

マルコフ・スイッチング・モデルによる オプション評価の実証研究^{*)}

里吉清隆^{†)}・三井秀俊^{‡)}

1. はじめに

本論文は、GARCH (Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity) モデルおよびそれを拡張した Gray (1996) のマルコフ・スイッチング GARCH (Markov Switching-GARCH; MS-GARCH) モデルにより日経 225 オプション価格の推定を行い、日経 225 オプション市場での MS-GARCH モデルの有効性の検証を行ったものである。ヨーロッパ・オプション¹⁾ の評価において頻繁に用いられている Black and Scholes (1973) モデル (以下、B-S モデル) では、ボラティリティ (Volatility)²⁾ と呼ばれる原資産価格変化率の 2 次のモーメントの値は満期まで一定であると仮定している。しかしながら、過去の多くの実証分析の結果からボラティリティは時間を通じて確率的に変動していると考えられ、そうした場合にボラティリティの変動をどのように定式化し、オプション価格を評価するかは非常に重要な問題となっている。Engle (1982) はその変動を明示的に捉えるために、各時点のボラティリティを過去の予期しないショックの 2 乗の線型関数として定式化する ARCH モデルを提案した。また、Bollerslev (1986) はボラティリティの説明変数に過去のボラティリティの値を加えて、GARCH モデルと呼ばれるより一般的なモデルに拡張している³⁾。このような ARCH 型モデルを用いたオプションの実証研究としては、Engle and Mustafa (1992), Noh, Engle and Kane (1994), Saez (1997), Sabbatini and Linton (1998), Bauwens and Lubrano (1998), 森保

(1999) がある⁴⁾。また、Duan (1995) の GARCH モデルによる局所リスク中立性のモデルを用いた実証研究としては、三井 (2000), Duan and Zhang (2001), Bauwens and Lubrano (2002), 三井・渡部 (2003), 渡部 (2003) がある⁵⁾。

ところで、ARCH モデルを始めとしたボラティリティ変動モデルの研究では、一般に、ボラティリティに対するショックの持続性が非常に高いことが知られている。しかし、Diebold (1986) と Lamoureux and Lastrapes (1990) が指摘しているように、このような持続性はボラティリティの構造変化によって引き起こされた可能性が考えられる。このことから、Hamilton and Susmel (1994) と Cai (1994) は、構造変化を捉えるために ARCH モデルの定式化にマルコフ過程に従う状態変数を含めたマルコフ・スイッチング ARCH (MS-ARCH) モデルを提案している。さらに、Gray (1996) は ARCH モデルではなく GARCH モデルにおいて構造変化を含めた MS-GARCH モデルを提案した。GARCH (1, 1) モデルは ARCH (∞) モデルに対応していることから、オプション価格の実証分析に用いるボラティリティ変動モデルとしては、MS-ARCH モデルよりも MS-GARCH モデルのほうが適切であると考えられる。

本研究では、ボラティリティが MS-GARCH モデルに従う場合のオプション価格の実証研究を行った。日経 225 オプションのようなヨーロッパ・オプションの価格は、投資家の危険中立性を仮定するとモンテカルロ・シミュレーションによって簡単に導出することができる。また、シ

ミュレーションの収束を早める手段として、負相関法と制御変量法の 2 つの分散減少法を用いた。これらの手法を用いて日経 225 オプション市場での MS-GARCH モデルの有効性の検証を行った。本研究の実証分析から、次の 4 つの結果が得られた。(i) コール・オプションでは、MS-GARCH-t モデルを用いたとき、オプション価格の推定値と市場価格の乖離率が最も小さくなる。(ii) プット・オプションでは、GARCH-t モデルを用いたとき、オプション価格の推定値と市場価格の乖離率が最も小さくなる。(iii) 本研究で用いた MS-GARCH モデルによるオプション評価は、オプション市場で基準とされている B-S モデルよりも適正な価格付けを行うことができる。(iv) 原資産価格収益率に対する t 分布の仮定とボラティリティがマルコフ・スイッチング過程に従うという仮定は、オプション価格の評価において非常に重要である。

本論文の以下の構成は次の通りである、2 章では、MS-GARCH モデルと危険中立性を仮定した場合の収益率の定式化について解説し、本研究で比較するモデルについて述べる。3 章では、MS-GARCH モデルの最尤法による推定法に関して解説を行う。4 章では、モンテカルロ・シミュレーションによるヨーロッパン・オプションの評価法の説明を行う。5 章では、日経 225 オプションの実証結果に関して述べる。最後の 6 章では、結論と今後の課題について述べる。

2. 分析モデル

2.1 マルコフ・スイッチング GARCH モデル

Gray (1996) は、GARCH モデルのパラメータがマルコフ過程に従う状態変数 (state variable) に依存してスイッチングを引き起こすモデルを提案した。 t 時点の収益率を R_t 、ボラティリティを σ_t^2 とすると、MS-GARCH モデルは以下のように表される。

$$R_t = \mu + \epsilon_t, \quad (2.1)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, Var[z_t] = 1, \quad (2.2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega_{s_t} + \alpha_{s_t} \epsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t} E[\sigma_{t-1}^2 | I_{t-2}], \quad (2.3)$$

$$\omega_{s_t} = \omega_0(1 - s_t) + \omega_1 s_t, \quad (2.4)$$

$$\alpha_{s_t} = \alpha_0(1 - s_t) + \alpha_1 s_t, \quad (2.5)$$

$$\beta_{s_t} = \beta_0(1 - s_t) + \beta_1 s_t. \quad (2.6)$$

(2.1) 式の定数項 μ は期待収益率、 ϵ_t は誤差項であり、収益率に自己相関は無いと仮定する。 $i.i.d.$ は、過去と独立で同一な分布 (independent and identically distributed) を表す。 $E[\cdot]$ は期待値、 $Var[\cdot]$ は分散、 $E[\cdot | \cdot]$ は条件付期待値を各々表す。ボラティリティ σ_t^2 は、 $(t-1)$ 時点までの情報集合 $I_{t-1} = \{R_{t-1}, R_{t-2}, \dots\}$ と t 時点の状態変数 s_t を条件とした ϵ_t の条件付分散、つまり、 $\sigma_t^2 \equiv Var[\epsilon_t | I_{t-1}, s_t]$ である。(2.3) 式の I_{t-2} は $(t-2)$ 時点までの情報集合 $I_{t-2} = \{R_{t-2}, R_{t-3}, \dots\}$ である。(2.4), (2.5), (2.6) 式の s_t はマルコフ過程に従う状態変数であり、その推移確率 (transition probability) は、

$$\begin{aligned} \Pr[s_t = 1 | s_{t-1} = 1] &= p, \\ \Pr[s_t = 0 | s_{t-1} = 0] &= q \end{aligned} \quad (2.7)$$

であるとする。ただし、 $\Pr[s_t = j | s_{t-1} = i]$ は、状態 i から状態 j に推移する確率である。

$s_t=0$ のときのボラティリティを σ_{0t}^2 、 $s_t=1$ のときのボラティリティを σ_{1t}^2 とすると、ボラティリティ σ_t^2 は各々、

$$\begin{cases} s_t=0 \text{ のとき,} \\ \sigma_{0t}^2 = \omega_0 + \alpha_0 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_0 E[\sigma_{t-1}^2 | I_{t-2}], \\ s_t=1 \text{ のとき,} \\ \sigma_{1t}^2 = \omega_1 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 E[\sigma_{t-1}^2 | I_{t-2}] \end{cases}$$

となる。誤差項が正規分布に従う場合、(2.2) 式の z_t は、

$$z_t \sim i.i.d.N(0, 1) \quad (2.8)$$

となり、 t 分布 (t-distribution) に従う場合には、

$$z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu) \quad (2.9)$$

となる。ここで、 ν は自由度 (degree of freedom) を表し、 z_t の分散は 1 に基準化されている。

もし仮に、GARCH モデルにマルコフ・スイッチングに従う状態変数を直接導入すると、ボラティリティの式は、

$$\sigma_t^2 = \omega_{s_t} + \alpha_{s_t} \epsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t} \sigma_{t-1}^2$$

