

原資産価格のブル・ベアを考慮したオプション価格付けの実証研究

里 吉 清 隆[†]・三 井 秀 俊[‡]

1. はじめに

近年のオプション市場での実証研究では、ボラティリティの時系列的変動をどのように定式化してオプション価格を評価すればよいか非常に重要な問題となっている。Engle (1982) はボラティリティの変動を明示的に捉えるために、各時点のボラティリティを過去の予期しないショックの2乗の線型関数として定式化するARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) モデルを提案した。また、Bollerslev (1986) はボラティリティの説明変数に過去のボラティリティの値を加えて、GARCH (generalized ARCH) モデルと呼ばれるより一般的なモデルに拡張を行なった。このようなARCH型モデルを用いたオプションの実証研究としては、Engle and Mustafa (1992), Noh *et al.* (1994), Saez (1997), Sabbatini and Linton (1998), Bauwens and Lubrano (1998), 森保 (1999), 三井 (2000), Duan and Zhang (2001), Bauwens and Lubrano (2002), 三井・渡部 (2003), 渡部 (2003), 竹内・渡部 (2008), Watanabe and Ubukata (2009) がある。

ところで、ARCHモデルを始めとしたボラティリティ変動モデルの研究では、一般に、ボラティリティに対するショックの持続性が非常に高いことが知られている。しかし、Diebold (1986) と Lamoureux and Lastrapes (1990) が指摘しているように、このような持続性はボラティリティの構造変化によって引き起こされた可能性が考えられる。このことから、Hamilton and Susmel (1994) と Cai (1994) は、構造変化を捉えるために

ARCHモデルの定式化にマルコフ連鎖に従う状態変数を含めたマルコフ・スイッチングARCH (markov-switching ARCH; MSARCH) モデルを提案した。さらに、Gray (1996) はARCHモデルではなくGARCHモデルに構造変化を含めたマルコフ・スイッチングGARCH (markov-switching GARCH; MSGARCH) モデルに拡張した¹⁾。MSGARCHモデルはその後、Klaassen (2002), Haas *et al.* (2004) によって改良が加えられた。

里吉 (2004a) は、Gray (1996) のMSGARCHモデルを用いてTOPIXの実証分析を行ない、TOPIX変化率はスイッチングを起こしていること、また、ボラティリティの予測では、日次収益率の2乗を真のボラティリティの代理変数としてモデルの比較をした結果、従来のGARCHモデルよりも予測力が高いことを示した²⁾。この結果を踏まえて、Satoyoshi and Mitsui (2011) はGray (1996) のMSGARCHモデルを用いて日経225オプションに関する実証分析を行ない、コール・オプションの評価では、誤差項に t 分布を仮定したMSGARCHモデルは、従来のGARCHモデルやBlack and Scholes (1973) モデル (以下、BSモデル) に比べてパフォーマンスが優れているという結果を得た。MSGARCHモデルは、マルコフ・スイッチング・モデルとGARCHモデルを組み合わせたモデルであり、原資産価格の収益率の分布の裾の厚さの特徴を十分に表現することができることから、オプション評価のパフォーマンスが向上したと考えられる。

しかし、ここでは期待収益率を定数として収益率の式を定式化したため、分布の歪みについては

全く考慮していない。原資産価格である日経 225 株価指数は、長期のデータを観察すると上昇トレンドの時期（ブル）と下降トレンドの時期（ベア）があることが見て取れる。このようなブル・ベアを期待収益率のスイッチングでモデル化することにより、左右対称でない収益率の分布の歪みを表現することができる。また、株価が上昇した翌日のボラティリティよりも下落した翌日のボラティリティの方が高くなるという、いわゆるボラティリティの非対称性は日経 225 株価指数において以前から観察されていることから、そのような変動特性を捉えた EGARCH モデルのほうが、GARCH モデルよりもオプション評価の点で優れている可能性がある。GARCH モデルよりもスイッチングを含めた MSGARCH モデルのほうがオプション評価が優れていること、また、ボラティリティの非対称性が観察されていることなどを踏まえて考えると、オプション評価において EGARCH モデルにスイッチングを含めたマルコフ・スイッチング EGARCH (MSEGARCH) モデルのパフォーマンスが高くなる可能性がある。

本研究では、原資産のボラティリティだけでなく、期待収益率もマルコフ・スイッチングを起こす EGARCH モデル、すなわち MSEGARCH モデルを用いて日経 225 オプション価格の評価を行ない、他のモデルに比べてパフォーマンスが高いか検証を行なうことにする。この MSEGARCH モデルは Haas *et al.* (2004) の MSGARCH モデルをベースとしている³⁾。MSGARCH モデルを MSEGARCH モデルに拡張し、さらにマルコフ連鎖に従う状態変数を 1 つから 2 つに増やしている。状態変数が 1 つだけだと、たとえ期待収益率のスイッチングを仮定しても、ボラティリティのスイッチングと同時になければならないという制約が生じてしまう。期待収益率のスイッチングはボラティリティのスイッチングと同時に起きているとは限らないことから、状態変数を 2 つにして、期待収益率とボラティリティのスイッチングが別々に起きることを許容するモデルとした。日

