

G@RCH による資産価格の時系列分析*

三井 秀俊[†]

1. はじめに

金融・証券市場における実証分析、特に、時系列分析を行なう際には、金融データ系列の特性が非線形ということもあり十分注意が必要である。従来の線形性を仮定したモデルを金融データ系列に適用することは誤りであると考えられる。近年、パッケージ・ソフトの開発により非線形モデルを容易に推定することが可能となってきた。データを揃えるだけで簡単に非線形モデルの推定・検定を行なうことができる。統計分析ソフトを利用する場合に、推定法など詳しい理論的な側面を理解せずに安易に用いることが多々ある。そこで、本研究では非線形モデル、特に ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) 型モデルを推定できる統計分析ソフト G@RCH¹⁾ に関してどの程度まで金融時系列分析に利用することが可能かを検証し、G@RCH の特性を明らかにする。G@RCH では、かなり高度な時系列モデルを利用可能であり、金融・証券市場の実証研究に広く応用が可能であり有益であると考えられる。

G@RCH で利用可能な ARCH 型モデルは、ARCH, GARCH, EGARCH, GJR, APARCH, IGARCH, FIGARCH, FIEGARCH, FIAPARCH, HYGARCH, RiskMetrics である。本研究では、株式市場で観察される収益率とボラティリティとの非対称 (asymmetry) な動きを捉えるため Glosten, Jagannathan and Runkle(1993) の GJR モデルを利用する。他の金融資産でも同様な非対称な動きがあるかどうかを検証する。また、資産価格収益率のリスク・プレミアムを捉えるために、収

益率の過程にボラティリティを説明変数として組み込んで定式化した GJR-M (in-the-mean) により実証研究を行なう。また、資産価格収益率の分布は正規分布に比べると裾が厚い分布に従うことが知られている²⁾。そのため、本研究では GJR-M モデルには t 分布を仮定してモデルの推定を行なう。

実証分析を進めるにあたっては、2000 年 1 月 4 日から 2009 年 12 月 25 日までの米ドル・円為替レート (US Dollar / Yen), ユーロ・円為替レート (Euro / Yen), 日経平均株価 (Nikkei 225), 東証株価指数 (TOPIX: Tokyo Stock Exchange Price Index) と 2000 年 1 月 3 日から 2009 年 12 月 24 日のニューヨーク・ダウ工業株 30 種平均 (Dow 30), S&P 500, ニューヨーク WTI (West Texas Intermediate) 原油先物価格 (WTI Oil), ニューヨーク金先物価格 (NY Gold) の日次データ (daily data) を用いて実証的な検証を行なった³⁾。本研究の実証分析の結果として、主に次の 2 つの結果が得られた。(1) 資産価格収益率とボラティリティとの間の非対称性が観測できたのは、Nikkei 225, TOPIX, Dow 30, S&P 500 の株価指数であり、外国為替レートである US Dollar / Yen, Euro / Yen と Commodity の WTI Oil, NY Gold では非対称性を観測することができなかった。(2) 全ての資産価格収益率においてリスク・プレミアムを観測することはできなかった。

本論文の以下の構成は次の通りである。第 2 節では、G@RCH 4.2 で推定可能なモデル・情報量基準・誤差項に関して簡単に紹介し、本研究で用いた GJR-M モデルについて説明を行なう。第 3 節

では、本研究で利用した US Dollar / Yen, Euro / Yen, Nikkei 225, TOPIX, Dow 30, S&P 500, WTI Oil, NY Gold データと GJR-M モデルによる実証結果に関して述べる。最後の第 4 節では、まとめと今後の課題について述べる。

2. 分析モデル

2.1 G@RCH による ARCH 型モデルの分析

G@RCH 4.2 により推定できる ARCH 型モデルは以下の通りである。

1. ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity): Engle (1982)
2. GARCH (Generalized ARCH): Bollerslev (1986)
3. EGARCH (Exponential GARCH): Nelson (1991)
4. GJR: Glosten, Jagannathan and Runkle (1993)
5. APARCH (Asymmetric Power ARCH): Ding, Granger and Engle (1993)
6. IGARCH (Integrated GARCH): Engle and Bollerslev (1986)
7. FIGARCH (Fractionally IGARCH): Baillie, Bollerslev and Mikkelsen (1996)
8. FIEGARCH (Fractionally IEGARCH): Bollerslev and Mikkelsen (1996)
9. FIAPARCH (Fractionally IAPARCH): Tse (1998)
10. HYGARCH (Hyperbolic GARCH): Davidson (2001)
11. RiskMetrics: J. P. Morgan (1996)

G@RCH 4.2 では、これらのモデルを擬似最尤法 (Quasi-Maximum Likelihood) により推定を行なうことができる。また収益率の過程は基本的には以下の 3 つの過程に分けて記述できる。

$$R_t = \mu + \epsilon_t, \quad (1)$$

$$R_t = \mu + \lambda\sigma + \epsilon_t, \quad (2)$$

$$R_t = \mu + \lambda\sigma^2 + \epsilon_t. \quad (3)$$

定数項 μ は期待収益率, ϵ_t は誤差項であり, λ はリスク・プレミアム (risk premium)⁴⁾ を捉えるパラメータである。

2.2 GJR-M モデル

本研究では, Glosten, Jagannathan and Runkle (1993) の GJR モデルを用いて資産価格データの分析を行なった。株式市場には, 株価収益率とボラティリティとの間の関係として, 株価収益率が下落すると次期にはボラティリティは上昇し, 株価収益率が上昇すると次期にはボラティリティは下落するというある種の非対称 (asymmetry) な動きがある⁵⁾。この現象は, レバレッジ・エフェクト (leverage effects) と呼ばれる。そこで本研究では, 様々な種類の資産価格収益率とボラティリティとの間にある種の非対称性が観測できるかどうかを実証的に検証を行ないたいため GJR モデルを利用する。

離散時間の経済で R_t を時点 t での株価収益率とすると, 資産収益率 R_t の過程を以下のようにおく。

$$R_t = \mu + \lambda\sigma^2 + \epsilon_t, \quad (4)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad (5)$$

$$z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, Var[z_t] = 1. \quad (6)$$