となる。しかし、このモデルでは σ_t^2 は t 時点の s_t だけでなく、 t 時点までのすべての状態変数 (s_t, s_{t-1}, \dots, s_1) に依存してしまうため、最尤法で推定することができない。そこで、Gray (1996) のモデルでは、(2.3) 式のように右辺第 3 項の σ_{t-1}^2 を $E[\sigma_{t-1}^2 | I_{t-2}]$ に置き換えている。 σ_{t-1}^2 は、 I_{t-2} を条件としたとき、 $\Pr[s_{t-1} = 0 | I_{t-2}]$ に対して $\sigma_{0,t-1}^2$ の値をとり、 $\Pr[s_{t-1} = 1 | I_{t-2}]$ に対して $\sigma_{1,t-1}^2$ の値をとる。そのため、 $E[\sigma_{t-1}^2 | I_{t-2}]$ は、

$$\begin{aligned} E[\sigma_{t-1}^2 | I_{t-2}] &= \sigma_{0,t-1}^2 \Pr[s_{t-1} = 0 | I_{t-2}] \\ &\quad + \sigma_{1,t-1}^2 \Pr[s_{t-1} = 1 | I_{t-2}] \end{aligned}$$

と計算される。このとき σ_t^2 は t 時点の s_t のみに依存することになるので、Hamilton (1989) のフィルタリング手法 (ハミルトン・フィルタ) から $\Pr[s_t = j | I_{t-1}] (j = 0, 1)$ を求めることにより最尤法 (maximum likelihood method) で推定することができる。MS-GARCH モデルの尤度関数 (likelihood function) とハミルトン・フィルタに関しては、3 章で詳しく解説する。

2.2 投資家の危険中立性と収益率の定式化

S_t を t 時点の原資産価格とし、 t 時点の原資産価格収益率 R_t を以下のように定義する。

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \quad (2.10)$$

本研究では、投資家は危険中立的 (risk neutral) であると仮定する。このとき、期待収益率 μ は安全資産利子率に等しくなり、安全資産利子率を r とすると、(2.1) 式の原資産価格収益率 R_t は、

$$R_t = r + \epsilon_t \quad (2.11)$$

となる。 $t-1$ 時点までの情報 I_{t-1} が与えられた条件の下での (2.11) 式の期待値は $E[R_t | I_{t-1}] = r$ であり、 R_t は (2.10) 式として定義されているので代入して書き換えると、

$$E \left[\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \middle| I_{t-1} \right] = r,$$

つまり、

$$E[S_t | I_{t-1}] = S_{t-1}(1 + r)$$

となり、危険中立性が成立していることが確認できる。

ところで、ここでは原資産価格収益率を (2.10) 式のように定義しているが、オプションを始めとした金融工学理論では、連続複利方式 (continuous compounding) により、

$$R_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$$

とすることが一般的である。ここで、例えばボラティリティ σ_t^2 はマルコフ・スイッチングを含まない通常の GARCH モデルに従うとする。危険中立性を仮定すると、原資産価格収益率は、

$$R_t = r^* - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \epsilon_t \quad (2.12)$$

と定式化される。ただし、 r^* は連続複利方式の
 利子率であり (2.11) 式の r とは異なる⁶⁾。(2.11)
 式と比べると、右辺の第 2 項に $-(1/2)\sigma_t^2$ とい
 う項が追加されていることが分かる。 z_t が標準正
 規分布に従うとき、 $t-1$ 時点までの情報 I_{t-1} が
 与えられた条件のもとで原資産価格収益率 R_t は、

$$E[R_t|I_{t-1}] = r^* - \frac{1}{2}\sigma_t^2, \quad Var[R_t|I_{t-1}] = \sigma_t^2$$

という期待値と分散をもつ正規分布に従う。 $\ln S_t$
 について書き換えると、

$$\ln S_t|I_{t-1} \sim N\left(\ln S_{t-1} + r^* - \frac{1}{2}\sigma_t^2, \sigma_t^2\right)$$

となる。したがって、 S_t は条件付期待値が、

$$\begin{aligned} E[S_t|I_{t-1}] &= \exp\left(\ln S_{t-1} + r^* - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}\sigma_t^2\right) \\ &= S_{t-1} \exp(r^*) \end{aligned}$$

となる対数正規分布 (lognormal distribution) に
 従うことが分かる。この式は危険中立性が成立し
 ていることを示している。したがって、連続複利
 方式で原資産価格収益率を計算し、 z_t が標準正規
 分布に従い、ボラティリティが通常の GARCH モ
 デルのケースでは (2.12) 式のように定式化する
 ことになる。ところが、誤差項の z_t が正規分布
 ではなく t 分布に従う場合、(2.12) 式の右辺第
 2 項を書き換えなければならないが、それを解析
 的に求めることはできない。そこで、本研究では
 原資産価格収益率を (2.10) 式のように計算し、
 (2.11) 式を用いることにする。

2.3 本研究で比較するモデル

本研究では、2.1 節の MS-GARCH モデルだけ
 でなく以下のような通常の GARCH モデルとマル
 コフ・スイッチング (Markov Switching; MS)

モデルも併せて分析を行う。GARCH モデルは、

$$\begin{aligned} R_t &= \mu + \epsilon_t, \\ \epsilon_t &= \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \\ z_t &\sim i.i.d., E[z_t] = 0, Var[z_t] = 1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad (2.14)$$

である。一方、MS モデルは、

$$\begin{aligned} R_t &= \mu + \epsilon_t, \\ \epsilon_t &= \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \\ z_t &\sim i.i.d., E[z_t] = 0, Var[z_t] = 1, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\sigma_t^2 = \omega_0(1 - s_t) + \omega_1 s_t \quad (2.16)$$

と定式化される。ここで、ボラティリティ σ_t^2 は
 ω_0 、 ω_1 のどちらかの状態になる。

本研究では、以下のボラティリティが変動す
 る 6 つのモデルと B-S モデルを用いて、4 章にお
 いてオプションの価格付けに適用し比較を行う。
 “-n” は誤差項が正規分布に従うことを表し、“-t”
 は誤差項が t 分布に従うことを表す。

1. MS-GARCH-n … (2.2) – (2.8), (2.11).
2. MS-GARCH-t … (2.2) – (2.7), (2.9), (2.11).
3. GARCH-n … (2.8), (2.11), (2.13), (2.14).
4. GARCH-t … (2.9), (2.11), (2.13), (2.14).
5. MS-n … (2.8), (2.11), (2.15), (2.16).
6. MS-t … (2.9), (2.11), (2.15), (2.16).
7. B-S … B-S モデル (Black and Scholes(1973)).

7. における時点 T での権利行使価格 K 、残存期
 間 τ のヨーロッパン・コール・オプション価格
 C_T^{BS} とヨーロッパン・プット・オプション価格
 P_T^{BS} は、以下の B-S モデルで与えられる。

$$C_T^{BS} = S_T N(d_1) - K \exp(-r^*t) N(d_2), \quad (2.17)$$

$$P_T^{BS} = -S_T N(-d_1) + K \exp(-r^*t) N(-d_2), \quad (2.18)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_T/K) + (r^* + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau},$$

$$N(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \quad i = 1, 2.$$

ここで、 $N(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数を表す。

3. MS-GARCH モデルの最尤法による推定法

3.1 MS-GARCH モデルの尤度関数

パラメータ集合を θ とする。 θ は、MS-GARCH モデルの誤差項が正規分布に従うときには $\theta = (\omega_0, \omega_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, p, q)$ となり、誤差項が t 分布に従うときには自由度 ν が追加されて $\theta = (\omega_0, \omega_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, p, q, \nu)$ となる。このとき、尤度関数 $L(\theta)$ は以下ようになる。

$$L(\theta) = f(R_1, R_2, \dots, R_T | \theta)$$

$$= \prod_{t=1}^T f(R_t | I_{t-1}; \theta)$$

$$= \prod_{t=1}^T \sum_{s_t=0}^1 f(R_t, s_t | I_{t-1}; \theta)$$

$$= \prod_{t=1}^T \sum_{s_t=0}^1 f(R_t | s_t, I_{t-1}; \theta) f(s_t | I_{t-1}; \theta).$$