経 225 オプションのようなヨーロピアン・オプションの価格は、投資家のリスク中立性を仮定するとモンテカルロ・シミュレーションによって簡単に導出することができる。また、本研究ではシミュレーションの収束を早める手段として、負相関法と制御変量法の 2 つの分散減少法を用いた。

実証分析の結果、原資産である日経 225 株価指数のブル・ベアは、誤差項に t 分布を仮定した MSEGARCH モデルによってのみ捉えることができ、満期までの期間が長いコール・オプションに関しては、このモデルのパフォーマンスが最も優れていることが分かった。また、リーマン・ショック直後のボラティリティの上昇局面では、コール・オプションに関しては、従来の GARCH モデルや BS モデルのパフォーマンスは非常に悪い一方、MSEGARCH モデルと EGARCH モデルによるオプションの評価は極めて優れていることが示された。さらに、原資産価格収益率とボラティリティとの非対称性を踏まえた定式化や誤差項の分布、期待収益率とボラティリティがマルコフ・スイッチング過程に従うという仮定は、オプション価格の評価に大きく影響を与えることが明らかになった。

本論文の以下の構成は次の通りである。第 2 節では、MSEGARCH モデルとリスク中立性を仮定した場合の収益率の定式化について解説し、本研究で比較するモデルについて述べる。第 3 節では、モンテカルロ・シミュレーションによるヨーロピアン・オプションの評価法を説明する。実証分析の結果は第 4 節にまとめた。第 5 節は結論、第 6 節は補論である。

2. 分析モデル

2.1 MSEGARCH モデル

原資産価格の収益率を R_t とすると、MSEGARCH モデルは次のように表される。

$$R_t = \mu_a + \sqrt{V_{ab,t}} z_t, \quad (2.1)$$

$$z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, V[z_t] = 1, \quad (2.2)$$

$$\ln(V_{ab,t}) = \omega_b + \beta \ln(V_{ab,t-1}) + \theta \left[\frac{R_{t-1} - \mu_a}{\sqrt{V_{ab,t-1}}} \right] \quad (2.3)$$

$$+ \gamma \left[\left| \frac{R_{t-1} - \mu_a}{\sqrt{V_{ab,t-1}}} \right| - E[|z_{t-1}|] \right], \quad (2.3)$$

$$\mu_a = \mu_1 \Delta_{1t} + \mu_2 \Delta_{2t}, \mu_1 < \mu_2, \quad (2.4)$$

$$\omega_b = \omega_1 \Gamma_{1t} + \omega_2 \Gamma_{2t}, \omega_1 < \omega_2. \quad (2.5)$$

ただし、(2.4) 式の $(\Delta_{1t}, \Delta_{2t})$ は、 $\Delta_t = 1$ のとき $(\Delta_{1t} = 1, \Delta_{2t} = 0)$ 、 $\Delta_t = 2$ のとき $(\Delta_{1t} = 0, \Delta_{2t} = 1)$ となる変数である。同様に、(2.5) 式の $(\Gamma_{1t}, \Gamma_{2t})$ は、 $\Gamma_t = 1$ のとき $(\Gamma_{1t} = 1, \Gamma_{2t} = 0)$ 、 $\Gamma_t = 2$ のとき $(\Gamma_{1t} = 0, \Gamma_{2t} = 1)$ となる変数である。 Δ_t と Γ_t は互いに独立なマルコフ連鎖に従う状態変数であり、それぞれ 1、または 2 の値をとる。ボラティリティ $V_{ab,t}$ は、2 つの状態変数 Δ_t, Γ_t と $t-1$ 時点までの情報集合 $I_{t-1} = \{R_{t-1}, R_{t-2}, \dots\}$ を条件とした R_t の条件付き分散 $V_{ab,t} = V[R_t | \Delta_t = a, \Gamma_t = b, I_{t-1}]$ である。 t 時点における状態変数の組み合わせは、 $(\Delta_t = 1, \Gamma_t = 1)$ 、 $(\Delta_t = 1, \Gamma_t = 2)$ 、 $(\Delta_t = 2, \Gamma_t = 1)$ 、 $(\Delta_t = 2, \Gamma_t = 2)$ であり、したがって、期待収益率とボラティリティの組み合わせは、ロー・リターンでロー・ボラティリティ (μ_1, ω_1) 、ロー・リターンでハイ・ボラティリティ (μ_1, ω_2) 、ハイ・リターンでロー・ボラティリティ (μ_2, ω_1) 、ハイ・リターンでハイ・ボラティリティ (μ_2, ω_2) の 4 通りになる。状態変数が 1 つの場合は、期待収益率とボラティリティの双方が同時にスイッチングすることになるが、2 つの状態変数、 Δ_t と Γ_t を導入することによって、期待収益率とボラティリティが別の時期にスイッチングを起こすことを許容している。また、期待収益率がそれぞれ $\mu_1 < 0$ 、 $\mu_2 > 0$ であるならば、ロー・リターンの局面をベア、ハイ・リターンの局面をブルと呼ぶことができる。推移確率は、

$$\Pr[\Delta_t = j | \Delta_{t-1} = i] = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