ここで, 収益率 R_t に自己相関は無いと仮定する。*i.i.d.* は, 過去と独立で同一な分布 (independent and identically distributed) を表す。 $E[\cdot]$ は期待値, $Var[\cdot]$ は分散を各々表す。ボラティリティ σ の過程は, 以下の GJR (p, q) モデルに従うとする。 ϵ_{t-1} が負のときには 1, それ以外のときには 0 であるダミー変数 D_{t-1}^- を用いることにより, ボラティリティの非対称性を捉えるように定式化されている。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q (\alpha \epsilon_{t-i}^2 + \gamma D_{t-i}^- \epsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p \beta \sigma_{t-j}^2, \quad (7)$$

$$D_{t-1}^- = \begin{cases} 1 & \epsilon_{t-1} < 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\gamma > 0$ ならば、資産価格が上昇した日の翌日より、資産価格が下落した日の翌日の方がボラティリティは上昇する。(4) 式–(7) 式で記述されるモデルを GJR (p, q)-M モデルと呼ぶ。

ARCH 型モデルの次数選択は、一般的に AIC (Akaike's Information Criterion) や SIC (Schwarz's Information Criterion) などの情報量基準に基づいて選択を行なう。G@RCH 4.2 では、Akaike, Hannan / Quinn, Schwartz, Shibata の 4 つの情報量基準を計算することが可能である。最尤法によってパラメータを推定した場合、各々の情報量基準は次のように計算される。

1. Akaike = $-2\frac{\ln L}{T} + 2\frac{k}{T}$
2. Hannan/Quinn = $-2\frac{\ln L}{T} + 2\frac{k \ln[\ln(T)]}{T}$
3. Schwartz = $-2\frac{\ln L}{T} + 2\frac{\ln(k)}{T}$
4. Shibata = $-2\frac{\ln L}{T} + \ln\left(\frac{T+2k}{T}\right)$

$\ln L$ は推定されたパラメータの下で評価した対数尤度、 k は推定されたパラメータの数、 T は標本数である。過去の実証研究においてボラティリティ変動過程の次数を多くしてもあまりパフォーマンスは改善されないことが示されているので、本研究では、GJR (1, 1) モデルを用いて分析を行なうこととする。

GJR (1, 1) モデルは以下のように記述される。

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \epsilon_{t-1}^2, \quad (8)$$

$$D_{t-1}^- = \begin{cases} 1 & \epsilon_{t-1} < 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

本研究では (4) 式–(6) 式、(8) 式で記述される GJR (1, 1)-M モデルを用いる。

2.3 z_t の分布の仮定

G@RCH 4.2 では、(6) 式の z_t の仮定として以下の 4 種類を選択できる。

1. 標準正規分布 (Standard Normal Distribution)
2. t 分布 (Student- t Distribution)
3. GED 分布 (Generalized Error Distribution)
4. Skewed-Student Distribution

資産価格収益率の分布は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることが知られている。実際、多くの先行研究では、誤差項の分布に正規分布よりも尖度の高い分布を用いたほうが当てはまりが良いとの結果が得られている。したがって、本研究では、誤差項の分布に t 分布を適用する。誤差項が t 分布 (t -distribution)⁶⁾ に従う場合、(6) 式の z_t は、

$$z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu) \quad (9)$$

となる。ここでは z_t の分散は 1 に基準化されている。 ν は自由度 (degree of freedom) であり、 $2 < \nu < \infty$ となる。このとき尤度関数は以下のように記述される。

$$L = T \left\{ \ln \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln[\pi(\nu-2)] \right\} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln(\sigma^2) + (1+\nu) \ln\left(1 + \frac{z_t^2}{\nu-2}\right) \right] \quad (10)$$

$\Gamma(\cdot)$ は、ガンマ関数 (gamma function) である。

本研究では、(4)、(5)、(8)、(9) 式からなる GJR (1, 1)-M モデルにより実証研究を行なう。

3. データと実証結果

3.1 データ

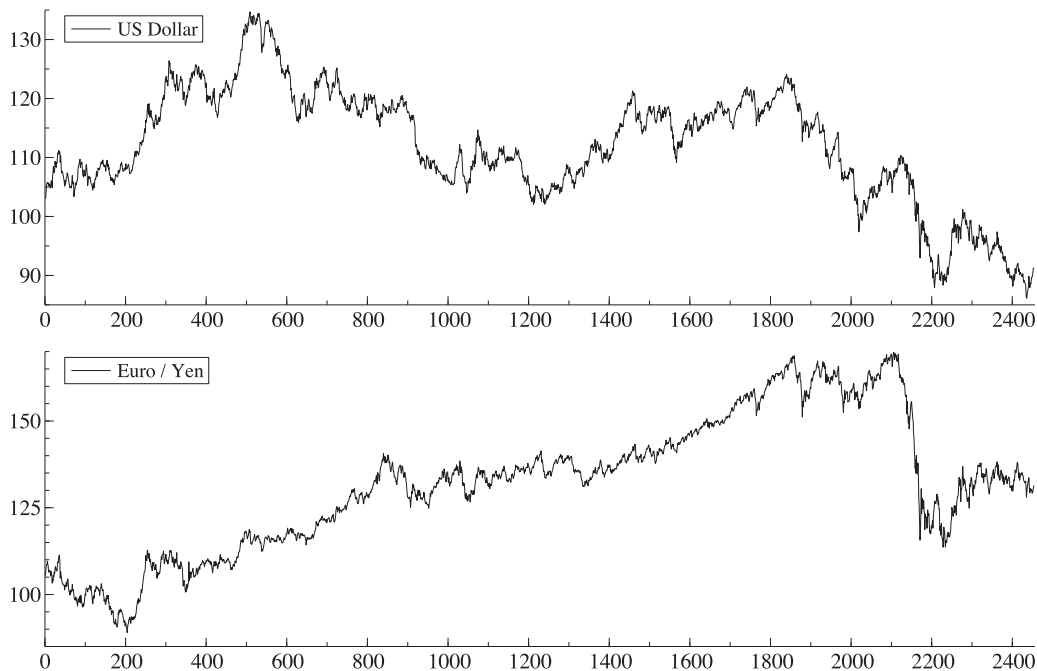
本研究では、金融資産価格として US Dollar / Yen, Euro / Yen, Nikkei 225, TOPIX, Dow 30, S&P 500, WTI Oil, NY Gold の日次データ (daily data) を使用し、日経 NEEDS-FinancialQuest からデータを取得した。これらのデータを利用して第