状態変数 s_t は観測できないため、 R_t の周辺密度 $f(R_t | I_{t-1}; \theta)$ は R_t と s_t の同時分布 $f(R_t, s_t | I_{t-1}; \theta)$ を s_t に関して足し合わせて求めることになる。対数尤度関数 (log-likelihood function) は、

$$\ln L(\theta)$$

$$= \sum_{t=1}^T \ln \left\{ \sum_{s_t=0}^1 f(R_t | s_t, I_{t-1}; \theta) f(s_t | I_{t-1}; \theta) \right\}$$
(3.1)

となる。誤差項の z_t 正規分布に従うとき、(3.1) の右辺 $\{\cdot\}$ は次のようになる。

$$\sum_{s_t=0}^1 f(R_t | s_t, I_{t-1}; \theta) f(s_t | I_{t-1}; \theta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{0t}^2}} \exp\left(-\frac{(R_t - r)^2}{2\sigma_{0t}^2}\right)$$

$$\times \Pr[s_t = 0 | I_{t-1}]$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{1t}^2}} \exp\left(-\frac{(R_t - r)^2}{2\sigma_{1t}^2}\right)$$

$$\times \Pr[s_t = 1 | I_{t-1}].$$
(3.2)

ただし、右辺のボラティリティ σ_{0t}^2 、 σ_{1t}^2 は各々、

$$\sigma_{0t}^2 = \omega_0 + \alpha_0 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_0 E[\sigma_{t-1}^2 | I_{t-2}],$$

$$\sigma_{1t}^2 = \omega_1 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 E[\sigma_{t-1}^2 | I_{t-2}]$$

である。 $\Pr[s_t = 0 | I_{t-1}]$ と $\Pr[s_t = 1 | I_{t-1}]$ は、 $t-1$ 時点までの情報 I_{t-1} が与えられたもて s_t のとる確率である。誤差項の z_t が t 分布に従うときは、(3.1) の右辺 $\{\cdot\}$ は

$$\sum_{s_t=0}^1 f(R_t | s_t, I_{t-1}; \theta) f(s_t | I_{t-1}; \theta)$$

$$= \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{(R_t - r)^2}{\sigma_{0t}^2(\nu-2)}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

$$\times (\sigma_{0t}^2)^{-\frac{1}{2}} (\nu-2)^{-\frac{1}{2}} \times \Pr[s_t = 0 | I_{t-1}]$$

$$+ \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{(R_t - r)^2}{\sigma_{1t}^2(\nu-2)}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

$$\times (\sigma_{1t}^2)^{-\frac{1}{2}} (\nu-2)^{-\frac{1}{2}} \times \Pr[s_t = 1 | I_{t-1}]$$
(3.3)

となる。

3.2 ハミルトン・フィルタ

(3.2)、(3.3) 式の $\Pr[s_t = 0 | I_{t-1}]$ と $\Pr[s_t = 1 | I_{t-1}]$ は、Hamilton (1989) の提案したフィルタリング手法 (ハミルトン・フィルタ) によって

求める。以下では、 $i = 0, 1, j = 0, 1$ は、各々 $(t - 1)$ 時点、 t 時点の状態を表すことにする。 t 時点までの情報 I_t が与えられたときに $s_t = j$ となる確率、つまり、 $\Pr[s_t = j|I_t]$ を求めるには、まず、 $\Pr[s_{t-1} = i|I_{t-1}]$ が与えられたとして、次式より $\Pr[s_t = j|I_{t-1}]$ を計算する。

$$\begin{aligned} \Pr[s_t = j|I_{t-1}] &= \sum_{i=0}^1 \Pr[s_t = j, s_{t-1} = i|I_{t-1}] \\ &= \sum_{i=0}^1 \Pr[s_t = j|s_{t-1} = i] \Pr[s_{t-1} = i|I_{t-1}]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

ただし、 $\Pr[s_t = j|s_{t-1} = i]$ は (2.7) 式で与えられる推移確率である。次に、 t 時点のデータ R_t を追加すると、

$$\begin{aligned} \Pr[s_t = j|I_t] &= \Pr[s_t = j|I_{t-1}, R_t] = \frac{f(s_t = j, R_t|I_{t-1})}{f(R_t|I_{t-1})} \\ &= \frac{f(R_t|s_t = j, I_{t-1}) \Pr[s_t = j|I_{t-1}]}{\sum_{j=0}^1 f(R_t|s_t = j, I_{t-1}) \Pr[s_t = j|I_{t-1}]} \end{aligned} \quad (3.5)$$

となり、この式から $\Pr[s_t = j|I_t]$ を求める。ただし、 $I_t = (I_{t-1}, R_t)$ である。以上の2つの式、(3.4) 式と(3.5) 式を繰り返すことによって、 $t = 1, 2, \dots, T$ について $\Pr[s_t = j|I_{t-1}]$ を計算し、(3.2) 式、または (3.3) 式に代入する。 $t = 1$ 時点の計算に必要な $\Pr[s_0 = i|I_0]$ には、一般に定常確率 (steady-state probability)、

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \Pr[s_0 = 0|I_0] = \frac{1-p}{2-p-q}, \\ \pi_1 &= \Pr[s_0 = 1|I_0] = \frac{1-q}{2-p-q} \end{aligned}$$

を用いる。

4. オプション価格の導出方法

4.1 危険中立性の下でのオプション価格

投資家が危険中立的な場合、ヨーロッパアン・オプションの価格は、満期におけるオプション価格の期待値を安全資産の利子率 r で割引いた割引現在価値となる。すなわち、 $T + \tau$ 時点が満期で権利行使価格 K のコール・オプションの T 時点の価格を C_T 、プット・オプションの価格を P_T とすると、

$$C_T = (1+r)^{-\tau} E[Max(S_{T+\tau} - K, 0)], \quad (4.1)$$

$$P_T = (1+r)^{-\tau} E[Max(K - S_{T+\tau}, 0)] \quad (4.2)$$

と表される。ここで、 $S_{T+\tau}$ はオプションの満期の原資産価格である。MS-GARCH モデルの場合、右辺の期待値を解析的に求めることができないので、モンテカルロ・シミュレーションによって評価する⁷⁾。シミュレーションを n 回行い、 n 個の満期の原資産価格 $S_{T+\tau}$ が得られたとして、これらを $(S_{T+\tau}^{(1)}, S_{T+\tau}^{(2)}, \dots, S_{T+\tau}^{(n)})$ とする。ただし、 $S_{T+\tau}^{(i)}$ は i 回目のパスの発生によって得られた満期の原資産価格である。 n が十分に大きいとき、大数の法則 (law of large numbers) より (4.1) (4.2) 式の期待値はそれぞれ以下の式によって評価することができる。

$$\begin{aligned} E[Max(S_{T+\tau} - K, 0)] &\approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Max(S_{T+\tau}^{(i)} - K, 0), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} E[Max(K - S_{T+\tau}, 0)] &\approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Max(K - S_{T+\tau}^{(i)}, 0). \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.2 モンテカルロ・シミュレーションの手順

本研究のモデルにおけるオプション価格のモンテカルロ・シミュレーションによる計算手順は以

下の通りである。ただし、MS-GARCH モデルの誤差項は正規分布に従うとする。

- [1] 標本 $\{R_1, R_2, \dots, R_T\}$ を使って、MS-GARCH モデルの未知パラメータを最尤推定する。
- [2] 互いに独立な標準正規分布から $\{z_{T+1}^{(i)}, z_{T+2}^{(i)}, \dots, z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ をサンプリングする。
- [3] 互いに独立な標準一様分布から $\{u_{T+1}^{(i)}, u_{T+2}^{(i)}, \dots, u_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ をサンプリングする。
- [4] 手順 [3] の一様乱数と最尤法で推定された推移確率 p, q を使って、マルコフ過程に従う状態変数 $\{s_{T+1}^{(i)}, s_{T+2}^{(i)}, \dots, s_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ を求める。
- [5] 手順 [2], [4] の値を MS-GARCH モデルに代入して、 $\{R_{T+1}^{(i)}, R_{T+2}^{(i)}, \dots, R_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ を計算する。
- [6] 次の式を使ってオプションの満期 $T + \tau$ 時点における原資産価格 $(S_{T+\tau}^{(1)}, S_{T+\tau}^{(2)}, \dots, S_{T+\tau}^{(n)})$ を求める。

$$S_{T+\tau}^{(i)} = S_T \prod_{s=1}^{\tau} (1 + R_{T+s}^{(i)}),$$

$$i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.5)$$

- [7] 次の式からコール・オプションの価格 C_T 、プット・オプションの価格 P_T それぞれ計算する。

$$C_T \approx (1 + r)^{-\tau}$$

$$\times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Max} \left(S_{T+\tau}^{(i)} - K, 0 \right),$$

$$(4.6)$$

$$P_T \approx (1 + r)^{-\tau}$$

$$\times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Max} \left(K - S_{T+\tau}^{(i)}, 0 \right).$$

$$(4.7)$$

モンテカルロ・シミュレーションの回数は $n=10,000$ 程度で十分であると考えられる。計算される C_T, P_T の分散を小さくするために、本研究では代表的な分散減少法 (variance reduction technique) である制御変量法と負相関法を併せて用いることを提案する。詳細は 4.3 節で解説する。