$$\Pr[\Gamma_t = l | \Gamma_{t-1} = k] = q_{kl}, \quad k, l = 1, 2,$$

$$\sum_{j=1}^2 p_{ij} = \sum_{l=1}^2 q_{kl} = 1$$

とする。行列で表すと

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix}$$

となる。

ボラティリティ変動モデルを推定する場合、誤差項の z_t の分布には標準正規分布を仮定することが多い。資産価格の収益率の分布は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることが古くから知られているが⁸、誤差項が正規分布に従っていても、ボラティリティが変動するなら収益率の尖度は 3 を上回る⁴⁾。しかし、収益率の尖度の高さがボラティリティの変動だけで説明できるとは限らず、実際、多くの先行研究では、誤差項の分布に正規分布よりも尖度の高い分布を用いた方が当てはまりが良いとの結果が得られている。したがって、誤差項の分布には正規分布と t 分布の両方を考える。誤差項が標準正規分布に従う場合、(2.2) 式の z_t は、

$$z_t \sim i.i.d.N(0, 1) \quad (2.6)$$

となる。 t 分布に従う場合には、

$$z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu) \quad (2.7)$$

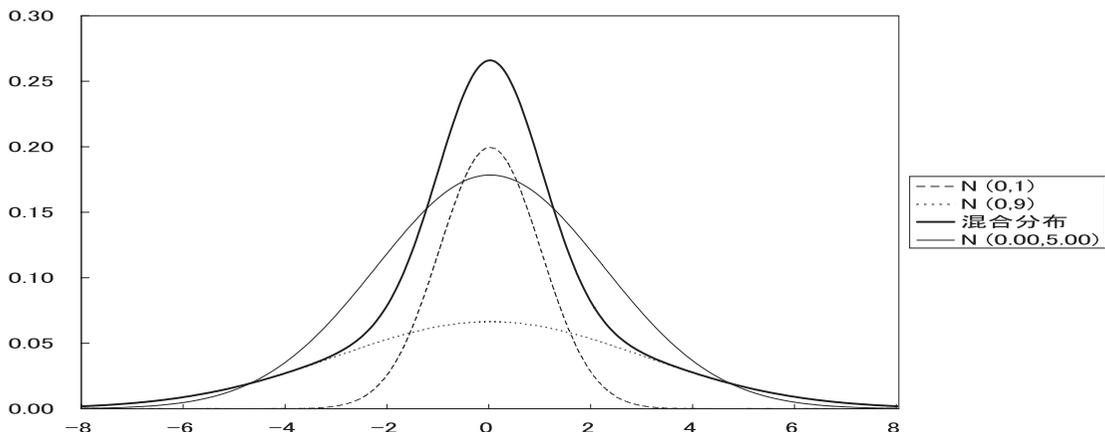
となる。ただし、 ν は自由度であり、 z_t の分散は 1 に基準化されている。以下では、MSEGARCH モデルを MSEG モデルと略して、誤差項が正規分布に従うモデルを MSEG-n モデル、誤差項が t 分布のモデルを MSEG-t モデルと呼ぶことにする。

本研究では、モデルの最尤推定を可能にするために、ボラティリティの定式化には Haas *et al.* (2004) のアイデアを採用している。GARCH モ

デルや EGARCH モデルにマルコフ連鎖に従う状態変数を直接導入すると、最尤法でパラメータの推定を行なうことができない。なぜなら、 t 時点のボラティリティは t 時点までの全ての状態変数に依存するため、状態変数が 1 つで 2 つの状態をとるとすると 2^t 通りの状態変数の組み合わせを考えなければならず、プログラミングが非常に困難になってしまうからである⁵⁾。したがって、(2.3) 式のように、 t 時点のボラティリティが $V_{ab,t}$ のとき、 $t-1$ 時点のボラティリティは $V_{ab,t-1}$ となるようにしている。つまり、 t 時点でスイッチングが起きたとき、 $t-1$ 時点の状態は t 時点の状態と異なるのにもかかわらず、 t 時点と同じ状態の $t-1$ 時点のボラティリティを考え、それに依存して t 時点のボラティリティが決定されることになる。例えば、 $t-1$ 時点がロー・リターンでロー・ボラティリティ、すなわち、状態変数が $(\Delta_{t-1}=1, \Gamma_{t-1}=1)$ であるとする。 t 時点でスイッチングが起きて、ハイ・リターン μ_2 でハイ・ボラティリティ ω_2 になったとすると、状態変数は $(\Delta_t=2, \Gamma_t=2)$ に変化する。このときのボラティリティは、(2.3) 式より、

$$\ln(V_{22,t}) = \omega_2 + \beta \ln(V_{22,t-1}) + \theta \left[\frac{R_{t-1} - \mu_2}{\sqrt{V_{22,t-1}}} \right] + \gamma \left[\left| \frac{R_{t-1} - \mu_2}{\sqrt{V_{22,t-1}}} \right| - E[|z_{t-1}|] \right]$$

