

期待収益率スイッチング・モデルによる 日経 225 オプションの実証研究^{*}

里吉清隆^{†)}・三井秀俊^{‡)}

1. はじめに

原資産収益率のボラティリティはオプション価格付け理論において重要な役割を果たしており、オプション価格に対して感応度の高いパラメータである。Black-Scholes (1973) モデル (以下、BS モデル) ではオプション価格のモデルを導く際に、原資産価格が対数正規分布に従うことだけでなく、ボラティリティが時間を通じて一定であることを仮定している。しかしながら、経験的な事実として、原資産収益率のボラティリティは時間を通じて変動していることが知られている。したがって、近年のオプション市場分析においては、ボラティリティの時系列的変動をどのように定式化してオプション価格を評価すればよいか非常に重要な問題となっている。Engle (1982) はその変動を明示的に捉えるために、各時点のボラティリティを過去の予期しないショックの 2 乗の線型関数として定式化する ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) モデルを提案した。また、Bollerslev (1986) はボラティリティの説明変数に過去のボラティリティの値を加えて、GARCH (generalized ARCH) モデルと呼ばれるより一般的なモデルに拡張している¹⁾。

ところで、ARCH モデルを始めとしたボラティリティ変動モデルの研究では、一般に、ボラティリティに対するショックの持続性が非常に高いことが知られている。しかし、Diebold (1986) と Lamoureux and Lastrapes (1990) が指摘しているように、このような持続性はボラティリティの構造変化によって引き起こされた可能性が考えら

れる。このことから、Hamilton and Susmel (1994) と Cai (1994) は、構造変化を捉えるために ARCH モデルの定式化にマルコフ過程に従う状態変数を含めたマルコフ・スイッチング ARCH (markov-switching ARCH; MSARCH) モデルを提案している。さらに、Gray (1996) は ARCH モデルではなく GARCH モデルに構造変化を含めたマルコフ・スイッチング GARCH (markov-switching GARCH; MSGARCH) モデルを提案した²⁾。

里吉 (2004) は MSGARCH モデルによる TOPIX の実証分析を行い、TOPIX 変化率はスイッチングを起こしていること、また、日次データのボラティリティの予測は従来の GARCH モデルよりも優れていることを示した。この結果を踏まえて、里吉・三井 (2006) は MSGARCH モデルを用いて日経 225 オプションに関する実証分析を行い、コール・オプションの評価では、誤差項に t 分布を仮定した MSGARCH モデルは、従来の GARCH モデルや BS モデルに比べてパフォーマンスが優れているという結果を得た。MSGARCH モデルは、マルコフ・スイッチング・モデルと GARCH モデルを組み合わせたモデルであり、原資産価格の収益率の分布の裾の厚さの特徴を十分に表現することができることから、オプション評価のパフォーマンスが向上したと考えられる。しかし、ここでは期待収益率を定数として収益率の式を定式化したため、分布の歪みについては全く考慮していなかった。そこで、本研究では、原資産のボラティリティだけでなく、期待収益率もマルコフ・スイッチングを起こす MS-

GARCH モデルを用いて日経 225 オプション価格の評価を行い、更なるパフォーマンスの向上が期待できるのかどうかを検証することにした。

日経 225 オプションのようなヨーロピアン・オプションの価格は、投資家の危険中立性を仮定するとモンテカルロ・シミュレーションによって簡単に導出することができる。また、本研究ではシミュレーションの収束を早める手段として、負相関法と制御変量法の 2 つの分散減少法を用いた。実証分析の結果、コール・オプションの評価では、期待収益率のスイッチングを考慮した MSGARCH モデルは、BS モデルや従来の GARCH モデル、期待収益率が定数である MSGARCH モデルよりも適正に価格付けされることが明らかになった。しかし、プット・オプションでは、本研究のモデルの有効性は示されなかった。

本論文の以下の構成は次の通りである。2 章では、MSGARCH モデルと危険中立性を仮定した場合の収益率の定式化について解説し、本研究で比較するモデルについて述べる。3 章では、モンテカルロ・シミュレーションによるヨーロピアン・オプションの評価法を説明する。実証分析の結果は 4 章にまとめた。5 章は結論、6 章は補論である。

2. 分析モデル

2.1 マルコフ・スイッチング GARCH モデル

Gray (1996) は資産価格の変動を捉えるために、時系列モデルのパラメータがマルコフ過程に従う MSGARCH モデルを提案した。t 時点の原資産価格の収益率を R_t とすると、MSGARCH モデルは以下のように表される。

$$R_t = \mu_0(1 - s_t) + \mu_1 s_t + \sqrt{V[R_t | s_t, I_{t-1}]} z_t, \quad (2.1)$$

$$z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, V[z_t] = 1, \quad (2.2)$$

$$V[R_t | s_t, I_{t-1}] = \omega_{s_t} + \alpha_{s_t} \epsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t} V[R_{t-1} | I_{t-2}], \quad (2.3)$$

$$\epsilon_{t-1} = R_{t-1} - E[R_{t-1} | I_{t-2}], \quad (2.4)$$

$$\omega_{s_t} = \omega_0(1 - s_t) + \omega_1 s_t, \quad (2.5)$$

$$\alpha_{s_t} = \alpha_0(1 - s_t) + \alpha_1 s_t, \quad (2.6)$$

$$\beta_{s_t} = \beta_0(1 - s_t) + \beta_1 s_t. \quad (2.7)$$

(2.1) 式の収益率 R_t の定義については、2.2 節で述べる。 $V[R_t | s_t, I_{t-1}]$ はボラティリティであり、t-1 時点までの情報集合 $I_{t-1} = \{R_{t-1}, R_{t-2}, \dots\}$ と、t 時点の状態変数 s_t を条件とした R_t の条件付き分散となっている。(2.2) 式の *i.i.d.* は、過去と独立で同一な分布 (independent and identically distributed) を表す。(2.4) 式の条件付き期待値 $E[R_{t-1} | I_{t-2}]$ は、

$$E[R_{t-1} | I_{t-2}] = \mu_0 Pr[s_{t-1} = 0 | I_{t-2}] + \mu_1 Pr[s_{t-1} = 1 | I_{t-2}] \quad (2.8)$$

となる。(2.1), (2.3), (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) 式の s_t はマルコフ過程に従う状態変数であり、その推移確率 (transition probability) は、

$$\begin{aligned} Pr[s_t = 1 | s_{t-1} = 1] &= p, \\ Pr[s_t = 0 | s_{t-1} = 0] &= q \end{aligned} \quad (2.9)$$

であるとする。ただし、 $Pr[s_t = j | s_{t-1} = i]$ は、状態 i から状態 j に推移する確率である。

この MSGARCH モデルにおける R_t の分布は、 I_{t-1} を条件とした時、期待収益率とボラティリティが異なる 2 つの分布からなる混合分布となっている。つまり、 $s_t = 0$ の時、期待収益率とボラティリティはそれぞれ

$$E[R_t | s_t = 0, I_{t-1}] = \mu_0,$$

$$V[R_t | s_t = 0, I_{t-1}] = \omega_0 + \alpha_0 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_0 V[R_{t-1} | I_{t-2}]$$

であり、 $s_t = 1$ のときは、

$$E[R_t | s_t = 1, I_{t-1}] = \mu_1, \\ V[R_t | s_t = 1, I_{t-1}] = \omega_1 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 V[R_{t-1} | I_{t-2}]$$

となる。

ボラティリティ変動モデルを推定する場合、誤差項の分布には標準正規分布を仮定することが多い。資産価格の収益率の分布は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることが古くから知られているが、誤差項が正規分布に従っていても、ボラティリティが変動するなら収益率の尖度は3を上回る³⁾。しかし、収益率の尖度の高さがボラティリティの変動だけで説明できるとは限らず、実際、多くの先行研究では、誤差項の分布に正規分布よりも尖度の高い分布を用いた方が当てはまりが良いとの結果が得られている。したがって、本研究では、誤差項の分布に正規分布と t 分布の両方を適用することにする。誤差項が標準正規分布に従う場合、(2.2) 式の z_t は、

$$z_t \sim i.i.d.N(0, 1) \quad (2.10)$$

となる。 t 分布 (t -distribution) に従う場合には、

$$z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu) \quad (2.11)$$

とする。ここでは z_t の分散は1に基準化されている。 ν は自由度 (degree of freedom) である。

ここで、もし仮に GARCH モデルにマルコフ・スイッチングに従う状態変数を直接導入すると、ボラティリティの式は、

$$V[R_t | s_t, I_{t-1}] = \omega_{s_t} + \alpha_{s_t} \epsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t} V[R_{t-1} | s_{t-1}, I_{t-2}]$$

となり、(2.3) 式と比較すると、右辺にある1期前のボラティリティが異なっていることが分かる。しかし、このように定式化すると $V[R_t | s_t, I_{t-1}]$ は t 時点の s_t だけでなく、 t 時点までのすべての状態変数 (s_t, s_{t-1}, \dots, s_1) に依存してしまうため、最尤法で推定することができなくなってしまう。そこで、Gray (1996) のモデルでは、(2.3) 式のように右辺第3項のボラティリティを $V[R_{t-1} | I_{t-2}]$ としている。 $V[R_{t-1} | I_{t-2}]$ は、

$$V[R_{t-1} | I_{t-2}] = Pr[s_{t-1} = 0 | I_{t-2}] (\mu_0^2 + V[R_{t-1} | s_{t-1} = 0, I_{t-2}]) + Pr[s_{t-1} = 1 | I_{t-2}] (\mu_1^2 + V[R_{t-1} | s_{t-1} = 1, I_{t-2}]) - (\mu_0 Pr[s_{t-1} = 0 | I_{t-2}] + \mu_1 Pr[s_{t-1} = 1 | I_{t-2}])^2 \quad (2.12)$$