2節のGJR-Mモデルのパラメータの推定を行なった。サンプル期間は、US Dollar / Yen, Euro / Yen, Nikkei 225, TOPIXは、2000年1月4日から2009年12月25日までであり、Dow 30, S&P 500, WTI Oil, NY Goldは2000年1月3日から2009年12月24日までである(図1-図4を参照)。資産収益率は、 t 時点の株価を P_t とし、 $R_t = (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \times 100(\%)$ として計算を行なった(図5を参照)。標本期間は、US Dollar / Yen, Euro / Yen, Nikkei 225, TOPIXは2000年1月4日から2009年12月24日まで、標本数は2454である。Dow 30, S&P 500は2000年1月3日から2009年12月23日まで、標本数は2510でありWTI Oil, NY Goldは2000年1月3日から2009年12月23日まで、標本数は2494である。データの基本統計量(Descriptive statistics)は、表1に纏められている。データの基本統計量の計算は、PcGive(統計・時系列分析ソフト)⁷⁾により行なった⁸⁾。PcGiveは、G@RCHと同様にOxMetrics⁹⁾

familyの一部である。詳しくは、Laurent and Peters (2002), Doornik and Hendry (2006), ヘンドリー・ドーナック(2006)を参照して頂きたい。

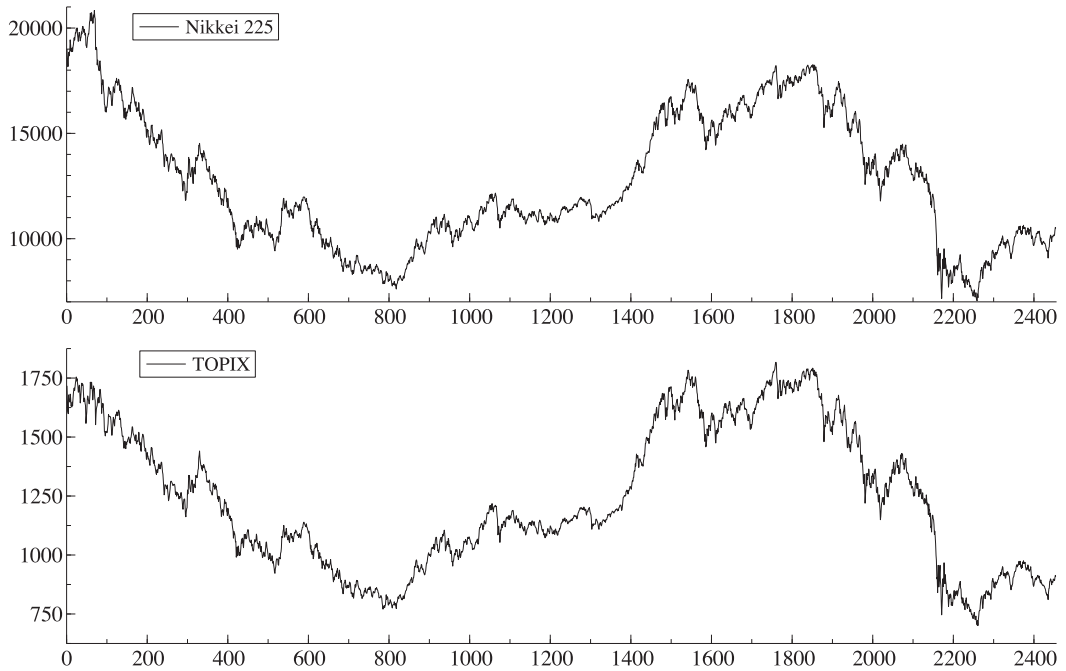
尖度(kurtosis)については¹⁰⁾、US Dollar / Yen, Euro / Yen, Nikkei 225, TOPIX, Dow 30, S&P 500, WTI Oil, NY Goldのすべての金融資産で“3”を超えていることから、また、正規性検定が有意なことから、これらの金融資産収益率の分布は正規分布よりも裾が厚い(fat tail)ことがわかる。また、収益率のヒストグラム・密度関数は、図6に描かれている。ここでは、密度(density)と正規近似(normal approximation)が重ねて描かれている。例えば、US Dollar / Yenに関して、 $N(s=0.672)$ は、表1より正規近似が平均 -0.005 、図6より分散が 0.672^2 の正規分布 $N(-0.005, 0.672^2)$ に従うことを表している。標本自己相関(ACF: autocorrelation function), スペクトル密度(spectral density), ピリオドグラム(periodogram)を各々、図7-図9で示す。

図1. 米ドル/円為替レート・ユーロ/円為替レート直物相場 [17:00] (2000/1/4-2009/12/25)



出所) 筆者作成。

図 2. 日経 225・TOPIX 終値 (2000/1/4-2009/12/25)