図1. ボラティリティのみがスイッチングする場合

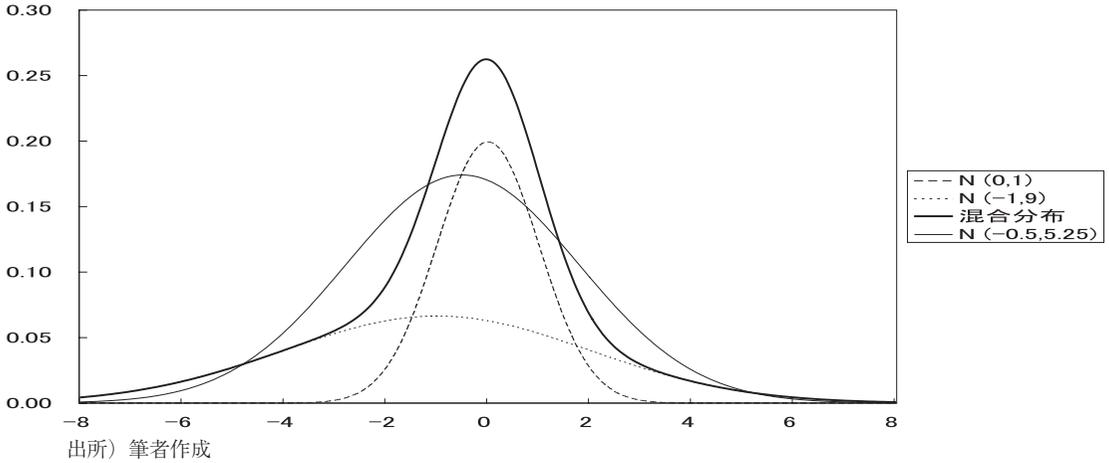


出所) 筆者作成

となる。この式を見ると、 t 時点のボラティリティは $V_{22,t}$ 、その定数項は ω_2 、 $t-1$ 時点のボラティリティと期待収益率はそれぞれ $V_{22,t-1}$ 、 μ_2 となっている。つまり、 $t-1$ 時点は $(\Delta_{t-1}=1, \Gamma_{t-1}=1)$ であるのにもかかわらず、あたかも t 時点と同じ状態 $(\Delta_{t-1}=2, \Gamma_{t-1}=2)$ であるかのようにになっている。このことによって、状態変数の無数の組み合わせを考える必要が無くなり、最尤法によるパラメータの推定が可能になる。詳しい推定法は、補論の 6 節で解説する。

Satoyoshi and Mitsui (2011) では、原資産価格の期待収益率は定数であると仮定して、MSGARCH モデルによるオプションの評価を行なった。本研究ではこの仮定を緩めて、ボラティリティと同時に期待収益率もスイッチングさせている。このように原資産価格の期待収益率の変動を含めることによって、収益率の分布の裾の厚さだけでなく、分布の歪みも捉えることができるようになる。その結果、オプション評価のパフォーマンスが向上することが期待される。図1と図2は、期待収益率のスイッチングにより分布の歪みが生じることを図示したものである。図1の太線は、2つの正規分布 $N(0,1)$ 、 $N(0,9)$ からなる混合正規分布(加重値は同じ)のグラフである。この混合正規分布の平均は $E[X]=0$ 、分散は

図2. 期待収益率とボラティリティがスイッチングする場合



$V[X] = 5$ であり、そのような平均と分散を持つ正規分布 $N(0, 5)$ も細線で描いてある。この図から明らかなように、混合正規分布は正規分布よりも裾の厚い分布になる。図2は、2つの正規分布 $N(0, 1), N(-1, 9)$ からなる混合正規分布（加重値は同じ）と、混合正規分布と同じ平均と分散を持つ正規分布 $N(-0.5, 5.25)$ のグラフである。図1のケースとは違い、平均を異なる値にすることによって、混合正規分布は分布の裾の厚さだけでなく、分布の歪みも表現できることが分かる。

2.2 投資家のリスク中立性と収益率の定式化

t 時点のオプションの原資産価格を S_t とする。本研究では、 t 時点の原資産価格の収益率 R_t を以下のように定義する⁶⁾。

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}. \quad (2.8)$$

本研究では、投資家はリスク中立的（risk neutral）であると仮定する。したがって、 t 時点の無リスク資産の利率を r_t としたとき、 $t-1$ 時点までの情報 I_{t-1} が与えられたもとの t 時点の原資産の期待収益率 $E[R_t | I_{t-1}]$ は r_t と等しくなる。 R_t は (2.8) 式として定義されているので、代入して書き換えると、

$$E \left[\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \middle| I_{t-1} \right] = r_t,$$

つまり、

$$E[S_t | I_{t-1}] = S_{t-1}(1 + r_t)$$

となり、リスク中立性が成立していることが確認できる。本研究では、無リスク資産の利率は原資産の期待収益率と等しくなるように変動していると仮定して、オプション価格の評価を行なうことにする。つまり、 t 時点の原資産の期待収益率が μ_1 なら、 $r_t = \mu_1$ 、 $t+1$ 時点で期待収益率にスイッチングが起きて μ_2 になったら、 $r_{t+1} = \mu_2$ というように、状態変数 Δ_t に従って無リスク資産の利率が変動すると仮定する。この仮定によって、満期におけるオプション価格の期待値の割引現在価値を簡単に求めることができる。

2.3 本研究で比較するモデル

本研究では、上記の MSEG モデルだけでなく、定式化の異なるいくつかのボラティリティ変動モデルも併せて、オプションの評価を行なう。期待収益率は定数で、ボラティリティのみスイッチングを起こす EGARCH モデルは次の通りである。

$$R_t = \mu + \sqrt{V_{b,t}} z_t,$$

$$\ln(V_{b,t}) = \omega_b + \beta \ln(V_{b,t-1}) + \theta \left[\frac{R_{t-1} - \mu}{\sqrt{V_{b,t-1}}} \right]$$

$$+ \gamma \left[\left| \frac{R_{t-1} - \mu}{\sqrt{V_{b,t-1}}} \right| - E[|z_{t-1}|] \right],$$

$$\omega_b = \omega_1 \Gamma_{1t} + \omega_2 \Gamma_{2t}, \quad \omega_1 < \omega_2.$$