と計算される。この時 $V[R_t | s_t, I_{t-1}]$ は t 時点の s_t のみに依存することになるので、Hamilton (1989) のフィルタリング手法 (ハミルトン・フィルタ) から $Pr[s_t = j | I_{t-1}]$ ($j = 0, 1$) を求めることにより、最尤法 (maximum likelihood method) で推定することができる。詳しい推定法は補論の6.1節で解説する。

里吉・三井 (2006) では、原資産価格の期待収益率は定数であると仮定して、MSGARCH モデルによるオプションの評価を行った。つまり、収益率の式を $R_t = \mu + \sqrt{V[R_t | s_t, I_{t-1}]} z_t$ としていた。本研究ではこの仮定を緩めて、(2.1) 式のようにボラティリティと同時に期待収益率もスイッチングさせている。このように定式化することによって、収益率の分布の裾の厚さだけでなく、分布の歪みも捉えることができるようになる。その結果、オプション評価のパフォーマンスが向上することが期待される。

図1と図2は、期待収益率のスイッチングにより分布の歪みが生じることを図示したものである。図1の太線は、2つの正規分布 $N(0, 1)$, N

図 1. ボラティリティのみがスイッチングする場合

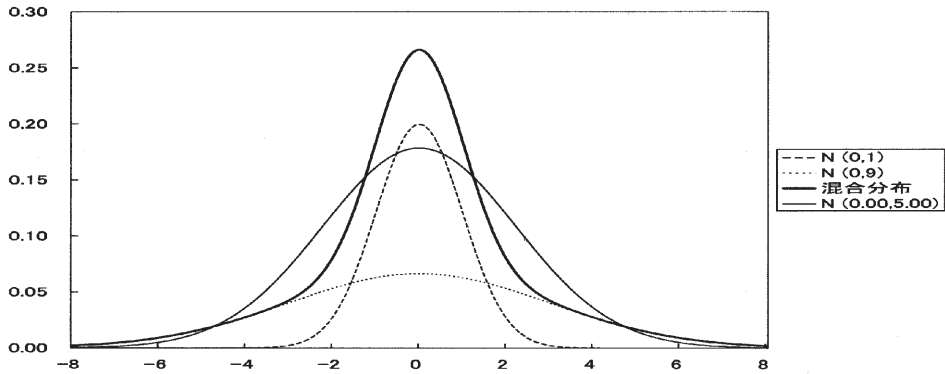
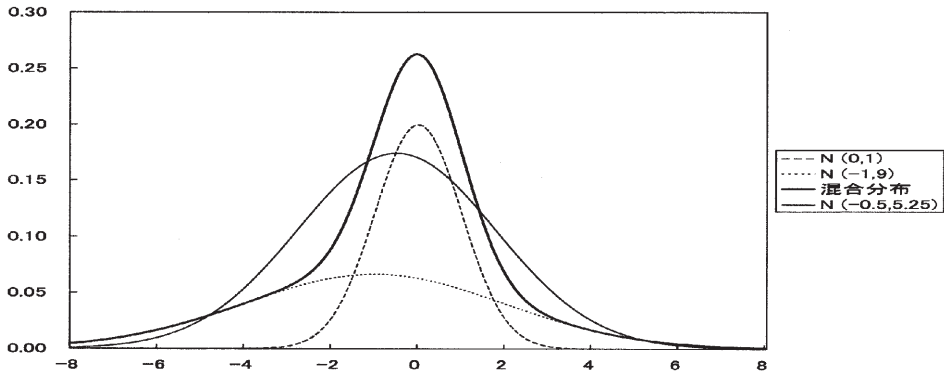


図 2. 期待収益率とボラティリティがスイッチングする場合



(0, 9) からなる混合正規分布 (加重値は同じ) のグラフである。この混合正規分布の平均は $E[X] = 0$ 、分散は $V[X] = 5$ であり、そのような平均と分散を持つ正規分布 $N(0, 5)$ も細線で描いてある。この図から明らかなように、混合正規分布は正規分布よりも裾の厚い分布になる。図 2 は、2 つの正規分布 $N(0, 1)$ 、 $N(-1, 9)$ からなる混合正規分布 (加重値は同じ) と、混合正規分布と同じ平均と分散を持つ正規分布 $N(-0.5, 5.25)$ のグラフである。図 1 のケースとは違い、平均を異なる値にすることによって、混合正規分布は分布の裾の厚さだけでなく、分布の歪みも表現できることが分かる。

2.2 投資家の危険中立性と収益率の定式化

t 時点のオプションの原資産価格を S_t とする。本研究では、 t 時点の原資産価格の収益率 R_t を以下のように定義する⁴⁾。

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \quad (2.13)$$

本研究では、投資家は危険中立的 (risk neutral) であると仮定している。したがって、 t 時点の安全資産の利子率を r_t とした時、 $t-1$ 時点までの情報 I_{t-1} が与えられたもとでの t 時点の原資産の期待収益率 $E[R_t | I_{t-1}]$ は r_t と等しくなる。 R_t は (2.13) 式として定義されているので、代入

して書き換えると,

$$E \left[\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \middle| I_{t-1} \right] = r_t,$$

つまり,

$$E[S_t | I_{t-1}] = S_{t-1}(1 + r_t)$$

となり, 危険中立性が成立していることが確認できる.

本研究のモデルでは, I_{t-1} を条件とした t 時点の原資産の期待収益率 $E[R_t | I_{t-1}]$ は, (2.1) 式より

$$E[R_t | I_{t-1}] = \mu_0 \Pr[s_t = 0 | I_{t-1}] + \mu_1 \Pr[s_t = 1 | I_{t-1}]$$

となるので, 危険中立性より,

$$r_t = \mu_0 \Pr[s_t = 0 | I_{t-1}] + \mu_1 \Pr[s_t = 1 | I_{t-1}]$$

が成立する. この式を μ_1 について解き, (2.1) 式に代入すると,

$$R_t = \mu_0(1 - s_t) + \frac{r_t - \mu_0 \Pr[s_t = 0 | I_{t-1}]}{\Pr[s_t = 1 | I_{t-1}]} s_t + \sqrt{V[R_t | s_t, I_{t-1}]} z_t \quad (2.14)$$

となる. したがって, 原資産の収益率を表す式としては, (2.1) 式ではなく (2.14) 式を用いることになり, これによって, 期待収益率の変動を考慮したオプションの評価を行うことができる. また, (2.8), (2.12) 式はそれぞれ次のようになる.

$$E[R_{t-1} | I_{t-2}] = r_{t-1}, \quad (2.15)$$

$$V[R_{t-1} | I_{t-2}]$$

$$= \Pr[s_{t-1} = 0 | I_{t-2}]$$

$$(\mu_0^2 + V[R_{t-1} | s_{t-1} = 0, I_{t-2}])$$

$$+ \Pr[s_{t-1} = 1 | I_{t-2}]$$

$$\{(\mu_{1,t-1}^*)^2 + V[R_{t-1} | s_{t-1} = 1, I_{t-2}]\}$$

$$- r_{t-1}^2. \quad (2.16)$$

ただし,

$$\mu_{1,t-1}^* = \frac{r_{t-1} - \mu_0 \Pr[s_{t-1} = 0 | I_{t-2}]}{\Pr[s_{t-1} = 1 | I_{t-2}]}$$

である. このことから, (2.4) 式の $E[R_{t-1} | I_{t-2}]$ は (2.15) 式, (2.3) 式の $V[R_{t-1} | I_{t-2}]$ は (2.16) 式を使って計算される. 便宜上, ここまでのモデルを **MSGARCH-m** モデルと呼ぶことにする.