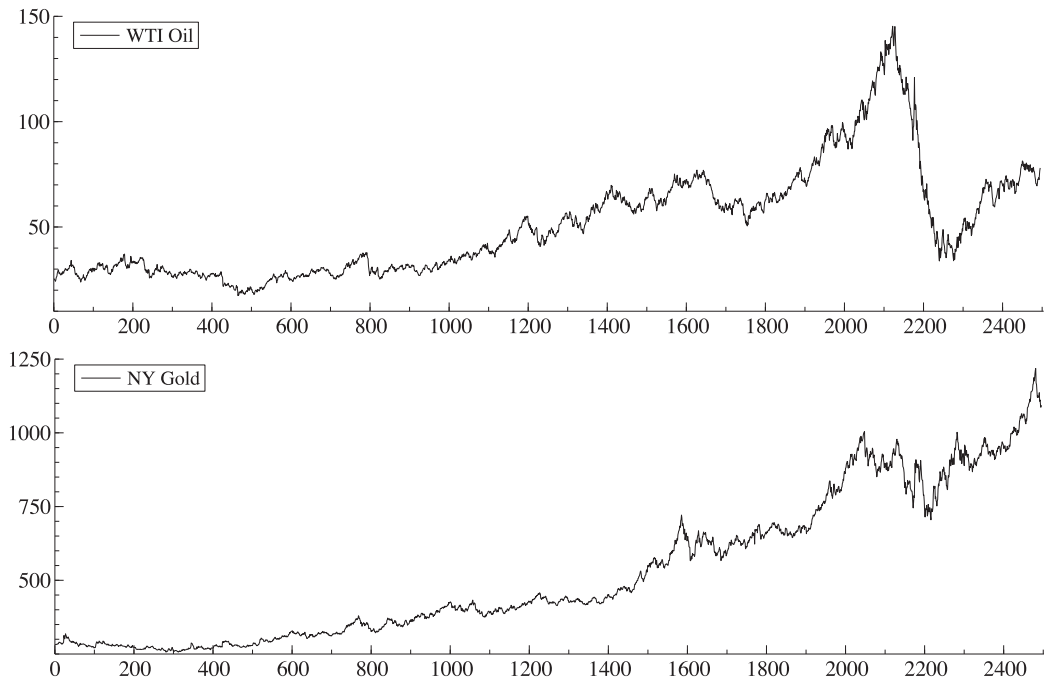
出所) 筆者作成.

図 3. ダウ工業株 30・S&P 500 終値 (2000/1/3-2009/12/24)



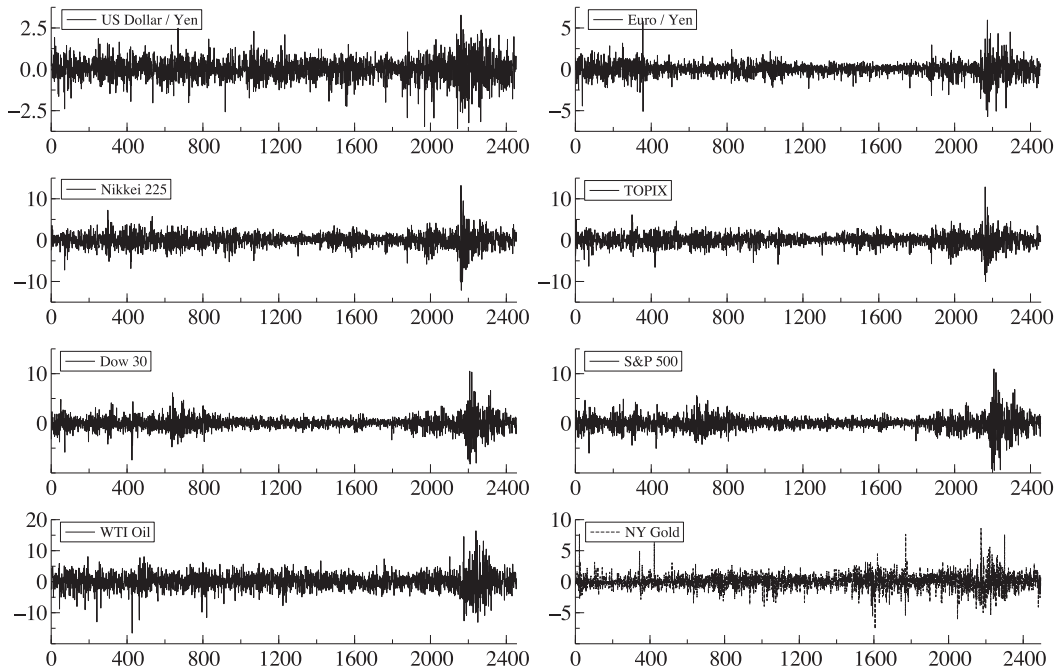
出所) 筆者作成.

図 4. WTI 原油先物価格・金価格 [期近] (2000/1/3-2009/12/24)



出所) 筆者作成.

図 5. 資産価格日次収益率



出所) 筆者作成.