ただし、 $(\Gamma_{1t}, \Gamma_{2t})$ は MSEG モデルと同様に、 $\Gamma_{1t} = 1$ のとき $(\Gamma_{1t} = 1, \Gamma_{2t} = 0)$ 、 $\Gamma_{1t} = 2$ のとき $(\Gamma_{1t} = 0, \Gamma_{2t} = 1)$ となる。 Γ_t はマルコフ連鎖に従う状態変数であり、それぞれ 1、または 2 の値をとる。このように期待収益率を定数としたモデルを MSEG-c モデルとして、誤差項が正規分布に従うモデルを MSEG-c-n モデル、 t 分布に従うモデルを MSEG-c-t モデルとする。

期待収益率とボラティリティがスイッチングを起こす GARCH モデルは、

$$R_t = \mu_a + \sqrt{V_{ab,t}} z_t,$$

$$V_{ab,t} = \omega_b + a(R_{t-1} - \mu_a)^2 + \beta V_{ab,t-1},$$

$$\mu_a = \mu_1 \Delta_{1t} + \mu_2 \Delta_{2t}, \quad \mu_1 < \mu_2,$$

$$\omega_b = \omega_1 \Gamma_{1t} + \omega_2 \Gamma_{2t}, \quad \omega_1 < \omega_2$$

となる。MSEG モデルと同様に、期待収益率とボラティリティのスイッチングは独立に起きると仮定している。誤差項が正規分布に従うモデルを MSG-n モデル、 t 分布に従うモデルを MSG-t モデルとする。

ボラティリティのみがスイッチングを起こす GARCH モデルは、

$$R_t = \mu + \sqrt{V_{b,t}} z_t,$$

$$V_{b,t} = \omega_b + a(R_{t-1} - \mu)^2 + \beta V_{b,t-1},$$

$$\omega_b = \omega_1 \Gamma_{1t} + \omega_2 \Gamma_{2t}, \quad \omega_1 < \omega_2$$

となる。誤差項が正規分布に従うモデルを MSG-c-n モデル、 t 分布に従うモデルを MSG-c-t モデル

とする。

通常の GARCH モデル、EGARCH モデルについてもオプションの評価を行ない、誤差項の分布に従ってそれぞれ GARCH-n、GARCH-t、EGARCH-n、EGARCH-t とする。さらに、BS モデルによって計算したオプション価格についても、分析の対象に含めることにする⁷⁾。

3. オプション価格の導出方法

3.1 リスク中立性の下でのオプション価格

投資家がリスク中立な場合、ヨーロッパアン・オプションの価格は、満期におけるオプション価格の期待値を無リスク資産の利子率 r で割り引いた割引現在価値となる。すなわち、 $T + \tau$ 時点が満期で権利行使価格 K のコール・オプションの T 時点の価格を C_T 、プット・オプションの価格を P_T とすると、

$$C_T = (1+r)^{-\tau} E[Max(S_{T+\tau} - K, 0)], \quad (3.1)$$

$$P_T = (1+r)^{-\tau} E[Max(K - S_{T+\tau}, 0)] \quad (3.2)$$

と表される。ここで、 $S_{T+\tau}$ はオプションの満期の原資産価格である。本研究では、無リスク資産の利子率 r は原資産の期待収益率 μ_a と等しくなるように変動すると仮定している。したがって、 T 時点から満期である $T + \tau$ 時点までの利子率は、状態変数 Γ_t に従って、 μ_1 、 μ_2 の値をとることになる。MSEG モデルの場合、右辺の期待値を解析的に求めることができないので、モンテカルロ・シミュレーションによって評価する。シミュレーションを n 回行ない、 n 個の満期の原資産価格 $S_{T+\tau}$ が得られたとして、これらを

$$(S_{T+\tau}^{(1)}, S_{T+\tau}^{(2)}, \dots, S_{T+\tau}^{(n)})$$

する。ただし、 $S_{T+\tau}^{(i)}$ は i 回目のパスの発生によって得られた満期の原資産価格である。 n が十分に大きいとき、大数の法則 (law of large numbers) より (3.1)、(3.2) 式の期待値はそれぞれ以下の

式によって評価することができる。

$$E [Max (S_{T+\tau} - K, 0)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Max (S_{T+\tau}^{(i)} - K, 0), \quad (3.3)$$

$$E [Max (K - S_{T+\tau}, 0)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Max (K - S_{T+\tau}^{(i)}, 0). \quad (3.4)$$

3.2 モンテカルロ・シミュレーションの手順

本研究のモデルにおけるオプション価格のモンテカルロ・シミュレーションによる計算手順は以下の通りである。ここでは誤差項が正規分布に従う MSEG-n モデルについて説明する。

[1] 標本 $\{R_1, R_2, \dots, R_T\}$ を使って、MSEG-n モデルの未知パラメータを最尤推定する。

[2] 互いに独立な標準正規分布から

$$\{z_{T+1}^{(i)}, z_{T+2}^{(i)}, \dots, z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$$