2.3 本研究で比較するモデル

本研究では, 上記の **MSGARCH-m** モデルだけでなく, 定式化の異なるいくつかのボラティリティ変動モデルも併せて, オプションの評価を行う. 里吉・三井 (2006) では, 期待収益率を定数とした次のような **MSGARCH** モデルを用いた.

$$R_t = r_t + \sqrt{V[R_t | s_t, I_{t-1}]} z_t, \quad (2.17)$$

$$V[R_t | s_t, I_{t-1}] = \omega_{s_t} + \alpha_{s_t} \epsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t} V[R_{t-1} | I_{t-2}]. \quad (2.18)$$

(2.18) 式の右辺の $V[R_{t-1} | I_{t-2}]$ は,

$$V[R_{t-1} | I_{t-2}] = \Pr[s_{t-1} = 0 | I_{t-2}] V[R_{t-1} | s_{t-1} = 0, I_{t-2}] + \Pr[s_{t-1} = 1 | I_{t-2}] V[R_{t-1} | s_{t-1} = 1, I_{t-2}] \quad (2.19)$$

となる. 通常の **GARCH** モデルは,

表1. 本研究で用いるボラティリティ変動モデル

モデル	収益率	ボラティリティ	誤差項	推移確率
MSGARCH-m-n	(2.14)	(2.3)–(2.7), (2.15), (2.16)	(2.10)	(2.9)
MSGARCH-m-t	(2.14)	(2.3)–(2.7), (2.15), (2.16)	(2.11)	(2.9)
MSGARCH-n	(2.17)	(2.4)–(2.7), (2.15), (2.18), (2.19)	(2.10)	(2.9)
MSGARCH-t	(2.17)	(2.4)–(2.7), (2.15), (2.18), (2.19)	(2.11)	(2.9)
GARCH-n	(2.20)	(2.4), (2.15), (2.21)	(2.10)	–
GARCH-t	(2.20)	(2.4), (2.15), (2.21)	(2.11)	–
MS-m-n	(2.14)	(2.22)	(2.10)	(2.9)
MS-m-t	(2.14)	(2.22)	(2.11)	(2.9)
MS-n	(2.17)	(2.22)	(2.10)	(2.9)
MS-t	(2.17)	(2.22)	(2.11)	(2.9)

$$R_t = r_t + \sqrt{V[R_t|I_{t-1}]}z_t, \quad (2.20)$$

$$V[R_t|I_{t-1}] = \omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta V[R_{t-1}|I_{t-2}] \quad (2.21)$$

である。期待収益率とボラティリティの両方がスイッチングを起こすマルコフ・スイッチング・モデルでは、収益率は (2.14) 式、ボラティリティは、

$$V[R_t|s_t, I_{t-1}] = \omega_0(1 - s_t) + \omega_1 s_t \quad (2.22)$$

と定式化される。このモデルを **MS-m** モデルと呼ぶことにする。期待収益率を定数とすると、収益率は (2.17) 式、ボラティリティは (2.22) 式となり、これを **MS** モデルとする。

本研究では、これらのボラティリティ変動モデルをオプションの価格付けに適用し、モデルの比較を行う。それぞれのモデルの数式は表1の通りである。“-n”は誤差項が正規分布に従うことを表し、“-t”は誤差項がt分布に従うことを表す。さらに、**BS** モデルによって計算したオプション価格についても、分析の対象に含めることにした⁵⁾。

3. オプション価格の導出方法

3.1 危険中立性の下でのオプション価格

投資家が危険中立的な場合、ヨーロッパアン・オプションの価格は、満期におけるオプション価格の期待値を安全資産の利率 r で割引いた割引現在価値となる。すなわち、 $T + \tau$ 時点が満期で権利行使価格 K のコール・オプションの T 時点の価格を C_T 、プット・オプションの価格を P_T とすると、

$$C_T = (1 + r)^{-\tau} E[Max(S_{T+\tau} - K, 0)], \quad (3.1)$$

$$P_T = (1 + r)^{-\tau} E[Max(K - S_{T+\tau}, 0)] \quad (3.2)$$

と表される⁶⁾。ここで、 $S_{T+\tau}$ はオプションの満期の原資産価格である。MSGARCH モデルの場合、右辺の期待値を解析的に求めることができないので、モンテカルロ・シミュレーションによって評価する。シミュレーションを n 回行い、 n 個の満期の原資産価格 $S_{T+\tau}$ が得られたとして、これらを $(S_{T+\tau}^{(1)}, S_{T+\tau}^{(2)}, \dots, S_{T+\tau}^{(n)})$ とする。た

だし、 $S_{T+\tau}^{(i)}$ は i 回目のパスの発生によって得られた満期の原資産価格である。 n が十分に大きい時、大数の法則 (law of large numbers) より (3.1), (3.2) 式の期待値はそれぞれ以下の式によって評価することができる。

$$E[Max(S_{T+\tau} - K, 0)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Max(S_{T+\tau}^{(i)} - K, 0), \quad (3.3)$$

$$E[Max(K - S_{T+\tau}, 0)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Max(K - S_{T+\tau}^{(i)}, 0). \quad (3.4)$$

3.2 モンテカルロ・シミュレーションの手順

本研究のモデルにおけるオプション価格のモンテカルロ・シミュレーションによる計算手順は、以下の通りである。ここでは、誤差項が正規分布に従う MSGARCH-m-n モデルについて説明する。

- [1] 標本 $\{R_1, R_2, \dots, R_T\}$ を使って、MSGARCH-m-n モデルの未知パラメータを最尤推定する。
- [2] 互いに独立な標準正規分布から $\{z_{T+1}^{(i)}, z_{T+2}^{(i)}, \dots, z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ をサンプリングする。
- [3] 互いに独立な標準一様分布から $\{u_{T+1}^{(i)}, u_{T+2}^{(i)}, \dots, u_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ をサンプリングする。
- [4] 手順 [3] の一様乱数と最尤法で推定された推移確率 p, q を使って、マルコフ過程に従う状態変数 $\{s_{T+1}^{(i)}, s_{T+2}^{(i)}, \dots, s_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ を求める。
- [5] 手順 [2], [4] の値を MSGARCH-m-n モデルに代入して、 $\{R_{T+1}^{(i)}, R_{T+2}^{(i)}, \dots,$

$R_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ を計算する。

- [6] 次の式を使ってオプションの満期 $T + \tau$ 時点における原資産価格 $(S_{T+\tau}^{(1)}, S_{T+\tau}^{(2)}, \dots, S_{T+\tau}^{(n)})$ を求める。

$$S_{T+\tau}^{(i)} = S_T \prod_{s=1}^{\tau} (1 + R_{T+s}^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

- [7] 次の式からコール・オプションの価格 C_T 、プット・オプションの価格 P_T をそれぞれ計算する。

$$C_T = (1 + r)^{-\tau} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Max(S_{T+\tau}^{(i)} - K, 0), \quad (3.6)$$

$$P_T = (1 + r)^{-\tau} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Max(K - S_{T+\tau}^{(i)}, 0). \quad (3.7)$$

本研究ではモンテカルロ・シミュレーションの回数を $n = 100,000$ としたが、1 万回程度で十分であると考えられる。また、計算される C_T, P_T の分散を小さくするために、代表的な分散減少法 (variance reduction technique) である制御変数法と負相関法を併せて用いている。詳細は補論の 6.2 節を参照してほしい。

ところで、手順 [4] では一様乱数と推移確率を用いてマルコフ過程に従う状態変数を求めていくのだが、出発点である $T + 1$ 時点の状態変数 s_{T+1} については、この方法を適用することができない。なぜならば、手順 [1] においてパラメータの最尤推定を行ってもオプションの評価時点である T 時点の状態変数 s_T の値は未知であり、既知でなければ一様乱数と推移確率から状態変数

図3. 日経225株価指数終値 (1990/2/21-2006/2/10)

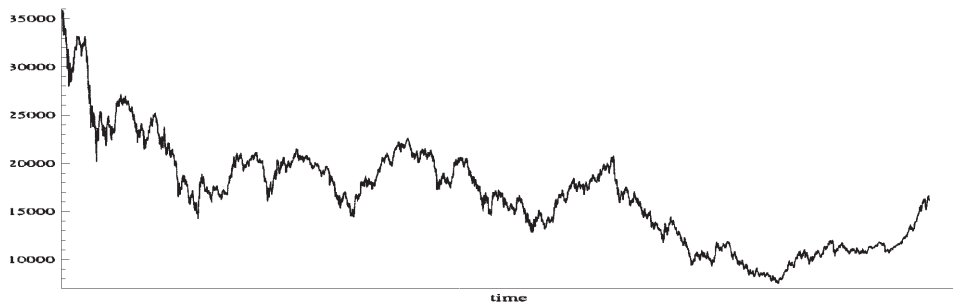
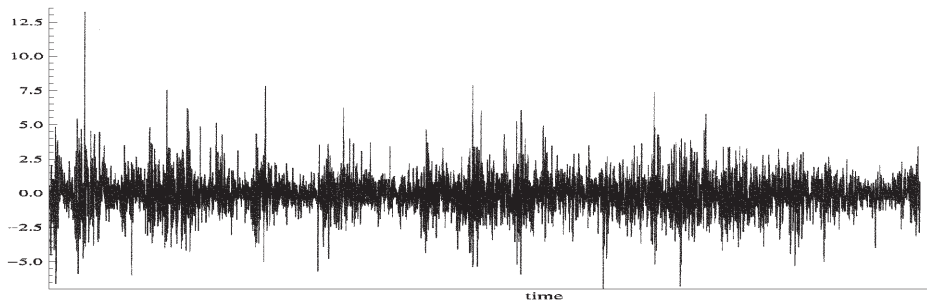


図4. 日経225株価指数終値の収益率 (1990/2/22-2006/2/10)



s_{T+1} を求めることはできないからである。したがって、 s_{T+1} についてはハミルトン・フィルタで得られた T 時点の確率 $\Pr [s_T = i | I_T]$ と推移確率 $\Pr [s_{T+1} = j | s_T = i]$ を使って、

$$\Pr [s_{T+1} = j | I_T] = \sum_{i=0}^1 \Pr [s_{T+1} = j | s_T = i] \Pr [s_T = i | I_T]$$

を計算し、この確率からサンプリングを行うことにする。

4. 日経225 オプションの実証結果

4.1 データ

本研究の実証分析に用いたオプションは、2000年5月限月から2006年3月限月までの日経225コール・オプション(標本数707)、並びにプット・オプション(標本数782)である。こ