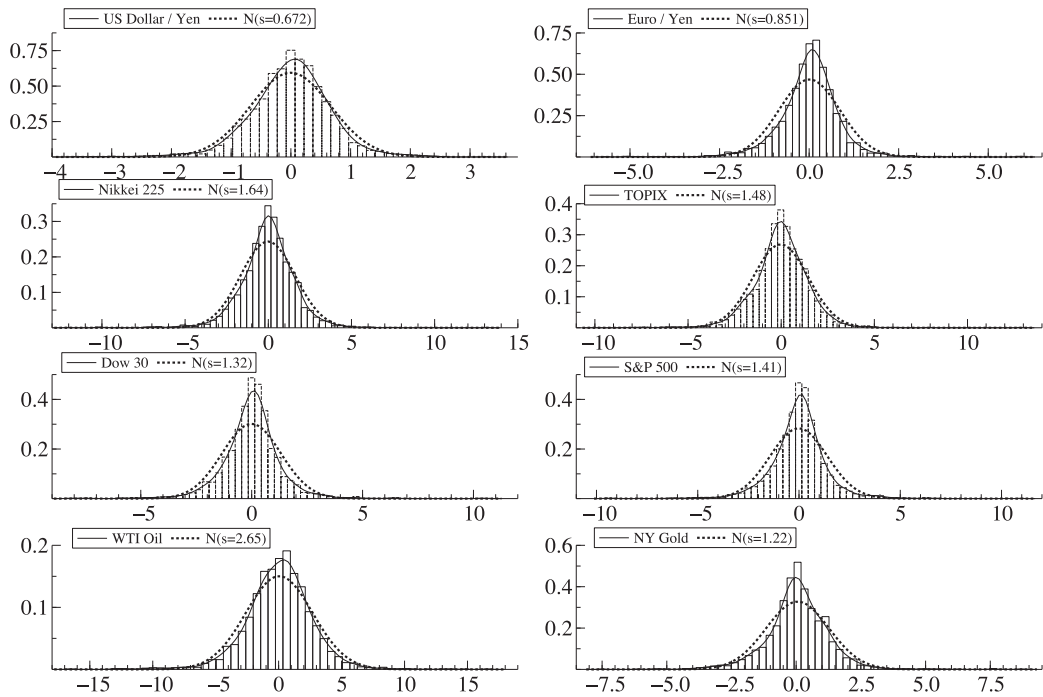
表 1. 資産価格収益率 R_t (%) の基本統計量

資産	平均	標準偏差	歪度	尖度	最大	最小	漸近性検定	正規性検定
USDollar/Yen	-0.005	0.672	-0.336	5.370	3.274	-3.570	620.39*	289.80*
Euro/Yen	0.009	0.851	-0.281	9.863	5.953	-5.710	4846.6*	1473.5*
Nikkei225	-0.024	1.638	-0.300	9.237	13.235	-12.111	4012.2*	1282.2*
TOPIX	-0.026	1.485	-0.234	8.730	12.865	-10.007	3378.3*	1168.9*
Dow30	-0.003	1.317	0.017	10.523	10.508	-8.201	5919.2*	1784.6*
S&P500	0.010	1.401	-0.104	10.629	10.957	-9.470	6090.7*	1806.4*
WTIOil	0.045	2.645	-0.202	6.864	16.410	-16.545	1568.7*	683.01*
NYGold	0.054	1.217	0.136	8.195	8.589	-7.558	2812.3*	1065.4*

* は有意水準 5% で有意であることを示す.

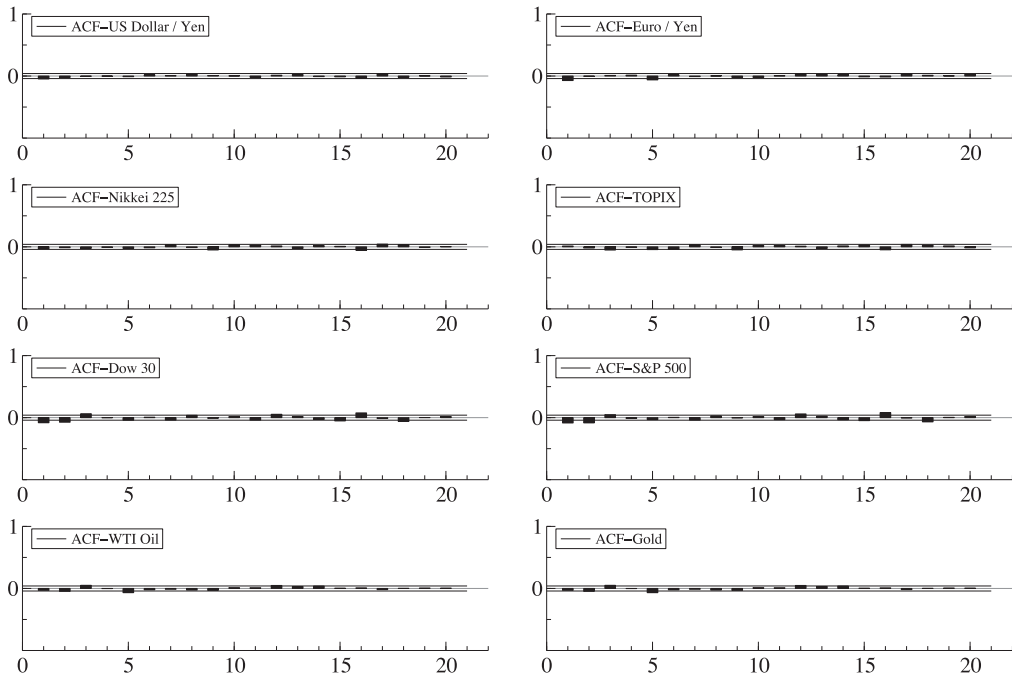
出所) 筆者作成.

図 6. ヒストグラム・密度関数



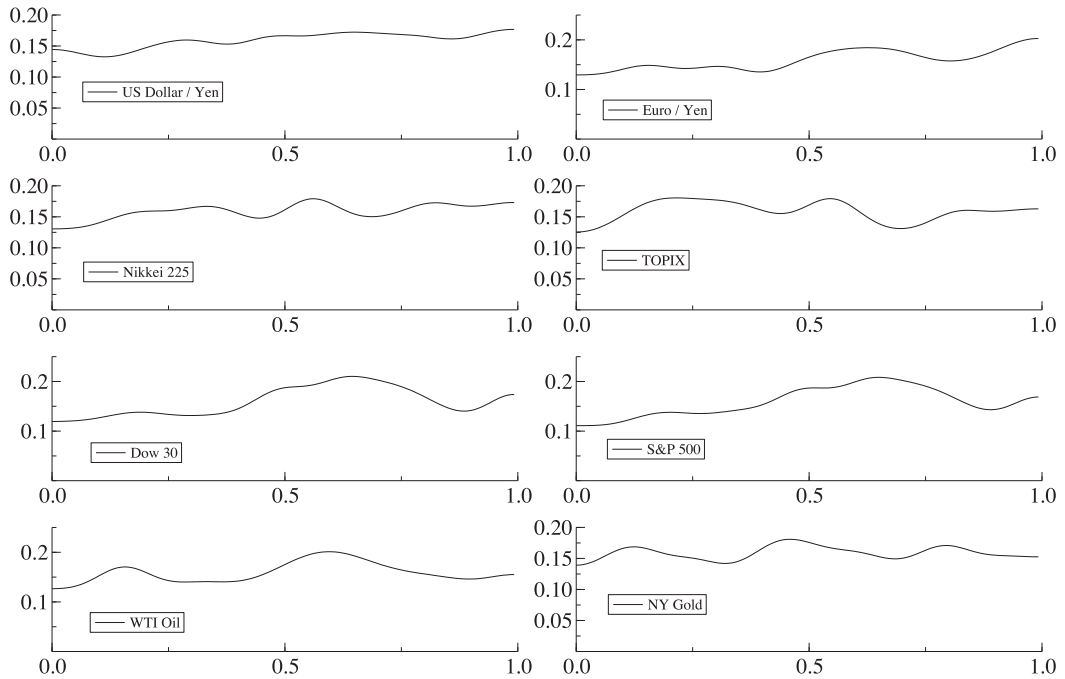
出所) 筆者作成.