ところで、手順 [4] では一様乱数と推移確率を用いてマルコフ過程に従う状態変数を求めていくのだが、出発点である $T + 1$ 時点の状態変数 s_{T+1} に関してはこの方法が適用できない。なぜならば、手順 [1] においてパラメータの最尤推定を行ってもオプションの評価時点である T 時点の状態変数 s_T の値は依然として未知であり、既知でなければ一様乱数と推移確率から状態変数 s_{T+1} を求めることはできないからである。したがって、 s_{T+1} についてはハミルトン・フィルタで得られた T 時点の確率 $\Pr[s_T = i | I_T]$ と推移確率 $\Pr[s_{T+1} = j | s_T = i]$ を利用して、

$$\Pr[s_{T+1} = j | I_T]$$

$$= \sum_{i=0}^1 \Pr[s_{T+1} = j | s_T = i] \Pr[s_T = i | I_T]$$

を計算し、この確率からサンプリングを行うことにする。

4.3 分散減少法

本研究ではモンテカルロ・シミュレーションの推定値の分散を小さくさせ、より精度の高い推定値を得るために負相関法 (antithetic variates) と制御変量法 (control variates) の 2 つの分散減少

法を用いることを提案する⁸⁾。

負相関法とは、乱数を発生させるときになるべく互いに負の相関を持つ系列を2つ生成し、それらの平均値を取ることによってサンプリングの誤差を減らす手法である。本稿のモデルでは、手順 [2] において標準正規分布から $\{z_{T+1}^{(i)}, z_{T+2}^{(i)}, \dots, z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ がサンプリングされたとすると、それにマイナスをつけた値 $\{-z_{T+1}^{(i)}, -z_{T+2}^{(i)}, \dots, -z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ を作成して乱数に加える。手順 [3] でも同様に、標準一様分布から $\{u_{T+1}^{(i)}, u_{T+2}^{(i)}, \dots, u_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ をサンプリングしたら、1 から一様乱数を引いた値 $\{1 - u_{T+1}^{(i)}, 1 - u_{T+2}^{(i)}, \dots, 1 - u_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ を追加する。したがって、手順 [4] 以降のモンテカルロ・シミュレーションの回数は $2n$ となる。このような2種類の乱数系列を用いて計算される満期の原資産価格、すなわち $\{S_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ と $\{S_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=n+1}^{2n}$ の間には高い負の相関が生じるので、それによって計算されるオプション価格の分散を小さくすることができる。

もう一つの分散減少法である制御変量法とは、解析的に計算できる変量を制御変量として、制御変量を解析的に計算した値とモンテカルロ・シミュレーションによって計算した値の両方を使って分散を小さくする方法である。制御変量法の制御変量としては B-S モデルのオプション価格を用いることにする。B-S モデルでは、原資産価格 S は次の幾何ブラウン運動 (Geometric Brownian motion) に従うと仮定している。

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW.$$

ただし、 μ は期待収益率、 dt は無限小の時間間隔、 σ は標準偏差、 dW はウィナー過程の無限小増分

である。このとき、伊藤の公式から原資産価格の自然対数 $\ln S$ は、

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW$$

となり、 $\ln S$ は算術ブラウン運動に従う。ここで、オプション価格の評価時点である T 時点の原資産価格を S_T 、満期の $T + \tau$ 時点の原資産価格を $S_{T+\tau}$ とすると、それぞれの自然対数の差である $\ln S_{T+\tau} - \ln S_T$ は次のような正規分布に従う。

$$\ln S_{T+\tau} - \ln S_T \sim N \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau, \sigma^2 \tau \right).$$

本稿では投資家の危険中立性を仮定しているので、 μ は連続複利方式の安全資産利子率 r^* に等しくなる。したがって、連続複利における t 時点の原資産価格収益率 $R_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$ は、

$$R_t = r^* - \frac{1}{2} \sigma^2 + \epsilon_t, \tag{4.8}$$

$$\epsilon_t = \sigma z_t, \quad z_t \sim i.i.d.N(0, 1)$$

と定式化することができる。また、 $\ln S_{T+\tau} - \ln S_T$ は以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \ln S_{T+\tau} - \ln S_T &= (\ln S_{T+\tau} - \ln S_{T+\tau-1}) \\ &\quad + (\ln S_{T+\tau-1} - \ln S_{T+\tau-2}) \\ &\quad + \dots + (\ln S_{T+1} - \ln S_T) \\ &= R_{T+\tau} + R_{T+\tau-1} + \dots + R_{T+1}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

したがって、 i 回目のパスの発生によって得られた満期の原資産価格 $S_{T+\tau}^{(i)}$ は (4.8), (4.9) 式より次式のように表現できる。

$$S_{T+\tau}^{(i)}$$

$$\begin{aligned}
 &= S_T \exp \left(R_{T+\tau}^{(i)} + R_{T+\tau-1}^{(i)} + \cdots + R_{T+1}^{(i)} \right) \\
 &= S_T \exp \left\{ \left(r^* - \frac{1}{2}\sigma^2 + \epsilon_{T+\tau}^{(i)} \right) \right. \\
 &\quad + \left(r^* - \frac{1}{2}\sigma^2 + \epsilon_{T+\tau-1}^{(i)} \right) \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(r^* - \frac{1}{2}\sigma^2 + \epsilon_{T+1}^{(i)} \right) \right\} \\
 &= S_T \exp \left(r^* \tau - \frac{1}{2}\sigma^2 \tau + \sigma \sum_{t=T+1}^{T+\tau} z_t^{(i)} \right), \\
 i &= 1, 2, \dots, n. \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

よって、B-S モデルからモンテカルロ・シミュレーションによって満期の原資産価格を求めるにはこの式を用いることになる。標準偏差 σ には、ヒストリカル・ボラティリティ (Historical Volatility; HV) を用いた。過去の株価データから計算されるボラティリティをヒストリカル・ボラティリティという。本研究では、過去 D 日分の原資産価格変化率の標準偏差を使い、HV を下記のように計算した。

$$HV = \sqrt{\frac{1}{D-1} \sum_{t=1}^D (R_t - \bar{R})^2}$$

\bar{R} は R_t の D 日間の平均値である。本研究では、 $D = 20$ とした。

MS-GARCH モデルからモンテカルロ・シミュレーションで計算された満期 $T + \tau$ 時点における原資産価格を $S_{MS-GARCH}^{(i)}$ 、B-S モデルからモンテカルロ・シミュレーションで計算された満期における原資産価格を $S_{BS}^{(i)}$ とする。さらに、それぞれのモデルで計算された T 時点のコール・オプション価格を $\tilde{C}_{MS-GARCH}$ 、 \tilde{C}_{BS} とする。また、B-S 公式による解析解を C_{BS} とする。年間取引回数が 250 日の場合、B-S 公式の δ には上記の HV に $\sqrt{250}$ を掛けたものを用いる。これらを

使って、コール・オプション価格を次のように計算する。

$$C_T = \tilde{C}_{MS-GARCH} - \varphi \left(\tilde{C}_{BS} - C_{BS} \right). \tag{4.11}$$

上式の両辺の期待値をとると、

$$\begin{aligned}
 E[C_T] &= E \left[\tilde{C}_{MS-GARCH} - \varphi \left(\tilde{C}_{BS} - C_{BS} \right) \right] \\
 &= E \left[\tilde{C}_{MS-GARCH} \right] - \varphi \left(C_{BS} - C_{BS} \right) \\
 &= E \left[\tilde{C}_{MS-GARCH} \right]
 \end{aligned}$$