れらのオプションの満期から営業日ベースで20日前 ($\tau = 20$) の終値を分析対象とした⁷⁾。安全資産の利子率のデータには、無担保コール翌日物を用いた⁸⁾。また、基本的な仮定として、取引費用、税金、配当は存在せず、オプションの証拠金は不要とした。

MSGARCH-m モデルなどのボラティリティ変動モデルのパラメータの推定には、満期の20日前から更に2,500日前までの日経225株価指数の終値を使用した⁹⁾。例えば、最初の限月である2000年5月限月の場合、オプションの評価日は満期から20日前の2000年4月11日、その2,500日前は1990年2月21日となるので、(2.13)式から日次収益率を計算することにより、標本期間は1990年2月22日から2000年4月11日までとなる(標本の大きさは $T = 2,500$)。この期間の日次収益率を用いてモデルのパラメータの推定を行い、その推定されたパラメータを所与とし

図 5. 日経 225 株価指数収益率のヒストグラム

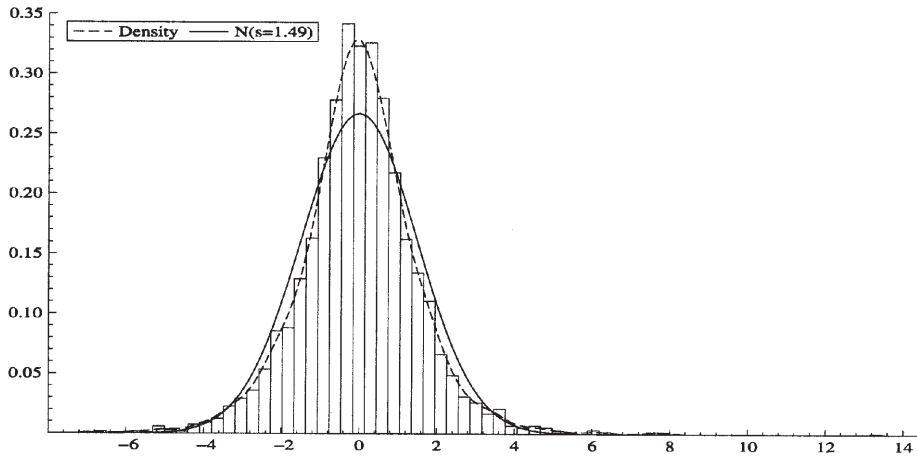


表 2. 日経 225 株価指数終値の収益率 R_t の基本統計量

標本期間：1990.2.22 - 2006.2.10

標本数	平均	標準偏差	歪度	尖度	最大値	最小値	$LB^2(12)$
3935	-0.0001	0.0149	0.2898	6.4801	0.1324	-0.0698	231.0423
	(0.0002)		(0.0390)	(0.0781)			

注) 括弧内の数値は標準誤差を表す。標本数を N 、標準偏差を σ とすると、平均、歪度、尖度の標準誤差はそれぞれ、 $\hat{\sigma}/\sqrt{N}$ 、 $\sqrt{6}/N$ 、 $\sqrt{24}/N$ である。 $LB^2(12)$ は R_t^2 の Ljung=Box 統計量であり、Diebold(1988)の方法によって分散不均一性を調整している。

て、モンテカルロ・シミュレーションによってオプション価格を求める。次の限月以降も同様にして計算を行うので、各限月に対応して 71 の異なる標本期間ができる。最後の限月である 2006 年 3 月限月の場合、満期から 20 日前は 2006 年 2 月 10 日となる。したがって、本研究で用いた日経 225 株価指数 (図 3 を参照) の日次収益率の全標本期間は、1990 年 2 月 22 日から 2006 年 2 月 10 日までとなる (図 4 を参照)。日次収益率のヒストグラムは、図 5 に描かれている。ここでは、密度 (density) と正規近似 (normal approximation) が重ねて描かれている。 $N(\mu = -0.0001, \sigma = 0.0149)$ は、正規近似が平均 -0.0001 、分散が 0.0149^2 の正規分布 $N(-0.0001, 0.0149^2)$ であることを表している。

表 2 には、日経 225 株価指数の日次収益率の基本統計量を示した。歪度の値は 0.2898 と統計的に有意な正の値を示しており、日次収益率は右に歪んだ分布に従っていることが分かる。また、尖度の値は 6.4801 であり、正規分布の 3 を大幅に上回っている。このことは、日次収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることを示している。表の最後の列の $LB^2(12)$ は、日次収益率を 2 乗した値の自己相関が 1 次から 12 次まで全てゼロであるという帰無仮説を検定するための Ljung=Box 統計量である¹⁰⁾。この統計量は、帰無仮説が正しければ漸近的に自由度 12 のカイ 2 乗分布に従う。ここでの $LB^2(12)$ の値は 231.0423 であり、有意水準 1% でも帰無仮説は棄却される。収益率の 2 乗はボラティリティの

表 3. MSGARCH-m-n モデルの推定結果

	p	q	μ_0	ω_0	ω_1	α_0	α_1
平均値	0.891	0.956	0.060	0.212	1.396	0.002	0.025
最小値	0.546	0.839	0.036	0.000	0.046	0.000	0.000
最大値	0.972	0.989	0.098	0.465	2.932	0.026	0.083

	β_0	β_1	$\alpha_0 + \beta_0$	$\alpha_1 + \beta_1$	対数尤度
平均値	0.623	0.868	0.625	0.893	- 4341.449
最小値	0.398	0.444	0.398	0.478	- 4393.688
最大値	0.893	1.891	0.900	1.891	- 4256.298

表 4. MSGARCH-m-t モデルの推定結果

	p	q	μ_0	ω_0	ω_1	α_0	α_1
平均値	0.957	0.963	0.092	0.000	0.223	0.006	0.046
最小値	0.831	0.892	0.075	0.000	0.111	0.000	0.000
最大値	0.980	0.978	0.118	0.000	0.283	0.027	0.084

	β_0	β_1	ν	$\alpha_0 + \beta_0$	$\alpha_1 + \beta_1$	対数尤度
平均値	0.819	0.991	9.061	0.826	1.037	- 4312.734
最小値	0.752	0.909	7.111	0.752	0.981	- 4373.165
最大値	0.852	1.291	15.963	0.862	1.291	- 4241.266

代理変数であると考えられるので、このことはボラティリティに有意な自己相関があることを示している。以上の結果から、日経 225 株価指数の時系列的変動を捉えるためには、本研究のように分布の歪みを表現できるボラティリティ変動モデルを用いる必要があることが分かる。

表 3 から表 12 には、各限月に対応した 71 の異なる標本期間における各モデルのパラメータの平均値・最小値・最大値を示した。誤差項が正規分布で期待収益率がスイッチングを起こす MSGARCH-m-n モデルの結果 (表 3) を見ると、推移確率の平均値はそれぞれ $p = 0.891$, $q = 0.956$ であり、非常に高くなっている。これは、一度スイッチングを起こすとそのままの状態が長

く継続することを表している。このモデルの GARCH 部分におけるボラティリティに対するショックの持続性は、それぞれの状態において $\alpha_0 + \beta_0 = 0.625$, $\alpha_1 + \beta_1 = 0.893$ となっていて、持続性の値に違いがあることが分かる。このような持続性の違いは表 4 の MSGARCH-m-t モデルの結果にも表れている。また、正規分布の場合と比べて誤差項を t 分布にした時の方が、どちらの状態においても平均的には持続性が高くなっている。このことは、推移確率においても同様である。

期待収益率が定数であるマルコフ・スイッチング GARCH モデルの推定結果は表 5, 6 に示した。表 5 が誤差項が正規分布の MSGARCH-n モデル、

表 5. MSGARCH-n モデルの推定結果

	p	q	ω_0	ω_1	α_0	α_1
平均値	0.925	0.963	0.439	1.464	0.001	0.019
最小値	0.514	0.822	0.000	0.000	0.000	0.000
最大値	0.979	0.984	0.634	2.526	0.014	0.078

	β_0	β_1	$\alpha_0 + \beta_0$	$\alpha_1 + \beta_1$	対数尤度
平均値	0.452	0.811	0.453	0.831	- 4352.381
最小値	0.321	0.527	0.321	0.579	- 4407.960
最大値	0.674	2.048	0.674	2.048	- 4264.429

表 6. MSGARCH-t モデルの推定結果

	p	q	ω_0	ω_1	α_0	α_1
平均値	0.994	0.991	0.206	0.333	0.013	0.065
最小値	0.986	0.985	0.012	0.089	0.000	0.046
最大値	1.000	1.000	0.696	0.735	0.066	0.097

	β_0	β_1	ν	$\alpha_0 + \beta_0$	$\alpha_1 + \beta_1$	対数尤度
平均値	0.605	0.872	8.145	0.618	0.937	- 4321.839
最小値	0.103	0.790	6.930	0.103	0.875	- 4382.226
最大値	0.904	0.902	9.929	0.970	0.965	- 4249.719

表 6 が誤差項が t 分布の MSGARCH-t モデルである。推移確率と GARCH 部分の持続性の平均値を見ると、ここでも正規分布よりも t 分布の方が値が高くなっている。

表 7 の GARCH-n モデル、表 8 の GARCH-t モデルの結果を見ると、ボラティリティの持続性はそれぞれ $\alpha + \beta = 0.975$ 、 $\alpha + \beta = 0.987$ であり、非常に 1 に近い。このような高い持続性は多くの先行研究で見られる結果と同じである¹¹⁾。誤差項が正規分布に従う MSGARCH-m-n、MSGARCH-n、GARCH-n の 3 つのモデルを比較すると、GARCH 部分の持続性の値は GARCH-n モデルよりも MSGARCH-m-n、MSGARCH-n モデルの方が低くなっている。このことから、マルコ