図 7. 標本自己相関



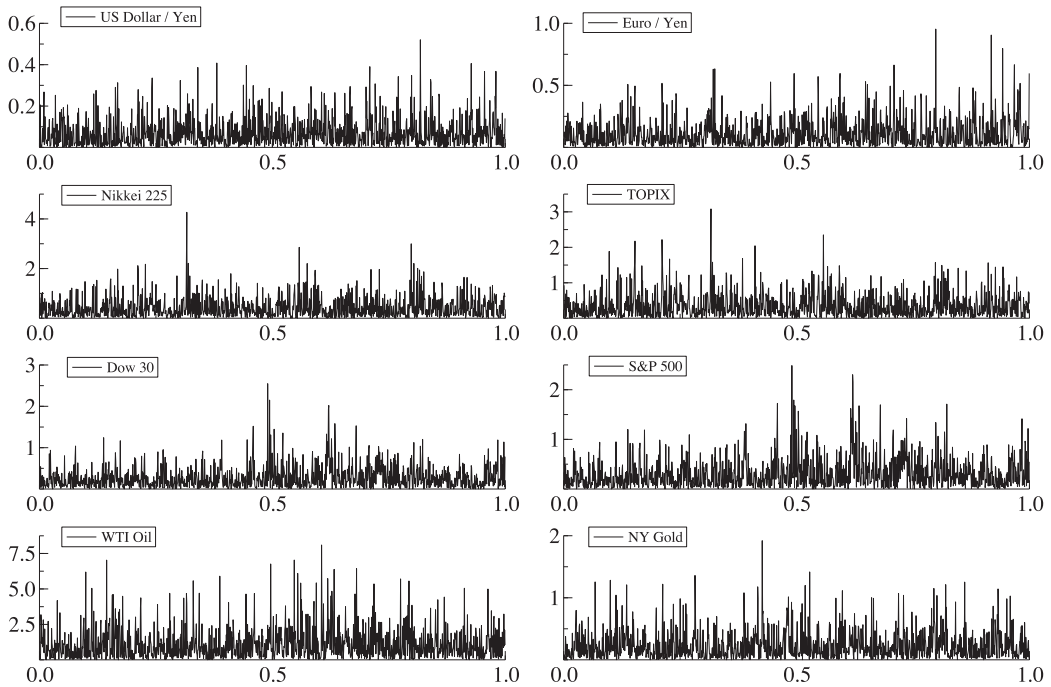
出所) 筆者作成.

図 8. スペクトル密度



出所) 筆者作成.

図9. ピリオドグラム



出所) 筆者作成.

実証結果

本研究の実証結果は、表2-表9に纏められている。推定結果を纏めると以下ようになる。

(1) 米ドル・円為替レート (US Dollar / Yen)

ω , α , β , ν に関しては、統計的に有意な結果となった。 μ , λ , γ に関しては、統計的に有意ではなかった。 λ が有意でないということは、US Dollar / Yen 収益率にはリスク・プレミアムが存在しないということを意味する。また、 γ が有意でないということは、US Dollar / Yen 収益率とボラティリティとの間には非対称性がないことを示している。

(2) ユーロ・円為替レート (Euro / Yen)

μ , α , β , ν に関しては、統計的に有意な結果となった。 λ , ω , γ に関しては、統計的に有意ではなかった。 λ が有意でないということは、Euro / Yen 収益率にはリスク・プレミアムが存在

しないということを意味する。また、 γ が有意でないということは、Euro / Yen 収益率とボラティリティの間には非対称性がないことを示している。

(3) 日経平均株価 (Nikkei 225)

ω , α , γ , β , ν に関しては、統計的に有意な結果となった。 γ が有意であるということは、日経平均株価収益率とボラティリティの間には非対称性があることを示している。 μ , λ に関しては、統計的に有意ではなかった。 λ が有意でないということは、日経平均株価収益率にはリスク・プレミアムが存在しないということを意味する。

(4) 東証株価指数 (TOPIX)

ω , α , γ , β , ν に関しては、統計的に有意な結果となった。 γ が有意であるということは、

表 2. GJR (1, 1)-M モデルの推定 (USDollar/Yen)

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t^2 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu),$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2.$$

	μ	λ	ω	α	γ	β	ν
推定値	0.022	-0.028	0.008*	0.040*	0.025	0.929*	8.181*
t 値	(0.747)	(-0.390)	(2.127)	(3.489)	(1.454)	(46.38)	(6.628)
Log-likelihood	-2306.975						

* は有意水準 5% で有意であることを示す。

出所) 筆者作成。

表 3. GJR (1, 1)-M モデルの推定 (Euro/Yen)

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t^2 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu),$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2.$$

	μ	λ	ω	α	γ	β	ν
推定値	0.055*	-0.025	0.004	0.057*	0.012	0.931*	6.678*
t 値	(3.255)	(-0.839)	(1.652)	(3.132)	(0.724)	(46.24)	(7.788)
Log-likelihood	-2572.005						

* は有意水準 5% で有意であることを示す。

出所) 筆者作成。

TOPIX 収益率とボラティリティとの間には非対称性があることを示している。 μ , λ に関しては、統計的に有意ではなかった。 λ が有意でないということは、TOPIX 収益率にはリスク・プレミアムが存在しないということを意味する。

(5) ニューヨーク・ダウ工業株 30 種平均(Dow 30)

ω , γ , β , ν に関しては、統計的に有意な結果となった。 γ が有意であるということは、Dow 30 収益率とボラティリティとの間には非対称性があることを示している。 μ , α , λ に関しては、統計的に有意ではなかった。 λ が有意でないということは、Dow 30 収益率にはリスク・プレミアムが存在しないということを意味する。

(6) S&P 500

ω , α , γ , β , ν に関しては、統計的に有意

な結果となった。 γ が有意であるということは、S&P 500 収益率とボラティリティとの間には非対称性があることを示している。 μ , λ に関しては、統計的に有意ではなかった。 λ が有意でないということは、S&P 500 収益率にはリスク・プレミアムが存在しないということを意味する。

(7) ニューヨーク WTI 原油先物価格 (WTI Oil)

ω , β , ν に関しては、統計的に有意な結果となった。 μ , α , λ , γ に関しては、統計的に有意ではなかった。 λ が有意でないということは、WTI Oil 収益率にはリスク・プレミアムが存在しないということを意味する。 また、 γ が有意でないということは、WTI Oil 収益率とボラティリティとの間には非対称性がないことを示している。

表 4. GJR (1, 1)-M モデルの推定 (Nikkei225)

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t^2 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu),$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2.$$

	μ	λ	ω	α	γ	β	ν
推定値	0.025	-0.009	0.031*	0.026*	0.104*	0.908*	12.785*
t 値	(0.695)	(-0.545)	(2.891)	(2.587)	(4.542)	(74.42)	(3.727)
Log-likelihood	-4299.833						

* は有意水準 5% で有意であることを示す.