となり、左辺のモンテカルロ・シミュレーションで得られる C_T の期待値は、MS-GARCH モデルからモンテカルロ・シミュレーションで計算される $\tilde{C}_{MS-GARCH}$ の期待値と等しいことが分かる。また、(4.11) 式より、 C_T の分散は次のように表される。

$$\begin{aligned}
 Var(C_T) &= Var \left(\tilde{C}_{MS-GARCH} \right) + \varphi^2 Var \left(\tilde{C}_{BS} \right) \\
 &\quad - 2\varphi Cov \left(\tilde{C}_{MS-GARCH}, \tilde{C}_{BS} \right).
 \end{aligned}$$

この分散を最小化する φ は、上式を φ で偏微分してゼロとおき φ に関して解いた

$$\varphi = \frac{Cov \left(\tilde{C}_{MS-GARCH}, \tilde{C}_{BS} \right)}{Var \left(\tilde{C}_{BS} \right)} \tag{4.12}$$

となる。プット・オプションの計算も同様に行う。

MS-GARCH モデルの誤差項が (2.9) 式のように t 分布に従う場合には、手順 [2] において標準正規分布からではなく、自由度 ν 、分散 1 に基準化された t 分布から $\left\{ z_{T+1}^{(i)}, z_{T+2}^{(i)}, \dots \right\}$ 、

$z_{T+\tau}^{(i)} \Big\}_{i=1}^n$ をサンプリングすることになる。このサンプリングを行うには、まず、互いに独立な標準正規分布と自由度 ν の χ^2 分布からそれぞれ $x_t^{(i)}$ と $w_t^{(i)}$ をサンプリングして、

$$z_t^{(i)} = \frac{\sqrt{\nu - 2}x_t^{(i)}}{\sqrt{w_t^{(i)}}}$$

と計算すればよい。この場合、制御変量法で B-S モデルのオプション価格をモンテカルロ・シミュレーションにより求める際には、(4.10) 式の $z_t^{(i)}$ の代わりに $x_t^{(i)}$ を使って計算することになる。

5. 日経 225 オプションの実証結果

5.1 データ

本研究の実証分析には、オプション価格のデータとして 2000 年 5 月限月から 2005 年 4 月限月までの日経 225 コール・オプション (標本数

608)、プット・オプション (標本数 671) の満期から営業日ベースで 20 日前の終値を用いた⁹⁾。日経 225 オプション終値と日経 225 株価指数終値とが異時点で値付けされている可能性があるが、本研究では考慮しなかった。安全資産利子率 r のデータは、無担保コール翌日物を用いた¹⁰⁾。モデルのパラメータは、満期の 20 日前からさらに 2,500 営業日前 ($T = 2,500$) までの日経 225 株価指数日次変化率を用いて推定を行なった¹¹⁾。パラメータの推定に際しては、プログラミング言語である Ox を利用した¹²⁾。各限月に対応した 60 の異なる標本期間 (2000 年 4 月 11 日—2005 年 3 月 10 日) においてモデルの推定を行なった。各々のモデルのパラメータの平均値・最小値・最大値は、表 1—表 6 に纏められている。MS-GARCH モデルのパラメータの推定値の推移に関しては、図 1・図 2 を参照して頂きたい。

基本的な仮定として、取引費用、税金、配当は存在せず、オプションの証拠金は不要とした。

マネネス (moneyness) は Bakshi, Cao and Chen (1997) を参考にし、次のように 5 種類の

表 1. MS-GARCH-n モデルの推定結果

$$\begin{aligned}
 R_t &= r + \epsilon_t \\
 \epsilon_t &= \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.N(0,1) \\
 \sigma_t^2 &= \omega_{s_t} + \alpha_{s_t} \epsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t} E[\sigma_{t-1}^2 | I_{t-2}] \\
 \omega_{s_t} &= \omega_0(1 - s_t) + \omega_1 s_t \\
 \alpha_{s_t} &= \alpha_0(1 - s_t) + \alpha_1 s_t \\
 \beta_{s_t} &= \beta_0(1 - s_t) + \beta_1 s_t
 \end{aligned}$$

	p	q	ω_0	ω_1	α_0	α_1	β_0	β_1
平均値	0.964	0.976	0.492	1.665	0.001	0.022	0.422	0.688
最小値	0.942	0.967	0.347	0.966	0.000	0.002	0.321	0.527
最大値	0.975	0.984	0.634	2.526	0.012	0.078	0.542	0.834

	$\alpha_0 + \beta_0$	$\alpha_1 + \beta_1$	対数尤度
平均値	0.423	0.710	- 4360.646
最小値	0.321	0.579	- 4407.960
最大値	0.553	0.845	- 4286.192

表 2. MS-GARCH-t モデルの推定結果

$$R_t = r + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu)$$

$$\sigma_t^2 = \omega_{s_t} + \alpha_{s_t} \epsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t} E[\sigma_{t-1}^2 | I_{t-2}]$$

$$\omega_{s_t} = \omega_0(1 - s_t) + \omega_1 s_t$$

$$\alpha_{s_t} = \alpha_0(1 - s_t) + \alpha_1 s_t$$

$$\beta_{s_t} = \beta_0(1 - s_t) + \beta_1 s_t$$

	p	q	ω_0	ω_1	α_0	α_1	β_0	β_1
平均値	0.993	0.989	0.218	0.370	0.007	0.066	0.594	0.868
最小値	0.986	0.985	0.012	0.089	0.000	0.046	0.103	0.790
最大値	1.000	1.000	0.696	0.735	0.066	0.097	0.901	0.902

	ν	$\alpha_0 + \beta_0$	$\alpha_1 + \beta_1$	対数尤度
平均値	7.884	0.602	0.934	- 4326.645
最小値	6.930	0.103	0.875	- 4382.226
最大値	9.405	0.967	0.965	- 4249.719

表 3. GARCH-n モデルの推定結果

$$R_t = r + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.N(0, 1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

	ω	α	β	$\alpha + \beta$	対数尤度
平均値	0.063	0.084	0.889	0.973	- 4384.285
最小値	0.048	0.072	0.869	0.966	- 4425.958
最大値	0.077	0.103	0.905	0.979	- 4314.792

表 4. GARCH-t モデルの推定結果

$$R_t = r + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

	ω	α	β	ν	$\alpha + \beta$	対数尤度
平均値	0.035	0.072	0.915	7.429	0.987	- 4333.457
最小値	0.028	0.062	0.892	6.483	0.978	- 4387.870
最大値	0.049	0.092	0.927	9.247	0.989	- 4255.932

表5. MS-nモデルの推定結果

$$R_t = r + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.N(0, 1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega_0(1 - s_t) + \omega_1 s_t$$

	p	q	ω_0	ω_1	対数尤度
平均値	0.960	0.982	1.188	4.470	- 4371.224
最小値	0.947	0.980	1.110	4.049	- 4421.448
最大値	0.967	0.984	1.291	5.249	- 4294.827

表6. MS-tモデルの推定結果

$$R_t = r + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu)$$

$$\sigma_t^2 = \omega_0(1 - s_t) + \omega_1 s_t$$

	p	q	ω_0	ω_1	ν	対数尤度
平均値	0.976	0.987	1.227	4.116	9.789	- 4356.332
最小値	0.968	0.985	0.980	3.051	7.802	- 4410.443
最大値	0.990	0.990	1.340	4.976	14.106	- 4279.640

図1. MS-GARCH-nモデルのパラメータの推定値 (2000/4/11-2005/3/10)