フ・スイッチングに従う状態変数を GARCH モデルに含めることによって、GARCH モデルで説明されるボラティリティの持続性が減少することが分かる。ところが、誤差項が t 分布に従う場合は、MSGARCH-m-t モデルの $\alpha_1 + \beta_1$ の方が GARCH-t モデルの $\alpha + \beta$ よりも値が高く、正規分布の時と結果は異なっている。

最後に、各モデルの対数尤度の平均値を比較すると、最も高いのが MSGARCH-m-t モデル、次が MSGARCH-t モデル、その次が GARCH-t モデルとなっている。マルコフ・スイッチングを含めた MSGARCH-m-t、MSGARCH-t モデルと従来の GARCH-t モデルを比べて、どちらのモデルが正しいかを判断するには、スイッチングが起きて

表 7. GARCH-n モデルの推定結果

	ω	α	β	$\alpha + \beta$	対数尤度
平均値	0.059	0.083	0.892	0.975	- 4375.967
最小値	0.032	0.072	0.869	0.966	- 4425.958
最大値	0.077	0.103	0.909	0.987	- 4294.630

表 8. GARCH-t モデルの推定結果

	ω	α	β	ν	$\alpha + \beta$	対数尤度
平均値	0.033	0.071	0.916	7.722	0.987	- 4328.645
最小値	0.021	0.062	0.892	6.483	0.978	- 4387.870
最大値	0.049	0.092	0.927	9.809	0.991	- 4255.932

表 9. MS-m-n モデルの推定結果

	p	q	μ_0	ω_0	ω_1	対数尤度
平均値	0.964	0.984	0.031	1.185	4.311	- 4364.329
最小値	0.949	0.980	0.014	1.106	3.893	- 4418.763
最大値	0.972	0.987	0.046	1.289	5.204	- 4294.369

表 10. MS-m-t モデルの推定結果

	p	q	μ_0	ω_0	ω_1	ν	対数尤度
平均値	0.977	0.987	0.039	1.197	3.906	10.096	- 4348.816
最小値	0.970	0.985	0.031	1.027	3.161	8.009	- 4406.665
最大値	0.987	0.990	0.045	1.314	4.819	14.072	- 4276.766

表 11. MS-n モデルの推定結果

	p	q	ω_0	ω_1	対数尤度
平均値	0.962	0.983	1.191	4.408	- 4366.123
最小値	0.947	0.980	1.110	3.983	- 4421.448
最大値	0.970	0.987	1.291	5.249	- 4294.827

表 12. MS-t モデルの推定結果

	p	q	ω_0	ω_1	ν	対数尤度
平均値	0.976	0.988	1.226	4.076	10.322	- 4352.254
最小値	0.968	0.985	0.980	3.051	7.802	- 4410.443
最大値	0.990	0.990	1.340	4.976	14.889	- 4279.640

表 13. マネネスによるオプションの分類

マネネス	コール	プット
$S/K < 0.91$	deep-out-of-the-money (DOTM)	DITM
$0.91 \leq S/K < 0.97$	out-of-the-money (OTM)	ITM
$0.97 \leq S/K \leq 1.03$	at-the-money (ATM)	ATM
$1.03 < S/K \leq 1.09$	in-the-money (ITM)	OTM
$1.09 < S/K$	deep-in-the-money (DITM)	DOTM

いるか否かを調べる検定を行わなければならない。しかしながら、一般的に知られているように、マルコフ・スイッチングが無いという帰無仮説のもとではモデルのいくつかのパラメータは識別することができず、検定統計量は通常の漸近分布に従わないため、尤度比検定は困難になる。この問題点を考慮した検定手法としては Hansen (1992, 1996), Garcia (1998) があるが、本研究の目的はオプション価格の評価であるので、このような検定は行わないことにした。

4.2 オプション価格の推定値の比較

2.3 節で示した 10 種類のボラティリティ変動モデルと BS モデルによるオプション価格の推定値と実際の市場価格を用いて、以下のように平均誤差率 (mean error rate; MER) と平均 2 乗誤差率 (root mean squared error rate; RMSER) を計算し、各モデルの比較を行う。

$$MER = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}}{X_i^{\text{市場価格}}} \right), \quad (4.1)$$

RMSER

$$= \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}}{X_i^{\text{市場価格}}} \right)^2}, \quad (4.2)$$

$X = C, P.$

ここで、 $\hat{X}_i^{\text{推定値}}$ はモンテカルロ・シミュレーションによるオプションの推定値、或は、BS モデル

の理論価格を表し、 $X_i^{\text{市場価格}}$ はオプションの市場価格を表す。 m は標本数である。MER の値を計算することにより、モデルの推定値が市場価格と比べてどの程度バイアスを持っているかが明らかになる。もう 1 つの RMSER は、推定値と市場価格の乖離度を示す基準である。

また、マネネス (moneyness) は Bakshi, Cao and Chen (1997) を参考にし、次のように 5 種類のカテゴリーに分類した (表 13 を参照)。(1) $S/K < 0.91$ ならばコール・オプションは deep-out-of-the-money (DOTM)¹²⁾、プット・オプションは deep-in-the-money (DITM)¹³⁾ のオプション、(2) $0.91 \leq S/K < 0.97$ ならばコール・オプションは out-of-the-money (OTM)、プット・オプションは in-the-money (ITM) のオプション、(3) $0.97 \leq S/K \leq 1.03$ ならばコール/プット・オプションは at-the-money (ATM) のオプション¹⁴⁾、(4) $1.03 < S/K \leq 1.09$ ならばコール・オプションは ITM、プット・オプションは OTM のオプション、(5) $S/K > 1.09$ ならばコール・オプションは DITM、プット・オプションは DOTM のオプションである。各カテゴリーの標本数は、コール・オプションの場合、DOTM で 216, OTM で 114, ATM で 98, ITM で 93, DITM で 186 であり、プット・オプションでは、それぞれ 247, 96, 98, 99, 242 であった。

コール・オプションの MER, RMSER の計算結果は、表 14 にまとめた。まず、MER の結果を見てみると、Total では MSGARCH-m-n モデルと MSGARCH-m-t モデルの値が両方とも一

0.038であり、全てのモデルの中で、オプション価格の推定値の上方または下方バイアスが最も小さい。その次がMSGARCH-tモデルであり、これらのマルコフ・スイッチングGARCHモデルは、従来のGARCHモデルよりもMERの基準で優れていることが分かる。また、誤差項の分布が正規分布、t分布のどちらであっても、期待収益率をスイッチングさせたMSGARCH-mモデルは、期待収益率を定数としたMSGARCHモデルよりもパフォーマンスが良くなっている。BSモデルの値と比べると、DITM以外において、MSGARCH-mモデルはBSモデルのunderpricingを修正できることが分かる。RMSERの基準では、MSGARCH-m-nモデルを用いた時、推定値と市場価格の乖離率が最も小さく、その次はMSGARCH-m-tモデルとなっていて、MERの時と同様にMSGARCH-mモデルのパフォーマンスが最も良い。また、これらのモデルの値は0.547、0.563と非常に僅差であり、このことから、誤差項を正規分布からt分布にしてもコール・オプションの評価は殆ど変わらないと言える。さらに、MERの結果と同じように、期待収益率をスイッチングさせることにより、パフォーマンスは向上している。GARCHモデルはBSモデルよりは優れているが、MSGARCH-mモデルより劣っている。以上のMER、RMSERの結果から、コール・オプションの評価では、本研究で提案したMSGARCH-mモデルが最も優れていることが分かる。

表15には、プット・オプションの結果を示してある。MERの基準では、Totalの値を比べるとMS-m-tモデルのバイアスが最も小さい。その次はMS-m-nモデルである。一方、RMSERの基準では、GARCH-tモデルが最も優れていて、2番目がMSGARCH-m-nモデルであり、MERの結果と異なっている。しかしながら、コール・オプションのケースと比べると、各ボラティリティ変動モデルのRMSERの差は小さく、どのモデルが特に優れているという結果にはなっていない。

また、本研究で提案したMSGARCH-mモデルの有効性は示されなかった。ただし、MER、RMSERのどちらの基準においても、BSモデルよりはボラティリティ変動モデルの方がパフォーマンスが良くなっている。

5. 結論

本研究では、原資産価格の期待収益率のスイッチングを考慮したMSGARCH-mモデルを用いて日経225オプション価格を推定し、オプション市場におけるMSGARCH-mモデルの有効性の検証を行った。得られた結果は次の通りである。

1. コール・オプションでは、MER、RMSERのどちらの基準においても、MSGARCH-mモデルのパフォーマンスが最も優れていた。つまり、オプション市場で基準(bench mark)とされているBSモデルや従来のGARCHモデル、期待収益率が定数であるMSGARCHモデルよりも、期待収益率をスイッチングさせたMSGARCH-mモデルの方が、適正に価格付けされることが明らかになった。
2. プット・オプションでは、MERの基準ではMS-m-tモデルが、RMSERの基準ではGARCH-tモデルが最も優れていた。しかし、コール・オプションのケースと比べると、ボラティリティ変動モデルのRMSERの差は小さく、どのモデルが特に優れているという結果にはなっていない。また、本研究で提案したMSGARCH-mモデルの有効性は示されなかった。