出所) 筆者作成.

表 5. GJR (1, 1)-M モデルの推定 (TOPIX)

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t^2 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu),$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2.$$

	μ	λ	ω	α	γ	β	ν
推定値	0.008	-0.003	0.037*	0.029*	-0.114*	0.893*	4.090*
t 値	(0.214)	(-0.128)	(2.834)	(2.620)	(4.678)	(57.64)	(4.090)
Log-likelihood	-4081.775						

* は有意水準 5% で有意であることを示す.

出所) 筆者作成.

表 6. GJR (1, 1)-M モデルの推定 (Dow30)

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t^2 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu),$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2.$$

	μ	λ	ω	α	γ	β	ν
推定値	0.015	-0.001	0.008*	-0.014	0.136*	0.939*	11.080*
t 値	(0.789)	(-0.056)	(2.743)	(-1.739)	(6.956)	(96.57)	(4.302)
Log-likelihood	-3595.790						

* は有意水準 5% で有意であることを示す.

出所) 筆者作成.

表 7. GJR (1, 1)-M モデルの推定 (S&P500)

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t^2 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu),$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2.$$

	μ	λ	ω	α	γ	β	ν
推定値	0.007	-0.002	0.008*	-0.026*	0.142*	0.948*	12.804*
t 値	(0.359)	(-0.112)	(2.605)	(-3.777)	(7.401)	(87.10)	(3.526)
Log-likelihood	-3707.478						

* は有意水準 5% で有意であることを示す.

出所) 筆者作成.

表 8. GJR (1, 1)-M モデルの推定 (WTIOil)

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t^2 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu),$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2.$$

	μ	λ	ω	α	γ	β	ν
推定値	0.107	-0.001	0.089*	0.025	0.027	0.945*	10.050*
t 値	(0.884)	(-0.067)	(3.075)	(1.846)	(1.600)	(76.62)	(4.986)
Log-likelihood	-5696.309						

* は有意水準 5% で有意であることを示す。

出所) 筆者作成。

表 9. GJR (1, 1)-M モデルの推定 (NYGold)

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t^2 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu),$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2.$$

	μ	λ	ω	α	γ	β	ν
推定値	0.096*	-0.029	0.054*	-0.019*	0.192	0.947*	5.061*
t 値	(2.498)	(-0.996)	(2.318)	(3.711)	(-1.223)	(85.32)	(0.060)
Log-likelihood	-3704.413						

* は有意水準 5% で有意であることを示す。

出所) 筆者作成。

(8) ニューヨーク金先物価格 (NY Gold)

$\omega, \alpha, \beta, \nu$ に関しては、統計的に有意な結果となった。 μ, λ, γ に関しては、統計的に有意ではなかった。 λ が有意でないということは、NY Gold 収益率にはリスク・プレミアムが存在しないということを意味する。また、 γ が有意でないということは、NY Gold 収益率とボラティリティとの間には非対称性がないことを示している。

4. 結論と今後の課題

本論文は、GJR (1, 1)-M モデルを用いて US Dollar / Yen, Euro / Yen, Nikkei 225, TOPIX, Dow 30, S&P 500, WTI Oil, NY Gold の分析を統計・時系列分析ソフト G@RCH 4.2 を利用して行なったものである。特に、資産収益率とボラティリティとの間の非対称性と資産収益率のリスク・プレミアムに焦点を当て実証的に検証を行

なったものである。本論文で得られた主な結果を纏めると次のようになる。

1. 資産収益率とボラティリティとの間の非対称性が観測できたのは、株価指数である Nikkei 225, TOPIX, Dow 30, S&P 500 である。外国為替レートである US Dollar / Yen, Euro / Yen と Commodity の WTI Oil, NY Gold では、資産収益率とボラティリティとの間の非対称性を観測することができなかった。株価指数では非対称性が観測され、外国為替レートと Commodity で非対称性が観測されなかったことは多くの先行研究と同様の結果となった。
2. US Dollar / Yen, Euro / Yen, Nikkei 225, TOPIX, Dow 30, S&P 500, WTI Oil, NY Gold のすべての金融資産で資産価格収益率のリスク・プレミアムを観測することはできなかった。

今後の課題としては、

1. G@RCH 4.2 では、Sign Bias Tests や Pearson goodness-of-fit などの分析も可能なので、それらを用いてより詳細な分析を行なう。
2. GJR モデル 以外の GARCH モデル¹¹⁾ や EGARCH モデル¹²⁾ などの ARCH 型モデルを用いて推定・検定を行ない、パフォーマンスの比較を行なう。
3. 金融資産データを個別株式や他の通貨・Commodity に対しても分析を行なう。
4. 多くの株式市場では月曜日にボラティリティが他の曜日に比べて高くなる傾向があるなどの特徴があるので、曜日効果 (seasonal effects) を定式化したモデルを用いる¹³⁾。

などが考えられる。

(日本大学経済学部准教授)