をサンプリングする

[3] 互いに独立な標準一様分布から、2 系列の乱数

$$\left\{ u_{1,T+1}^{(i)}, u_{1,T+2}^{(i)}, \dots, u_{1,T+\tau}^{(i)} \right\}_{i=1}^n, \\ \left\{ u_{2,T+1}^{(i)}, u_{2,T+2}^{(i)}, \dots, u_{2,T+\tau}^{(i)} \right\}_{i=1}^n$$

をサンプリングする。

[4] 手順 [3] の一様乱数と最尤法で推定された推移確率 P, Q を使って、マルコフ過程に従う状態変数

$$\left\{ \Delta_{T+1}^{(i)}, \Delta_{T+2}^{(i)}, \dots, \Delta_{T+\tau}^{(i)} \right\}_{i=1}^n, \\ \left\{ \Gamma_{T+1}^{(i)}, \Gamma_{T+2}^{(i)}, \dots, \Gamma_{T+\tau}^{(i)} \right\}_{i=1}^n$$

を求める。

[5] 手順 [2], [4] の値を MSEG-n モデルに代入して、

$$\left\{ R_{T+1}^{(i)}, R_{T+2}^{(i)}, \dots, R_{T+\tau}^{(i)} \right\}_{i=1}^n$$

を計算する。

[6] 次の式を使ってオプションの満期 $T + \tau$ 時点における原資産価格

$$(S_{T+\tau}^{(1)}, S_{T+\tau}^{(2)}, \dots, S_{T+\tau}^{(n)})$$

を求める。

$$S_{T+\tau}^{(i)} = S_T \prod_{s=1}^{\tau} (1 + R_{T+s}^{(i)}), \\ i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

[7] 次の式からコール・オプションの価格 C_T 、プット・オプションの価格 P_T をそれぞれ計算する。

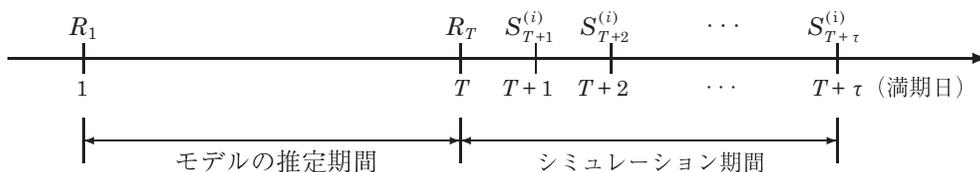
$$C_T = (1 + r)^{-\tau} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Max (S_{T+\tau}^{(i)} - K, 0), \quad (3.6)$$

$$P_T = (1 + r)^{-\tau} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Max (K - S_{T+\tau}^{(i)}, 0). \quad (3.7)$$

図 3 は、モデルのパラメータの推定期間とシミュレーションの期間を図示したものである。本研究ではモンテカルロ・シミュレーションの回数を $n = 10,000$ とした。また、計算される C_T, P_T の分散を小さくするために、代表的な分散減少法 (variance reduction technique) である制御変量法と負相関法を併せて用いている (詳細は, Satoyoshi and Mitsui (2011) を参照のこと)。

ところで、手順 [4] では一様乱数と推移確率を用いてマルコフ過程に従う状態変数を求めていくのだが、出発点である $T + 1$ 時点の状態変数 $\Delta_{T+1}, \Gamma_{T+1}$ については、この方法を適用することができない。なぜならば、手順 [1] においてパラメータの最尤推定を行なってもオプションの評価時点である T 時点の状態変数 Δ_T, Γ_T の値は未知であり、既知でなければ一様乱数と推移確率

図3. モデルの推定とシミュレーションの期間



出所) 筆者作成

から状態変数 Δ_{T+1} , Γ_{T+1} を求めることはできないからである。したがって、 Δ_{T+1} についてはハミルトン・フィルタで得られた T 時点の確率 $\Pr[\Delta_T = i | I_T]$ と推移確率 $\Pr[\Delta_{T+1} = j | \Delta_T = i]$ を使って、

$$\begin{aligned} \Pr[\Delta_{T+1} = j | I_T] \\ = \sum_{i=1}^2 \Pr[\Delta_{T+1} = j | \Delta_T = i] \Pr[\Delta_T = i | I_T] \end{aligned}$$

を計算し、この確率からサンプリングを行なうことにする⁸⁾。 Γ_{T+1} も同様にサンプリングを行なう。

4. 実証結果

4.1 データ

本研究の実証分析に用いたオプションは、2007年6月限月から2010年1月限月までの日経225コール・オプション、ならびにプット・オプションである(32限月)。これらのオプションの満期から営業日ベースで20日前($\tau = 20$)の終値と30日前($\tau = 30$)の終値を分析対象とした⁹⁾。 $\tau = 20$ のとき、コールとプットの標本数はそれぞれ524, 584、 $\tau = 30$ のときは495, 539となった。また、基本的な仮定として、取引費用、税金、配当は存在せず、オプションの証拠金は不要とした。BSモデルの計算に必要な無リスク資産の利率のデータには、無担保コール翌日物を用いた。