6. 補論

6.1 MSGARCH-mモデルの最尤法による推定法
 パラメータ集合を θ とする。 θ は、MSGARCH-mモデルの誤差項が正規分布に従う時には $\theta = (\mu_0, \omega_0, \omega_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, p, q)$ となり、誤差項がt分布に従う時には自由度 ν が追加され

表 14. コール・オプションの推定値の比較

MER							
	MSGARCH-m		MSGARCH		GARCH		標本数
	n	t	n	t	n	t	
DOTM	- 0.130	- 0.139	0.329	0.195	0.121	0.393	216
OTM	0.025	0.046	0.328	0.047	0.211	0.154	114
ATM	- 0.006	- 0.007	0.024	- 0.040	0.010	- 0.015	98
ITM	- 0.003	- 0.007	- 0.007	- 0.014	- 0.012	- 0.013	93
DITM	- 0.003	- 0.003	- 0.004	- 0.003	- 0.004	- 0.003	186
Total	- 0.038	- 0.038	0.155	0.059	0.070	0.140	707

	MS-m		MS		BS	標本数
	n	t	n	t		
DOTM	0.130	0.110	0.497	0.500	- 0.217	216
OTM	0.350	0.350	0.491	0.497	- 0.098	114
ATM	0.046	0.042	0.059	0.066	- 0.088	98
ITM	- 0.013	- 0.019	- 0.005	- 0.002	- 0.021	93
DITM	- 0.012	- 0.019	- 0.004	- 0.003	- 0.002	186
Total	0.098	0.088	0.238	0.241	- 0.098	707

RMSER							
	MSGARCH-m		MSGARCH		GARCH		標本数
	n	t	n	t	n	t	
DOTM	0.915	0.896	1.319	1.014	1.093	1.269	216
OTM	0.478	0.628	0.986	0.406	0.722	0.599	114
ATM	0.184	0.198	0.258	0.141	0.216	0.188	98
ITM	0.077	0.080	0.080	0.068	0.076	0.072	93
DITM	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	186
Total	0.547	0.563	0.837	0.588	0.677	0.746	707

	MS-m		MS		BS	標本数
	n	t	n	t		
DOTM	1.337	1.282	1.858	1.733	1.302	216
OTM	1.311	1.266	1.492	1.403	0.633	114
ATM	0.360	0.355	0.346	0.333	0.234	98
ITM	0.095	0.099	0.084	0.080	0.083	93
DITM	0.075	0.078	0.075	0.074	0.073	186
Total	0.919	0.884	1.197	1.119	0.770	707

表 15. プット・オプションの推定値の比較

MER							
	MSGARCH-m		MSGARCH		GARCH		標本数
	n	t	n	t	n	t	
DOTM	-0.522	-0.538	-0.614	-0.660	-0.695	-0.605	247
OTM	-0.022	-0.035	-0.059	-0.216	-0.124	-0.162	96
ATM	-0.030	-0.026	-0.015	-0.059	-0.023	-0.043	98
ITM	-0.012	-0.013	-0.003	-0.003	-0.004	-0.003	99
DITM	-0.001	-0.001	-0.001	0.000	-0.001	0.000	242
Total	-0.173	-0.180	-0.204	-0.243	-0.238	-0.216	782

	MS-m		MS		BS	標本数
	n	t	n	t		
DOTM	-0.477	-0.459	-0.558	-0.556	-0.828	247
OTM	0.081	0.132	0.022	0.036	-0.344	96
ATM	0.026	0.057	0.015	0.028	-0.095	98
ITM	0.009	0.030	-0.001	0.005	-0.002	99
DITM	0.008	0.015	-0.001	0.000	0.002	242
Total	-0.134	-0.113	-0.172	-0.167	-0.315	782

RMSER							
	MSGARCH-m		MSGARCH		GARCH		標本数
	n	t	n	t	n	t	
DOTM	0.700	0.737	0.719	0.725	0.749	0.685	247
OTM	0.374	0.443	0.413	0.336	0.330	0.308	96
ATM	0.178	0.200	0.219	0.155	0.188	0.173	98
ITM	0.091	0.090	0.092	0.088	0.087	0.088	99
DITM	0.070	0.071	0.070	0.071	0.072	0.072	242
Total	0.423	0.451	0.439	0.431	0.444	0.407	782

	MS-m		MS		BS	標本数
	n	t	n	t		
DOTM	0.742	0.724	0.740	0.727	0.876	247
OTM	0.597	0.563	0.596	0.563	0.512	96
ATM	0.268	0.266	0.285	0.277	0.237	98
ITM	0.099	0.109	0.093	0.094	0.101	99
DITM	0.072	0.074	0.070	0.070	0.072	242
Total	0.479	0.465	0.479	0.467	0.533	782

て $\theta = (\mu_0, \omega_0, \omega_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, p, q, \nu)$ となる。この時、尤度関数 (likelihood function) $L(\theta)$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(R_1, R_2, \dots, R_T | \theta) \\ &= \prod_{t=1}^T f(R_t | I_{t-1}; \theta) \\ &= \prod_{t=1}^T \sum_{s_t=0}^1 f(R_t, s_t | I_{t-1}; \theta) \\ &= \prod_{t=1}^T \sum_{s_t=0}^1 f(R_t | s_t, I_{t-1}; \theta) f(s_t | I_{t-1}; \theta). \end{aligned}$$

状態変数 s_t は観測できないため、 R_t の周辺密度 $f(R_t | I_{t-1}; \theta)$ は R_t と s_t の同時分布 $f(R_t, s_t | I_{t-1}; \theta)$ を s_t 関して足し合わせて求めることになる。対数尤度関数 (log-likelihood function) は、

$$\begin{aligned} \ln L(\theta) &= \\ &= \sum_{t=1}^T \ln \left\{ \sum_{s_t=0}^1 f(R_t | s_t, I_{t-1}; \theta) f(s_t | I_{t-1}; \theta) \right\} \end{aligned} \quad (6.1)$$

となる。誤差項の z_t が正規分布に従う時、(6.1) 式の右辺 $\{\cdot\}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} &= \sum_{s_t=0}^1 f(R_t | s_t, I_{t-1}; \theta) f(s_t | I_{t-1}; \theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{0t}^2}} \exp\left(-\frac{(R_t - \mu_0)^2}{2\sigma_{0t}^2}\right) \\ &\quad \times \Pr[s_t = 0 | I_{t-1}] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{1t}^2}} \exp\left(-\frac{(R_t - \mu_{1,t}^*)^2}{2\sigma_{1t}^2}\right) \\ &\quad \times \Pr[s_t = 1 | I_{t-1}]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

ただし、

$$\mu_{1,t}^* = \frac{r_t - \mu_0 \Pr[s_t = 0 | I_{t-1}]}{\Pr[s_t = 1 | I_{t-1}]},$$

$$\sigma_{0t}^2 = V[R_t | s_t = 0, I_{t-1}],$$

$$\sigma_{1t}^2 = V[R_t | s_t = 1, I_{t-1}]$$

である。 $\Pr[s_t = 0 | I_{t-1}]$ と $\Pr[s_t = 1 | I_{t-1}]$ は、 $t-1$ 時点までの情報 I_{t-1} が与えられたもとで $s_t = j$ ($j = 0, 1$) となる確率である。誤差項の z_t が t 分布に従う時は、(6.1) 式の右辺 $\{\cdot\}$ は、

$$\begin{aligned} &= \sum_{s_t=0}^1 f(R_t | s_t, I_{t-1}; \theta) f(s_t | I_{t-1}; \theta) \\ &= \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{(R_t - \mu_0)^2}{\sigma_{0t}^2(\nu-2)}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \\ &\quad (\sigma_{0t}^2)^{-\frac{1}{2}} (\nu-2)^{-\frac{1}{2}} \times \Pr[s_t = 0 | I_{t-1}] \\ &+ \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{(R_t - \mu_{1,t}^*)^2}{\sigma_{1t}^2(\nu-2)}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \\ &\quad (\sigma_{1t}^2)^{-\frac{1}{2}} (\nu-2)^{-\frac{1}{2}} \times \Pr[s_t = 1 | I_{t-1}] \end{aligned} \quad (6.3)$$

となる。

(6.2)、(6.3) 式の $\Pr[s_t = 0 | I_{t-1}]$ と $\Pr[s_t = 1 | I_{t-1}]$ は、Hamilton (1989) の提案したフィルタリング手法 (ハミルトン・フィルタ) によって求める。以下では、 $i = 0, 1$, $j = 0, 1$ は、各々 $(t-1)$ 時点、 t 時点の状態を表すことにする。 t 時点までの情報 I_t が与えられた時に $s_t = j$ となる確率、つまり、 $\Pr[s_t = j | I_t]$ を求めるには、まず、 $\Pr[s_{t-1} = i | I_{t-1}]$ が与えられたとして、次式より $\Pr[s_t = j | I_{t-1}]$ を計算する。

$$\begin{aligned}
 & \Pr [s_t = j | I_{t-1}] \\
 &= \sum_{i=0}^1 \Pr [s_t = j, s_{t-1} = i | I_{t-1}] \\
 &= \sum_{i=0}^1 \Pr [s_t = j | s_{t-1} = i] \Pr [s_{t-1} = i | I_{t-1}].
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