* 本論文は、平成 20 年度日本大学学術研究助成金〔一般研究 (個人)〕から研究助成を受けた。ここに記して深く感謝の意を表したい。

† 日本大学経済学部准教授 E-mail: mitsui.hidetoshi@nihon-u.ac.jp

注

- 1) 詳しくは、Laurent and Peters (2006) を参照。
- 2) ファイナンス理論・実証研究における収益率の分布に関する論文集として、Knight and Stachell (eds.) (2001) がある。
- 3) 資産の選択は筆者の独断で選択した。
- 4) リスク資産の期待収益率と安全資産収益率との差をリスク・プレミアムと呼ぶ。収益率の過程にボラティリティを説明変数として組み込んで定式化している。詳しくは、Engle, Lilien and Robins (1987) を参照。
- 5) 詳しくは、Black (1976), Bekaert and Wu (2000) を参照。また、株式市場でのボラティリティは“good news”よりも“bad news”の方により反応する傾向がある。
- 6) t 分布の確率密度関数は以下のように与えられる。

$$f(x) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} \left\{ 1 + \frac{(x-\mu)^2}{\nu\sigma^2} \right\}^{-(\nu+1)/2}, \quad \nu > 0$$

ここで、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。

- 7) PcGive により GARCH や EGARCH モデルの分析を行なうことも可能である。PcGive により ARCH 型モデルで金融資産の時系列分析を行なった研究としては、三井 (2007), 三井 (2008) を参照。
- 8) 本研究では、図の作成も PcGive により行なっている。G@RCH や PcGive により作成したファイルは“.eps” ファイルで L^AT_EX に取り込むことができる。
- 9) 詳しくは、Doornik (2006) を参照。
- 10) PcGive では、尖度の値は超過尖度 (excess kurtosis)

$$\hat{kurt}^{\text{超過}} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \frac{(R_i - \hat{\mu})^4}{\hat{\sigma}^4} - 3$$

を標本尖度として定義しているので注意が必要である。本研究では、+3 をして表に掲載した。

- 11) GARCH モデルは以下のように記述される。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

- 12) EGARCH モデルは以下のように記述される。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) + \sum_{i=1}^q \alpha_i [\gamma z_{t-i} + \zeta (|z_{t-i}| - E(|z_{t-i}|))].$$

- 13) 例えば、Noh, Engle and Kane (1994) は曜日効果を捉えるために以下のような GARCH-S (seasonal GARCH) を用いている。

$$\sigma_t^2 = n_t^\delta \left[\omega + n_{t-1}^{-\delta} \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \right) \right]. \quad (11)$$

n_t は $(t-1)$ 営業日と t 営業日との間の「休業日数+1」(t 営業日の何日前が $(t-1)$ 営業日となるかを示す)、 δ は t 営業日でのボラティリティのスピードを表す。例えば、「 $t =$ 月曜日」で前営

業日が金曜日ならば, $n_t=3$ であり, ボラティリティは n_t 倍増加する.

参考文献

- ヘンドリー, D. F., J. A. ドーニック (市川博也 [訳・解説]) (2006) 『PcGive による時系列分析入門』日本評論社.
- 三井秀俊 (2007) 「外国為替レート変動の GARCH モデルによる分析」日本大学経済学部『経済集志』第76巻, 第4号, pp.29-40.
- (2008) 「EGARCH モデルによる個別株式の株価変動に関する分析」日本大学経済学部『経済集志』第77巻, 第4号, pp.173-185.
- Baillie, R. T., T. Bollerslev and H. O. Mikkelsen (1996) “Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 74, pp.3-30.
- Bekaert, G. and G. Wu (2000) “Asymmetric Volatility and Risk in Equity Markets,” *Review of Financial Studies*, 13, pp.1-42.
- Black, F. (1976) “Studies of Stock Market Volatility Changes,” *Proceedings of the American Statistical Association, Business & Economic Statistics Section*, pp.177-181.
- Bollerslev, T. (1986) “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31, pp.307-327.
- Bollerslev, T. and H. O. Mikkelsen (1996) “Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility,” *Journal of Econometrics*, 73, pp.151-184.
- Davidson, J. (2001) “Moment and Memory Properties of Linear Conditional Heteroskedasticity Models,” Manuscript, Cardiff University.
- Ding, Z., C. W. J. Granger and R. F. Engle (1993) “A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model,” *Journal of Empirical Finance*, 1, pp.83-106.
- Doornik, J. A. (2006) *An Introduction to OxMetrics 4-A Software System for Data Analysis and Forecasting*, Timberlake Consultants Ltd.
- Doornik, J. A. and D. F. Hendry (2006) *Econometric Modelling Using PcGive 10 Volume III*, Timberlake Consultants Ltd.
- Engle, R. F. (1982) “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation,” *Econometrica*, 50, pp.987-1007.
- Engle, R. F. and T. Bollerslev (1986) “Modeling the Persistence of Conditional Variances,” *Econometric Reviews*, 5, pp.1-50.
- Engle, R. F., D. M. Lilien and R. P. Robins (1987) “Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model,” *Econometrica*, 55, pp.391-407.
- Glosten, L. R., R. Jagannathan and D. Runkle (1993) “On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks,” *Journal of Finance*, 48, pp.1779-1801.
- J. P. Morgan (1996) *Riskmetrics Technical Document*, 4th ed. J. P. Morgan, New York.
- Knight, J. and S. Stachel (eds.) (2001) *Return Distributions in Finance*, Butterworth-Heinemann.
- Laurent, S. and J.-P. Peters (2002) “G@RCH 2.2: An Ox Package for Estimating and Forecasting Various ARCH Models,” *Journal of Economic Surveys*, 16, pp.447-485.
- (2006) *Estimating and Forecasting ARCH Models Using G@RCH 4.2*, Timberlake Consultants Ltd.
- Mitsui, H. (2008) “Analysis of Asymmetry between Volatility and the Rate of Return on the Yen / US Dollar, Yen / Euro Exchange Rate,” *Journal of Business Research, Institute of Business Research, College of Economics, Nihon University*, No.30, pp.85-102.
- Nelson, D. B. (1991) “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach,” *Econometrica*, 59, pp.347-370.
- Noh, J., R. F. Engle and A. Kane (1994) “Forecasting Volatility and Option Pricing of the S&P500 Index,” *Journal of Derivatives*, pp.17-30, Reprinted in Engle, R. F. (ed.), *ARCH: Selected Readings* (1995) Chapter 15, Oxford University Press.
- Tse, Y. K. (1998) “The Conditional Heteroskedasticity of the Yen-Dollar Exchange Rate,” *Journal of Applied Econometrics*, 13, pp.49-55.