MSEG-nモデルなどのボラティリティ変動モデルのパラメータの推定には、満期の20日前、も

しくは30日前から更に3,500日前までの日経225株価指数の終値を使用した¹⁰⁾。例えば、満期から20日前のケースで最初の限月である2007年6月限月の場合、オプションの評価日は満期から20日前の2007年5月11日、その3,500日前は1993年2月24日になる。(2.8)式から日次収益率を計算することにより、標本期間は1993年2月25日から2007年5月11日までとなり(標本の大きさは $T = 3,500$)、この期間の日次収益率を用いてモデルのパラメータの推定を行ない、その推定されたパラメータを所与として、モンテカルロ・シミュレーションによってオプション価格を求める。次の限月以降も同様に計算を行なう。満期から30日前のケースでは、最初の限月(2007年6月限月)の評価日から3,500日前は1993年2月9日であり、その翌日の2月10日の日次収益率からのデータを用いることになる。

表1には、MSEG-tモデルの推定結果を示した。日次収益率の標本期間は、1993年2月10日から最後の限月(2010年1月限)の満期日である2010年1月8日までである。期待収益率 μ_1 , μ_2 の推定値は-0.052, 0.115であり、マイナスとプラスの値に分かれた。このことから、状態変数 Δ_t が $\Delta_t = 1$ のとき日経平均はベア、 $\Delta_t = 2$ のときはブルであるということが出来る。 Δ_t の推移確率 p_{11} , p_{22} の推定値はそれぞれ0.996, 0.992であり、どちらも1に非常に近い。したがって、一度ブルまたはベアにスイッチングを起こすと、その状態が長く続くことが分かる。このような推移確率の高さは、期待収益率がスイッチングする他のモデル、MSEG-nモデル、MSG-nモデル、MSG-t

表 1. MSEG-t モデルの推定結果

	p_{11}	p_{22}	q_{11}	q_{22}	μ_1	μ_2
推定値	0.996	0.992	0.989	0.923	-0.052	0.115
標準誤差	0.002	0.005	0.004	0.027	0.021	0.030
	ω_1	ω_2	β	θ	γ	ν
推定値	0.001	0.038	0.986	-0.104	0.068	19.248
標準誤差	0.003	0.009	0.003	0.012	0.016	7.276

出所) 筆者作成

モデルでは観察されなかった。一方、2つ目の状態変数 Γ_t の推移確率 q_{11} 、 q_{22} の推定値はそれぞれ0.989、0.923となっている。このパラメータはボラティリティの持続性のうち、スイッチングで説明される部分の持続性を示している。 $q_{11} > q_{22}$ であることから、一度ロー・ボラティリティ($\Gamma_t = 1$)にスイッチングするとその状態が長く続くが、ハイ・ボラティリティ($\Gamma_t = 2$)の状態はあまり長く続かないと考えられる。このモデルのEGARCH部分で表されるボラティリティの持続性パラメータは β であり、その推定値は0.986となっている。また、非対称性を表すパラメータ θ の推定値は-0.104で有意であり、これらの結果

は通常のEGARCHモデルと同じである。

図4にはブル($\Delta_t = 2$)になる確率を示した。この確率は全てのデータが与えられたもとで計算されている。どの期間をブルとするか、またはベアとするかはそもそも定義が曖昧であり難しい問題ではあるが、グラフを見る限り、このモデルを使うと概ねブル・ベアを捉える事ができていると考えられる。因みに、期待収益率がスイッチングする他のモデル(MSEG-n, MSG-n, MSG-t)では、このようにブル・ベアを示すようなグラフにはならなかった。図5はハイ・ボラティリティ($\Gamma_t = 2$)になる確率であり、ハイ・ボラティリティの状態は長く続かないことが分かる。また、図4の

表 2. 対数尤度, AIC, SBIC

	対数尤度	AIC	SBIC
MSEG-n	-7105.10	14232.19	14301.87
MSEG-t	-7103.13	14230.26	14306.26
MSEG-c-n	-7111.28	14238.57	14289.24
MSEG-c-t	-7107.62	14233.24	14290.24
MSG-n	-7156.12	14332.24	14395.58
MSG-t	-7148.63	14319.25	14388.92
MSG-c-n	-7159.27	14332.54	14376.87
MSG-c-t	-7149.79	14315.58	14366.25
GARCH-n	-7213.83	14435.65	14460.99
GARCH-t	-7154.48	14318.97	14350.64
EGARCH-n	-7163.89	14337.79	14369.46
EGARCH-t	-7115.94	14243.89	14281.89