ただし、 $\Pr [s_t = j | s_{t-1} = i]$ は (2.9) 式で与えられる推移確率である。次に、 t 時点のデータ R_t を追加すると、

$$\begin{aligned}
 & \Pr [s_t = j | I_t] \\
 &= \Pr [s_t = j | I_{t-1}, R_t] = \frac{f(s_t = j, R_t | I_{t-1})}{f(R_t | I_{t-1})} \\
 &= \frac{f(R_t | s_t = j, I_{t-1}) \Pr [s_t = j | I_{t-1}]}{\sum_{j=0}^1 f(R_t | s_t = j, I_{t-1}) \Pr [s_t = j | I_{t-1}]}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

となり、この式から $\Pr [s_t = j | I_t]$ を求める。ただし、 $I_t = (I_{t-1}, R_t)$ である。以上の 2 つの式、(6.4) 式と (6.5) 式を繰り返すことによって、 $t = 1, 2, \dots, T$ について $\Pr [s_t = j | I_{t-1}]$ を計算し、(6.2) 式、または (6.3) 式に代入する。 $t = 1$ 時点の計算に必要な $\Pr [s_0 = i | I_0]$ には、一般に定常確率 (steady-state probability)、

$$\begin{aligned}
 \pi_0 &= \Pr [s_0 = 0 | I_0] = \frac{1-p}{2-p-q}, \\
 \pi_1 &= \Pr [s_0 = 1 | I_0] = \frac{1-q}{2-p-q}
 \end{aligned}$$

を用いる。

6.2 分散減少法

本研究ではモンテカルロ・シミュレーションの推定値の分散を小さくさせ、より精度の高い推定値を得るために負相関法 (antithetic variates) と制御変量法 (control variates) の 2 つの分散減少法を用いている。

負相関法とは、乱数を発生させる時になるべく互いに負の相関を持つ系列を 2 つ生成し、それらの平均値を取ることによってサンプリングの誤差を減らす手法である。MSGARCH-m-n モデルでは、手順 [2] において標準正規分布から $\{z_{T+1}^{(i)}, z_{T+2}^{(i)}, \dots, z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ がサンプリングされたとすると、それにマイナスをつけた値 $\{-z_{T+1}^{(i)}, -z_{T+2}^{(i)}, \dots, -z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ を作成して乱数に加える。手順 [3] でも同様に、標準一様分布から $\{u_{T+1}^{(i)}, u_{T+2}^{(i)}, \dots, u_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ をサンプリングしたら、1 から一様乱数を引いた値 $\{1 - u_{T+1}^{(i)}, 1 - u_{T+2}^{(i)}, \dots, 1 - u_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ を追加する。したがって、手順 [4] 以降のモンテカルロ・シミュレーションの回数は $2n$ となる。このような 2 種類の乱数系列を用いて計算される満期の原資産価格、すなわち $\{S_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ と $\{S_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=n+1}^{2n}$ の間には高い負の相関が生じるので、それによって計算されるオプション価格の分散を小さくすることができる。

もう 1 つの分散減少法である制御変量法とは、解析的に計算できる変量を制御変量として、制御変量を解析的に計算した値とモンテカルロ・シミュレーションによって計算した値の両方を使って分散を小さくする方法である。制御変量としては BS モデルのオプション価格を用いることにする。BS モデルでは、原資産価格 S は次の幾何ブラウン運動 (geometric Brownian motion) に従うと仮定している。

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW.$$

ただし、 μ は期待収益率、 dt は無限小の時間間隔、 σ は標準偏差、 dW はウィナー過程の無限小増分

である。この時、伊藤の公式から原資産価格の自然対数 $\ln S$ は、

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW$$

となり、 $\ln S$ は算術ブラウン運動に従う。ここで、オプション価格の評価時点である T 時点の原資産価格を S_T 、満期の $T + \tau$ 時点の原資産価格を $S_{T+\tau}$ とすると、それぞれの自然対数の差である $\ln S_{T+\tau} - \ln S_T$ は次のような正規分布に従う。

$$\ln S_{T+\tau} - \ln S_T \sim N \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau, \sigma^2 \tau \right).$$

本研究では投資家の危険中立性を仮定しているので、 μ は連続複利方式の安全資産利子率 r^* に等しくなる¹⁵⁾。したがって、連続複利における t 時点の原資産価格収益率 $R_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$ は、

$$R_t = r^* - \frac{1}{2} \sigma^2 + \epsilon_t, \quad (6.6)$$

$$\epsilon_t = \sigma z_t, \quad z_t \sim i.i.d.N(0, 1)$$

と定式化することができる。また、 $\ln S_{T+\tau} - \ln S_T$ は以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \ln S_{T+\tau} - \ln S_T &= (\ln S_{T+\tau} - \ln S_{T+\tau-1}) \\ &+ (\ln S_{T+\tau-1} - \ln S_{T+\tau-2}) \\ &+ \cdots + (\ln S_{T+1} - \ln S_T) \\ &= R_{T+\tau} + R_{T+\tau-1} + \cdots + R_{T+1}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

したがって、 i 回目のパスの発生によって得られた満期の原資産価格 $S_{T+\tau}^{(i)}$ は (6.6)、(6.7) 式より次式のように表現できる。

$$S_{T+\tau}^{(i)}$$

$$\begin{aligned} &= S_T \exp \left(R_{T+\tau}^{(i)} + R_{T+\tau-1}^{(i)} + \cdots + R_{T+1}^{(i)} \right) \\ &= S_T \exp \left\{ \left(r^* - \frac{1}{2} \sigma^2 + \epsilon_{T+\tau}^{(i)} \right) \right. \\ &\quad + \left(r^* - \frac{1}{2} \sigma^2 + \epsilon_{T+\tau-1}^{(i)} \right) \\ &\quad \left. + \cdots + \left(r^* - \frac{1}{2} \sigma^2 + \epsilon_{T+1}^{(i)} \right) \right\} \\ &= S_T \exp \left(r^* \tau - \frac{1}{2} \sigma^2 \tau + \sigma \sum_{t=T+1}^{T+\tau} z_t^{(i)} \right), \\ &\quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.8)$$

よって、BS モデルからモンテカルロ・シミュレーションによって満期の原資産価格を求めるにはこの式を用いることになる。一般に、標準偏差 σ にはヒストリカル・ボラティリティ (**historical volatility; HV**) を用いる。過去の株価データから計算されるボラティリティをヒストリカル・ボラティリティという。本研究では、過去 20 日分の原資産価格収益率の標準偏差を使い、HV を次のように計算した。

$$\sigma_{HV} = \sqrt{\frac{1}{20-1} \sum_{t=1}^{20} (R_t - \bar{R})^2}. \quad (6.9)$$

ただし、 \bar{R} は 20 日間の R_t の平均値である。

MSGARCH-m-n モデルからモンテカルロ・シミュレーションで計算された満期 $T + \tau$ 時点における原資産価格を $S_{MSGARCH-m-n}^{(i)}$ 、BS モデルからモンテカルロ・シミュレーションで計算された満期における原資産価格を $S_{BS}^{(i)}$ とする。さらに、それぞれのモデルで計算された T 時点のコール・オプション価格を $\tilde{C}_{MSGARCH-m-n}$ 、 \tilde{C}_{BS} とする。また、BS モデルによる解析解を C_{BS} とする¹⁶⁾。これらを使って、コール・オプション価格を次のように計算する。

$$C_T = \tilde{C}_{MSGARCH-m-n} - \varphi (\tilde{C}_{BS} - C_{BS}) \quad (6.10) \quad x_t^{(i)} \text{と } w_t^{(i)} \text{をサンプリングして,}$$

上式の両辺の期待値をとると,

$$\begin{aligned} E[C_T] &= E[\tilde{C}_{MSGARCH-m-n} - \varphi (\tilde{C}_{BS} - C_{BS})] \\ &= E[\tilde{C}_{MSGARCH-m-n}] - \varphi (C_{BS} - C_{BS}) \\ &= E[\tilde{C}_{MSGARCH-m-n}] \end{aligned}$$

となり, 左辺のモンテカルロ・シミュレーションで得られる C_T の期待値は, **MSGARCH-m-n** モデルからモンテカルロ・シミュレーションで計算される $\tilde{C}_{MSGARCH-m-n}$ の期待値と等しいことが分かる. また, (6.10) 式より, C_T の分散は次のように表される.

$$\begin{aligned} V(C_T) &= V(\tilde{C}_{MSGARCH-m-n}) + \varphi^2 V(\tilde{C}_{BS}) \\ &\quad - 2\varphi Cov(\tilde{C}_{MSGARCH-m-n}, \tilde{C}_{BS}). \end{aligned}$$

この分散を最小化する φ は, 上式を φ で偏微分してゼロとおき φ に関して解いた

$$\varphi = \frac{Cov(\tilde{C}_{MSGARCH-m-n}, \tilde{C}_{BS})}{V(\tilde{C}_{BS})} \quad (6.11)$$

となる. プット・オプションの計算も同様に行う.

