "Pricing Hang Seng Index Options around the Asian Financial Crisis - A GARCH Approach," *Journal of Banking & Finance*, 25, pp.1989-2014.

［32］ Engle, R. F. and C. Mustafa［1992］, "Implied ARCH Models from Options Prices," *Journal of Econometrics*, 52, pp.289-311.

［33］ Garman, M. B. and S. V. Kohlhagen［1983］, "Foreign Currency Option Values," *Journal of International Money and Finance*, 2, pp.231-237, Reprinted in DeRosa, D. ed., *Currecy Derivatives*,［1998］, New York: John Wiley & Sons.
［34］ Geweke, J.［1992］, "Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments," J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith , eds., *Bayesian Statistics*, 4, pp.169-193.
［35］ Ghysels, E., A. C. Harvey and E. Renault［1996］, "Stochastic Volatility," in G. S. Maddala and C. R. Rao, eds., *Handbook of Statistics*, Vol.14: Statisitical Methods in Finance, pp.119-191, Amsterdam: North-Holland.
［36］ Gilks, W. R., S. Richardson and D. J. Spiegelhalter［1996］, *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman & Hall.
［37］ Glosten, L. R., R. Jagannathan and D. Runkle［1993］, "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks," *Journal of Finance*, 48, pp.1779-1801.
［38］ Gourieroux, C and J. Jasiak［2001］, *Financial Econometrics*, Princeton University Press.
［39］ Hamilton, J. D.［1994］, *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
［40］ Harvey, A. C., E. Ruiz and N. G. Shephard［1994］, "Multivariate Stochastic Variance Models," *Review of Economic Studies*, 61, pp.247-264.
［41］ Hull, J. and A. White［1987］, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, 42, pp.281-300.
［42］ Jacquier, E., N. G. Polson and P. E. Rossi［1994］, "Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models［with Comments］," *Journal of Business & Economic Statistics*, 12, pp.371-389.
［43］ Mahieu, R. and P. Schotman［1998］, "An Empirical Application of Stochastic Volatility Models," *Journal of Applied Econometrics*, 13, pp.333-360.
［44］ Melino, A. and S. M. Turnbull［1990］, "The Pricing of Foreign Currency Options with Stochastic Volatility," *Journal of Econometrics*, 45, pp.239-265.
［45］ Nelson, D. B.［1991］, "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59, pp.347-370.
［46］ Robert, C. P. and G. Casella［1999］, *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer-Verlag.
［47］ Sabbatini, M. and O. Linton［1998］, "A GARCH Model of the Implied Volatility of the Swiss Market Index from Option Prices," *International Journal of Forecasting*, 14, pp.199-213.
［48］ Saez, M.［1997］, "Option Pricing under Stochastic Volatility and Interest Rate in the Spanish Case," *Applied Financial Economics*, 7, pp.379-394.
［49］ Scott, L. O.［1987］, "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an Application," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, pp.419-438.
［50］ Shephard, N.［1996］, "Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility,"in D. R. Cox, D. V. Hinkley and O. E. Barndorff-Nielsen, eds., *Time Series Models in Econometrics, Finance and other Fields*, Chapman & Hall.
［51］ Tanner, M. A.［1996］, *Tools for Statistical Inference*, 3rd ed.,Springer-Verlag.
［52］ Tierney, L.［1994］,　"Markov Chains for Exploring Posterior Distributions［with discussion］," *Annals of Statistics*, 21, pp.1701-1762.
［53］ Watanabe, T［1997］, "Option Pricing under Stochastic Volatility: A Bayesian Markov Chain Monte Carlo Simulation Approach," Manuscript, Tokyo Metropolitan University.
［54］ Wiggins, J. B.［1987］, "Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates," *Journal of Financial Economics*, 19, pp.351-372.
［55］ Zellner, A.［1971］, *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, Wiley & Sons; 福島庸・大沢豊共訳［1986］,『ベイジアン計量経済学入門』, 培風館.