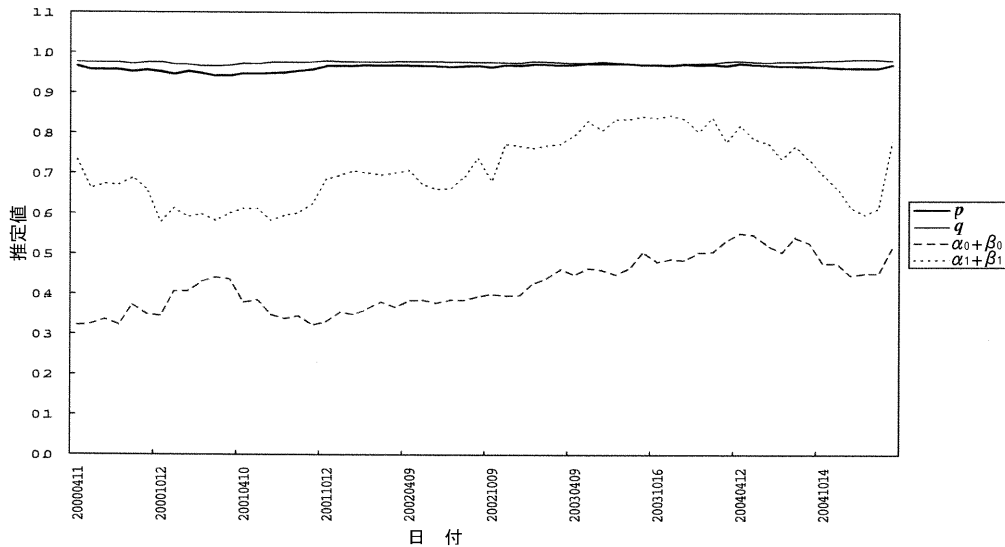


図2. MS-GARCH-tモデルのパラメータの推定値 (2000/4/11-2005/3/10)

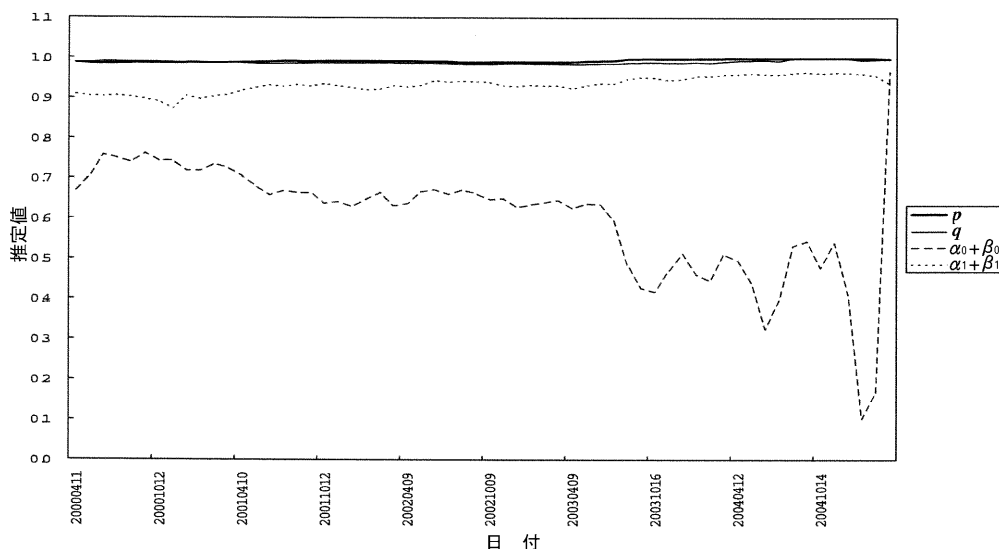


表7. マネネスによるオプションの分類

マネネス	コール	プット
$S/K < 0.91$	deep-out-of-the-money (DOTM)	DITM
$0.91 \leq S/K < 0.97$	out-of-the-money (OTM)	ITM
$0.97 \leq S/K \leq 1.03$	at-the-money (ATM)	ATM
$1.03 < S/K \leq 1.09$	in-the-money (ITM)	OTM
$1.09 < S/K$	deep-in-the-money (DITM)	DOTM

カテゴリーに分類した (表7). (i) $S/K < 0.91$ ならばコール・オプションは deep-out-of-the-money (DOTM)¹³⁾, プット・オプションは deep-in-the-money (DITM)¹⁴⁾ のオプション, (ii) $0.91 \leq S/K < 0.97$ ならばコール・オプションは out-of-the-money (OTM), プット・オプションは in-the-money (ITM) のオプション, (iii) $0.97 \leq S/K \leq 1.03$ ならばコール/プット・オプションは at-the-money (ATM) のオプション¹⁵⁾, (iv) $1.03 < S/K \leq 1.09$ ならばコール・オプションは ITM, プット・オプションは OTM のオプション, (v) $S/K > 1.09$ ならばコール・オプションは DITM, プット・オプションは DOTM のオプションである. 各カテゴリーの標本数は, コール・オプションの場合, DOTM で

193, OTM で 96, ATM で 79, ITM で 77, DITM で 163 あり, プット・オプションでは, 各々, 193, 80, 79, 87, 232 であった.

5.2 オプション価格の推定値の比較

2.3 節で示した7つのモデルによるオプション価格の推定値と実際の市場価格を用いて, 以下のように平均誤差率 (Mean Error Rate; MER) と平均2乗誤差率 (Root Mean Squared Error Rate; RMSER) を計算し, 各モデルの比較・検討を行う.

MER

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}}{X_i^{\text{市場価格}}} \right), \quad (5.2)$$

RMSE

$$= \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}}{X_i^{\text{市場価格}}} \right)^2}, \quad (5.3)$$

$X = C, P.$

ここで、 $\hat{X}_i^{\text{推定値}}$ はモンテカルロ・シミュレーションによるオプションの推定値、あるいは、B-S モデルの理論価格を表し、 $X_i^{\text{市場価格}}$ はオプションの市場価格を表す。 m は標本数である。MER, RMSE の計算結果は、表 8 - 表 11 に纏められている。

コール・オプションについては、次の 2 点が明らかになった。

(i) MER の基準では、GARCH-n モデルを用いたとき、オプション価格の推定値と市場価格の差が最も小さくなり、2 番目に小さいのは MS-GARCH-t モデルという結果になった。また、ボラティリティが変動するモデルは DOTM, OTM, ATM と ITM における B-S モデルの underpricing を修正できることが明らかになった。特に、このことは DOTM と OTM において顕著である。

(ii) RMSE の基準では、MS-GARCH-t モデルを用いたとき、オプション価格の推定値と市場価格の乖離率が最も小さくなるという結果になった。これは、コール・オプションでは、MS-GARCH-t モデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れていることを意味する。

プット・オプションの結果は、次のとおりである。

(i) MER の基準では、MS-t モデルを用いたとき、オプション価格の推定値と市場価格の差が最も小さい。

(ii) RMSE の基準では、GARCH-t モデルを

用いたとき、オプション価格の推定値と市場価格の乖離率が最も小さく、2 番目は MS-GARCH-t モデルであった。これは、プット・オプションでは、GARCH-t モデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れていることを意味する。

全体的にみると、本研究で用いた MS-GARCH モデルによるオプション評価は、オプション市場で基準 (bench mark) とされている B-S モデルよりも適正な価格付けを行うことができるという結果になった。また、原資産価格収益率に対する t 分布の仮定とボラティリティがマルコフ・スイッチング過程に従うという仮定は、オプション価格の評価において非常に重要であるということが明らかとなった。

6. 結論と今後の課題

本論文は、ボラティリティ変動モデルによるオプション評価に焦点を当て、GARCH モデルおよびそれを拡張した Gray (1996) の MS-GARCH モデルにより日経 225 オプション価格の推定を行い、日経 225 オプション市場での MS-GARCH モデルの有効性の実証的な検証を行ったものである。本研究で得られた主な結果を纏めると次のようになる。

(i) コール・オプションでは、MS-GARCH-t モデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れている。

(ii) プット・オプションでは、GARCH-t モデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れている。

(iii) 本研究で用いた MS-GARCH モデルによるオプション評価は、オプション市場で基準とされている B-S モデルよりも適正な価格付けを行うことができる。

(iv) 原資産価格収益率に対する t 分布の仮定とボラティリティがマルコフ・スイッチング

表 8. コール・オプションの推定値の比較 : MER

$$MER = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{C}_i^{\text{推定値}} - C_i^{\text{市場価格}}}{C_i^{\text{市場価格}}} \right)$$