MSGARCH-m モデルの誤差項が (2.11) 式のように t 分布に従う場合には, 手順 [2] において標準正規分布からではなく, 自由度 ν , 分散 1 に基準化された t 分布から $\{z_{T+1}^{(i)}, z_{T+2}^{(i)}, \dots, z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ をサンプリングすることになる. このサンプリングを行うには, まず, 互いに独立な標準正規分布と自由度 ν の χ^2 分布からそれぞれ

$$z_t^{(i)} = \frac{\sqrt{\nu - 2} x_t^{(i)}}{\sqrt{w_t^{(i)}}}$$

と計算すればよい. この場合, 制御変量法で **BS** モデルのオプション価格をモンテカルロ・シミュレーションにより求める際には, (6.8) 式の $z_t^{(i)}$ の代わりに $x_t^{(i)}$ を使って計算することになる.

(東洋大学経営学部助教授)

(日本大学経済学部助教授)

*) 本研究で使用した日経 225 オプションのデータは, 大阪証券取引所から提供して頂いた. また, 本論文を作成するにあたり, 渡部敏明教授 (一橋大学経済研究所), 森保洋助教授 (長崎大学), 芹田敏夫教授 (青山学院大学) から多くの貴重なコメントを頂いた. ここに記して感謝の意を表したい.

†) 〒 112-8606 東京都文京区白山 5-28-20.

e-mail: satoyoshi@toyonet.toyo.ac.jp

‡) 〒 101-8360 東京都千代田区三崎町 1-3-2.

e-mail: mitsui@eco.nihon-u.ac.jp

注

- 1) このような **ARCH** 型モデルを用いたオプションの実証研究としては, **Engle and Mustafa (1992)**, **Noh, Engle and Kane (1994)**, **Saez (1997)**, **Sabbatini and Linton (1998)**, **Bauwens and Lubrano (1998)**, **森保 (1999)**, **三井 (2000)**, **Duan and Zhang (2001)**, **Bauwens and Lubrano (2002)**, **三井・渡部 (2003)**, **渡部 (2003)** がある. 詳しくは, **三井 (2004)** 第 1 章を参照のこと.
- 2) **Gray (1996)** はこのモデルを, レジーム・スイッチング **GARCH (regime-switching GARCH)** モデルと名付けた. しかし, レジーム・スイッチングはマルコフ過程によって引き起こされるとしている

ことから、本研究ではマルコフ・スイッチング GARCH モデルと呼ぶことにした。

- 3) 証明は、渡部 (2000) 1.4 節を参照のこと。
- 4) オプションを始めとした金融工学理論では、連続複利方式 (continuous compounding) により、 $R_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$ とすることが一般的である。しかしながら、本研究のモデルでは収益率をそのように定義すると、オプションの評価を行うことができない。詳細は里吉・三井 (2006) を参照のこと。
- 5) 時点 T での権利行使価格 K 、残存期間 τ のヨーロッパ・コール・オプション価格 C_T^{BS} とヨーロッパ・プット・オプション価格 P_T^{BS} は、以下の BS モデルで与えられる。

$$C_T^{BS} = S_T N(d_1) - Ke^{-r^* \tau} N(d_2),$$

$$P_T^{BS} = -S_T N(-d_1) + Ke^{-r^* \tau} N(-d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_T/K) + (r^* + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau},$$

$$N(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \quad i = 1, 2.$$

ここで、 $N(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数を表す。

- 6) オプション価格を評価する T 時点においては、 T 時点から $T+1$ 時点にかけての安全資産の利子率 r_{T+1} は既知であるが、その先の利子率は分からない。したがって、 T 時点から満期である $T+\tau$ 時点までの利子率は一定であると仮定し、 $r = r_{T+1}$ とおいて現在価値を計算することになる。
- 7) 日経 225 オプション終値と日経 225 株価指数終値とが異時点で値付けされている可能性があるが、本研究では考慮しなかった。
- 8) 無担保コール翌日物のデータは、日経 NEEDS-FinancialQUEST を利用した。
- 9) 日経 225 株価指数 (日経平均) のデータは、日経 NEEDS-FinancialQUEST を利用した。また、パラメータの推定には、プログラミング言語である Ox Console 4.04 (<http://www.doornik.com/ox/>) を利用した。
- 10) ただし、ここでの Ljung = Box 統計量は、Diebold (1988) によって分散不均一性を調整したものであ

る。

- 11) 例えば、三井・渡部 (2003)、渡部 (2003) を参照のこと。
- 12) far-out-of-the-money と呼ぶこともある。
- 13) far-in-the-money と呼ぶこともある。
- 14) 実際には、厳密に ATM になる可能性は殆どないため、ATM 付近のオプションを near-the-money オプションと呼ぶこともある。
- 15) 年 1 回複利方式の利子率 r から連続複利方式の利子率 r^* を求めるには、 $r^* = \ln(1+r)$ という関係を用いればよい。
- 16) シミュレーションによる BS 解と整合的になるように、BS モデルのボラティリティ σ にも (6.9) 式 of ヒストリカル・ボラティリティを用いる。ただし、BS モデルでは年率換算したボラティリティが必要となるので、年間取引日数はおよそ 250 日であることから、BS モデルのボラティリティ σ には σ_{HV} に $\sqrt{250}$ を掛けている。

参考文献

- 里吉清隆 (2004) 「マルコフ・スイッチング GARCH モデルによる日本の株式市場のボラティリティの分析」『日本統計学会誌』日本統計学会、第 34 巻、第 1 号、pp. 1-19.
- 里吉清隆・三井秀俊 (2006) 「マルコフ・スイッチング・モデルによるオプション評価の実証研究」『産業経営研究』日本大学経済学部産業経営研究所、第 28 号、pp. 51-71.
- 三井秀俊 (2000) 「日経 225 オプション価格の GARCH モデルによる分析」『現代ファイナンス』MTP フォーラム・日本ファイナンス学会、No. 7、pp. 57-73.
- (2004) 『オプション価格の計量分析』税務経理協会。
- 三井秀俊・渡部敏明 (2003) 「ベイズ推定法による GARCH オプション価格付けモデルの分析」『日本統計学会誌』日本統計学会、第 33 巻、第 3 号、pp. 307-324.
- 森保洋 (1999) 「ARCH モデルによる日経 225 オプション評価」『現代経済学研究』第 7 号、pp. 143-159.

- 渡部敏明 (2000) 『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店。
- (2003) 「日経 225 オプションデータを使った GARCH オプション価格付けモデルの検証」『金融研究』日本銀行金融研究所, 第 22 卷, 別冊第 2 号, pp. 1-34.
- Bakshi, G., C. Cao and Z. Chen (1997) “Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models,” *Journal of Finance*, 52, pp. 2003-2049.
- Bauwens, L. and M. Lubrano (1998) “Bayesian Inference on GARCH Models Using the Gibbs Sampler,” *Econometrics Journal*, 1, pp. C23-C46.
- (2002) “Bayesian Option Pricing Using Asymmetric GARCH Models,” *Journal of Empirical Finance*, 9, pp. 321-342.
- Black, F. and M. Scholes (1973) “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-654.
- Bollerslev, T. (1986) “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.
- Cai, J. (1994) “A Markov Model of Switching-Regime ARCH,” *Journal of Business & Economic Statistics*, 12, pp. 309-316.
- Diebold, F. X. (1986) “Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment,” *Econometric Reviews*, 5, pp. 51-56.
- (1988) *Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics*, Springer-Verlag.
- Duan, J. -C. and H. Zhang (2001) “Pricing Hang Seng Index Options around the Asian Financial Crisis - A GARCH Approach,” *Journal of Banking & Finance*, 25, pp. 1989-2014.
- Engle, R. F. (1982) “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation,” *Econometrica*, 50, pp. 987-1007.
- Engle, R. F. and C. Mustafa (1992) “Implied ARCH Models from Options Prices,” *Journal of Econometrics*, 52, pp. 289-311.
- Garcia, R. (1998) “Asymptotic Null Distribution of the Likelihood Ratio Test in Markov Switching Models,” *International Economic Review*, 39, pp. 763-788.
- Gray, S. F. (1996) “Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process,” *Journal of Financial Economics*, 42, pp. 27-62.
- Hamilton, J. D. (1989) “A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle,” *Econometrica*, 57, pp. 357-384.
- Hamilton, J. D. and R. Susmel (1994) “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime,” *Journal of Econometrics*, 64, pp. 307-333.
- Hansen, B. E. (1992) “The Likelihood Ratio Test under Nonstandard Conditions: Testing the Markov Switching Model of GNP,” *Journal of Applied Econometrics*, 7, S61-S82.
- (1996) “Erratum: The Likelihood Ratio Test under Nonstandard Conditions: Testing the Markov Switching Model of GNP,” *Journal of Applied Econometrics*, 11, pp. 195-198.
- Lamoureux, C. G. and W. D. Lastrapes (1990) “Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model,” *Journal of Business & Economic Statistics*, 8, pp. 225-234.
- Noh, J., R. F. Engle and A. Kane (1994) “Forecasting Volatility and Option Pricing of the S&P500 Index,” *Journal of Derivatives*, pp. 17-30, Reprinted in Engle, R. F. (ed.), *ARCH: Selected Readings*, (1995), Chapter 15, Oxford University Press.
- Sabbatini, M. and O. Linton (1998) “A GARCH Model of the Implied Volatility of the Swiss Market Index from Option Prices,” *International Journal of Forecasting*, 14, pp. 199-213.
- Saez, M. (1997) “Option Pricing under Stochastic Volatility and Interest Rate in the Spanish Case,” *Applied Financial Economics*, 7, pp. 379-394.