	MS-GARCH		GARCH		MS		B-S	m
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	0.1364	0.0475	0.0051	0.3737	0.1956	0.2855	-0.1728	193
OTM	0.1444	0.0560	0.0557	0.0513	0.2059	0.2459	-0.1217	96
ATM	-0.0381	-0.0372	-0.0430	-0.0551	-0.0257	-0.0118	-0.0926	79
ITM	-0.0196	-0.0203	-0.0240	-0.0233	-0.0189	-0.0138	-0.0296	77
DITM	-0.0057	-0.0057	-0.0064	-0.0050	-0.0060	-0.0051	-0.0040	163
Total	0.0571	0.0150	0.0001	0.1153	0.0872	0.1248	-0.0909	608

表 9. コール・オプションの推定値の比較 : RMSE

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{C}_i^{\text{推定値}} - C_i^{\text{市場価格}}}{C_i^{\text{市場価格}}} \right)^2}$$

	MS-GARCH		GARCH		MS		B-S	m
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	1.1027	0.9076	0.9499	1.2561	1.2430	1.2414	1.3457	193
OTM	0.7139	0.4061	0.4809	0.4391	0.9363	0.9053	0.6114	96
ATM	0.1859	0.1359	0.1645	0.1555	0.2095	0.2030	0.2277	79
ITM	0.0804	0.0716	0.0767	0.0740	0.0816	0.0785	0.0883	77
DITM	0.0789	0.0788	0.0784	0.0781	0.0791	0.0791	0.0780	163
Total	0.6881	0.5406	0.5735	0.7326	0.7982	0.7915	0.8020	608

表 10. プット・オプションの推定値の比較 : MER

$$MER = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{P}_i^{\text{推定値}} - P_i^{\text{市場価格}}}{P_i^{\text{市場価格}}} \right)$$

	MS-GARCH		GARCH		MS		B-S	m
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	-0.6488	-0.6828	-0.7028	-0.5881	-0.6264	-0.5964	-0.8023	193
OTM	-0.1361	-0.1871	-0.1892	-0.1970	-0.1024	-0.0849	-0.3319	80
ATM	-0.0648	-0.0513	-0.0624	-0.0706	-0.0522	-0.0366	-0.0940	79
ITM	-0.0068	-0.0019	-0.0065	-0.0035	-0.0049	0.0018	-0.0024	87
DITM	-0.0013	-0.0011	-0.0011	-0.0001	-0.0010	-0.0011	0.0022	232
Total	-0.2118	-0.2254	-0.2333	-0.2014	-0.1995	-0.1861	-0.2810	671

表 11. プット・オプションの推定値の比較: RMSER

$$RMSER = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{P}_i^{\text{推定値}} - P_i^{\text{市場価格}}}{P_i^{\text{市場価格}}} \right)^2}$$

	MS-GARCH		GARCH		MS		B-S	m
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	0.7298	0.7430	0.7457	0.6506	0.7384	0.7156	0.8573	193
OTM	0.3897	0.3081	0.3301	0.3175	0.4635	0.4417	0.4974	80
ATM	0.1753	0.1545	0.1655	0.1658	0.1781	0.1742	0.2322	79
ITM	0.0957	0.0928	0.0911	0.0921	0.0969	0.0982	0.1058	87
DITM	0.0718	0.0723	0.0730	0.0732	0.0717	0.0718	0.0733	232
Total	0.4218	0.4193	0.4232	0.3741	0.4350	0.4209	0.5006	671

過程に従うという仮定は、オプション価格の評価において非常に重要である。

今後の課題としては、次の4点が考えられる。

- (i) MS-GARCH モデルとしては他に Klaassen (2002), Haas, Mittnik and Paoella (2004) があり、これらのモデルによるオプション評価との比較を行うこと。
- (ii) もう一つの代表的なボラティリティ変動モデルである確率的分散変動 (stochastic volatility) モデルによるオプション価格とのパフォーマンスの比較を行うこと¹⁶⁾。
- (iii) 投資家の危険中立性を仮定するのではなく、原資産収益率の過程にリスク・プレミアムを考慮して定式化を行うこと。
- (iv) ボラティリティ変動モデルによるオプション価格を詳細に分析すること。特に、異なる行使日までの期間、インプライド・ボラティリティ (implied volatility), ボラティリティ・スマイル (volatility smile) などについても研究すること。

(東洋大学経営学部専任講師)

(日本大学経済学部専任講師)

†) 〒 112-8606 東京都文京区白山 5-28-20.

e-mail: satoyoshi@toyonet.toyo.ac.jp

‡) 〒 101-8360 東京都千代田区三崎町 1-3-2.

e-mail: mitsui@eco.nihon-u.ac.jp

*) 本研究は、全国銀行学術研究振興財団 (平成 15 年度) より研究助成を受けている。また、本研究で使用した日経 225 オプションのデータは、大阪証券取引所から提供して頂いた。ここに記して感謝の意を表したい。

注

- 1) 満期日 (権利消滅日) にのみ権利行使可能なオプションをヨーロッパ・オプション (European option) と呼び、満期日以前にいつでも権利行使可能なオプションをアメリカン・オプション (American option) と呼ぶ。
- 2) ボラティリティは資産収益率の分散 (variance) あるいは標準偏差 (standard deviation) により定義され、ファイナンス理論では危険資産 (株式など将来の収益が不確定な資産) のリスクの指標として用いられる。
- 3) ARCH 型モデルに関して、統計的性質・方法については Bera and Higgins (1993), Bollerslev, Engle and Nelson (1994), ファイナンスの実証研究については Bollerslev, Chou and Kroner (1992), Shephard (1996) を参照。
- 4) これらの研究は投資家の危険中立性を仮定しているためリスク・プレミアム (risk premium) を考慮していない。そのため資産収益率の期待値のみによって危険資産の評価を行うことになり、危険資

産の期待収益率は安全資産の期待収益率に等しくなる。

- 5) 詳しくは、三井（2004，第1章）を参照。
- 6) r と連続複利方式の利子率 r^* の間には、 $r^* = \ln(1+r)$ という関係が成立する。
- 7) 他の方法としては、Duan and Simonato（1998）は経験的マルチンゲール・シミュレーション（empirical martingale simulation）を利用する方法を提案している。モンテカルロ実験では、経験的マルチンゲール・シミュレーションはモンテカルロ・シミュレーションや Barraquand（1995）のモーメント・マッチング・シミュレーション（moment matching simulation）よりも効率的であるという結果が得られている（刈屋（1997，第7章）参照）。また、Duan, Gauthier and Simonato（1999）は、経験的マルチンゲール準モンテカルロ（empirical martingale quasi-monte carlo）シミュレーションが、経験的マルチンゲール・シミュレーションよりも効率的であるという結果を得ている。
- 8) この他にも、層別サンプリング（stratified sampling）、ラテン・ハイパーキューブ・サンプリング（latin hypercube sampling）、加重サンプリング（importance sampling）などの様々な手法が提案されている。これらの数値解法によるオプション評価に関して詳しくは、Broadie and Glasserman（1996）、Boyle, Broadie and Glasserman（1997）、Ross（2002，Chapter 8）、Jäckel（2002）、Seydel（2002，Chapter 3）、Tavella（2002，Chapter 5, 6）などを参照して頂きたい。
- 9) 日経 225 オプションのデータは、大阪証券取引所から提供して頂いた。
- 10) 無担保コール翌日物のデータは、日経 NEEDS-Financial QUEST を利用した。
- 11) 日経 225 株価指数（日経平均）のデータは、日経 NEEDS-Financial QUEST を利用した。
- 12) <http://www.doornik.com/ox/>
- 13) far-out-of-the-money と呼ぶこともある。
- 14) far-in-the-money と呼ぶこともある。
- 15) 実際には、厳密に ATM になる可能性はほとんど

ないため、ATM 付近のオプションを near-the-money オプションと呼ぶこともある。

- 16) 日経 225 オプション市場における確率的分散変動モデルによるオプション評価の実証研究として詳しくは、三井（2004，第2章）を参照。

参考文献

- 刈屋武昭（1997）『金融工学の基礎』東洋経済新報社。
- 三井秀俊（2000）「日経 225 オプション価格の GARCH モデルによる分析」MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』No. 7, pp. 57-73.
- （2004）『オプション価格の計量分析』税務経理協会。
- （2005）「非対称確率的ボラティリティ・モデルによる日経 225 オプション価格の分析」日本大学経済学部経済科学研究『紀要』第 35 号, pp. 135-153.
- 三井秀俊・渡部敏明（2003）「ベイズ推定法による GARCH オプション価格付けモデルの分析」日本統計学会『日本統計学会誌』第 33 巻, 第 3 号, pp. 307-324.
- 森保洋（1999）「ARCH モデルによる日経 225 オプション評価」『現代経済学研究』第 7 号, pp. 143-159.
- 渡部敏明（2003）「日経 225 オプションデータを使った GARCH オプション価格付けモデルの検証」日本銀行金融研究所『金融研究』第 22 巻, 別冊第 2 号, pp. 1-34.
- Bakshi, G., C. Cao and Z. Chen（1997）“Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models,” *Journal of Finance*, 52, pp. 2003-2049.
- Barraquand, J.（1995）“Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate European Securities,” *Management Science*, 41, pp. 1882-1891.
- Bauwens, L. and M. Lubrano（1998）“Bayesian Inference on GARCH Models Using the Gibbs Sampler,” *Econometrics Journal*, 1, pp. C23-C46.
- （2002）“Bayesian Option Pricing Using Asymmetric GARCH Models,” *Journal of Empirical Finance*, 9, pp. 321-342.

- Bera, A. K. and M. L. Higgins (1993) "On ARCH Models: Properties, Estimation and Testing," *Journal of Economic Surveys*, 7, pp. 305-366.
- Black, F. and M. Scholes (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-654.
- Bollerslev, T. (1986) "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.
- Bollerslev, T., R. Y. Chou and K. F. Kroner (1992) "ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence," *Journal of Econometrics*, 52, pp. 5-59.
- Bollerslev, T., R. F. Engle and D. B. Nelson (1994) "ARCH Models," R. F. Engle and D. McFadden (eds.), *The Handbook of Econometrics*, Vol.4, pp. 2959-3038, North-Holland.
- Boyle, P., M. Broadie and P. Glasserman (1997) "Monte Carlo Methods for Security Pricing," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, pp. 1267-1321.
- Broadie, M. and P. Glasserman (1996) "Estimating Security Price Derivatives Using Simulation," *Management Science*, 42, pp. 269-285.
- Cai, J. (1994) "A Markov Model of Switching-Regime ARCH," *Journal of Business & Economic Statistics*, 12, pp. 309-316.
- Diebold, F. X. (1986) "Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment," *Econometric Reviews*, 5, pp. 51-56.
- Duan, J.-C. (1995) "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance*, 5, pp. 13-32.
- Duan, J. -C. and J. -G. Simonato (1998) "Empirical Martingale Simulation for Asset Prices," *Management Science*, 44, pp. 1218-1233.
- Duan, J. -C. and H. Zhang (2001) "Pricing Hang Seng Index Options around the Asian Financial Crisis - A GARCH Approach," *Journal of Banking & Finance*, 25, pp. 1989-2014.
- Duan, J. -C., G. Gauthier and J. -G. Simonato (1999) "An Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing Model," *Journal of Computational Finance*, 2, pp. 75-116.
- Engle, R. F. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 50, pp. 987-1007.
- Engle, R. F. and C. Mustafa (1992) "Implied ARCH Models from Options Prices," *Journal of Econometrics*, 52, pp. 289-311.
- Gray, S. F. (1996) "Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process," *Journal of Financial Economics*, 42, pp. 27-62.
- Hamilton, J. D. (1989) "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle," *Econometrica*, 57, pp. 357-384.
- Hamilton, J. D. and R. Susmel (1994) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime," *Journal of Econometrics*, 64, pp. 307-333.
- Haas, M., S. Mittnik and M. S. Paoletta (2004) "A New Approach to Markov-Switching GARCH Models," *Journal of Financial Econometrics*, 2, pp. 493-530.
- Jäckel, P. (2002) *Monte Carlo Methods in Finance*, John Wiley & Sons.
- Klaassen, F. (2002) "Improving GARCH Volatility Forecasts with Regime-Switching GARCH," *Empirical Economics*, 27, pp. 363-394.
- Lamoureux, C. G. and W. D. Lastrapes (1990) "Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model," *Journal of Business & Economic Statistics*, 8, pp. 225-234.
- Noh, J., R. F. Engle and A. Kane (1994) "Forecasting Volatility and Option Pricing of the S&P500 Index," *Journal of Derivatives*, pp.17-30, Reprinted in Engle, R. F. (ed.), *ARCH: Selected Readings*, (1995), Chapter 15, Oxford, Oxford University Press.
- Ross, S. M. (2002) *Simulation*, 3rd ed., Academic Press.
- Sabbatini, M. and O. Linton (1998) "A GARCH Model of the Implied Volatility of the Swiss Market Index from Option Prices," *International Journal of Fore-*

- casting, 14, pp. 199-213.
- Saez, M. (1997) "Option Pricing under Stochastic Volatility and Interest Rate in the Spanish Case," *Applied Financial Economics*, 7, pp. 379-394.
- Shephard, N. (1996) "Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility," in D. R. Cox, D. V. Hinkley and O. E. Barndorff-Nielsen (eds.), *Time Series Models in Econometrics, Finance and other Fields*, No. 65 in Monographs on Statistics and Applied Probability, pp. 1-67, Chapman & Hall.
- Seydel, R. (2002), *Tools for Computational Finance*, Springer-Verlag.
- Tavella, D. (2002), *Quantitative Methods in Derivatives Pricing*, John Wiley & Sons.

略語一覧

ARCH	:	Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity
ATM	:	at-the-money
B-S	:	Black-Scholes
DITM	:	deep-in-the-money
DOTM	:	deep-out-of-the-money
GARCH	:	Generalized-ARCH
HV	:	Historical Volatility
ITM	:	in-the-money
MER	:	Mean Error Rate
MS	:	Markov Switching
OTM	:	out-of-the-money
RMSE	:	Root Mean Squared Error Rate

表記一覧

C	:	ヨーロッパン・コール・オプション価格
D	:	HV の過去の日数
dt	:	時間の微小変化 (infinitesimal change of time)
dW	:	ウィナー過程 (Wiener process)
$E[\cdot]$:	期待値 (expected value)
$E[\cdot \cdot]$:	条件付期待値 (conditional expected value)
$f(\cdot)$:	確率密度関数 (probability density function)
I	:	利用可能な情報集合 (information set)
<i>i.i.d.</i>	:	独立同一分布 (independent and identically distributed)
K	:	権利行使価格 (strike price, exercise price)
$L(\cdot)$:	尤度関数 (likelihood function)
m	:	オプションの標本数
$N(0, 1)$:	平均 0, 分散 1 の標準正規分布 (standard normal distribution)
n	:	モンテカルロ・シミュレーションの試行回数
P	:	ヨーロッパン・プット・オプション価格
$P[\cdot]$:	確率測度 (probability measure)
$P[\cdot \cdot]$:	条件付確率測度 (conditional probability measure)
p	:	推移確率 (transition probability)
q	:	推移確率
R	:	原資産価格収益率 (rate of return)
r	:	安全資産利子率 (risk-free interest rate)
r^*	:	連続複利方式による安全資産利子率
S	:	原資産価格 (asset price)
s	:	状態変数 (state variable)
$t(0, 1, \nu)$:	平均 0, 分散 1, 自由度 ν の t 分布 (t-distribution)
u	:	<i>i.i.d.</i> の標準一様分布に従う確率変数
$Var[\cdot]$:	分散 (variance)
$Var[\cdot \cdot]$:	条件付分散 (conditional variance)
w	:	<i>i.i.d.</i> の自由度 ν の χ^2 分布に従う確率変数
x	:	<i>i.i.d.</i> の標準正規分布に従う確率変数
α	:	ARCH 型モデルの過去の収益率の 2 乗のパラメータ
β	:	ARCH 型モデルの過去のボラティリティのパラメータ
$\Gamma(\cdot)$:	ガンマ関数 (gamma function)
ϵ	:	誤差項 (error term)
θ	:	未知のパラメータ集合
μ	:	期待収益率
ν	:	自由度 (degree of freedom)
π	:	定常確率 (steady-state probability)
σ^2	:	ボラティリティ (volatility)
τ	:	オプションの残存期間
φ	:	制御変量法による分散を最小にする定数
ω	:	ARCH 型モデルの定数項 (constant term)