出所) 筆者作成

図4. ブルになる確率

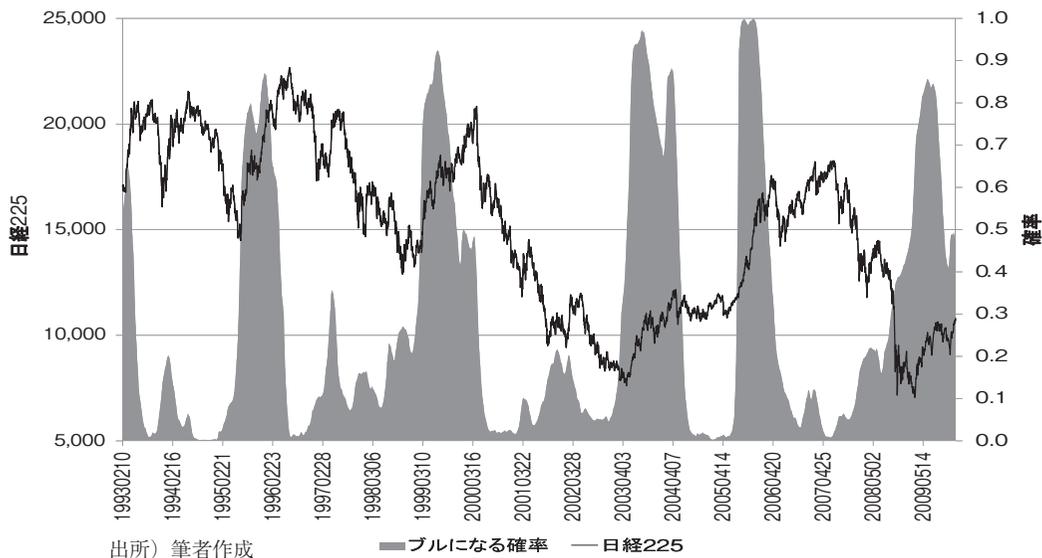


図5. ハイ・ボラティリティになる確率



ブル・ベアとは明らかにスイッチングの時期が異なっており、ブル・ベアとハイ・ボラティリティ、ロー・ボラティリティの両方を捉えるには、マルコフ連鎖に従う状態変数は1つではなく2つ必要であると考えられる。

表2には、本研究で採用したすべてのモデルの対数尤度、AIC、SBICを示してある。対数尤度

は誤差項に t 分布を仮定した MSEG- t モデルが最も高く、次に高いのが誤差項に正規分布を仮定した MSEG- n モデルとなっている。AIC の値が最小となったのは MSEG- t モデル、SBIC についてはボラティリティだけをスイッチングさせた EGARCH- t モデルが最小となった。これらの結果から、日経平均の時系列的変動を捉えるモデルと

表3. マネネスによるオプションの分類

マネネス	コール	プット
$S/K < 0.91$	deep-out-of-the-money (DOTM)	DITM
$0.91 \leq S/K < 0.97$	out-of-the-money (OTM)	ITM
$0.97 \leq S/K \leq 1.03$	at-the-money (ATM)	ATM
$1.03 < S/K \leq 1.09$	in-the-money (ITM)	OTM
$1.09 < S/K$	deep-in-the-money (DITM)	DOTM

出所) 筆者作成

しては、EGARCH モデルとマルコフ・スイッチング・モデルを組み合わせたモデルが極めて優れていると考えられる。MSEG モデルや MSEG-c モデルが従来の EGARCH モデルより現実のデータの変動を捉えているかどうかを厳密に判断するには、スイッチングが起きているか否かを調べる検定を行なう必要がある。しかしながら、一般的に知られているように、マルコフ・スイッチングが無いという帰無仮説のもとではモデルのいくつかのパラメータは識別することができず、検定統計量は通常の漸近分布に従わないため、尤度比検定は困難になる。この問題点を考慮した検定手法としては Hansen (1992,1996), Garcia (1998) があるが、本研究の目的はオプション価格の評価であるので、このような検定は行なわないことにした。

4.2 オプション価格の推定値の比較

4.2.1 比較の基準

2.3 節で示した 12 種類のボラティリティ変動モデルと BS モデルによるオプション価格の推定値と実際の市場価格を用いて、以下のように平均誤差率 (mean error rate; MER) と平均 2 乗誤差率 (root mean squared error rate; RMSER) を計算し、

$$MER = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}}{X_i^{\text{市場価格}}} \right), \quad (4.1)$$

$$RMSER = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}}{X_i^{\text{市場価格}}} \right)^2}, \quad (4.2)$$

$X = C, P.$

各モデルの比較を行なう。

ここで、 $X_i^{\text{推定値}}$ はモンテカルロ・シミュレーションによるオプションの推定値、或は、BS モデルの理論価格を表し、 $X_i^{\text{市場価格}}$ はオプションの市場価格、 C はコール・オプションの価格、 P はプット・オプションの価格を表す。 m は標本数である。MER の値を計算することにより、モデルの推定値が市場価格と比べてどの程度バイアスを持っているかが明らかになる。もう 1 つの RMSER は、推定値と市場価格の乖離度を示す基準である。

また、マネネス (moneyness) は Bakshi, Cao and Chen (1997) を参考にし、次のように 5 種類のカテゴリーに分類した (表 3 を参照)。(1) $S/K < 0.91$ ならばコール・オプションは deep-out-of-the-money (DOTM)¹¹⁾、プット・オプションは deep-in-the-money (DITM)¹²⁾ のオプション、(2) $0.91 \leq S/K < 0.97$ ならばコール・オプションは out-of-the-money (OTM)、プット・オプションは in-the-money (ITM) のオプション、(3) $0.97 \leq S/K \leq 1.03$ ならばコール/プット・オプションは at-the-money (ATM) のオプション¹³⁾、(4) $1.03 < S/K \leq 1.09$ ならばコール・オプションは ITM、プット・オプションは OTM のオプション、(5) $S/K > 1.09$ ならばコール・オプションは DITM、プット・オプションは DOTM のオプションである。

4.2.2 コール・オプションの実証結果

満期から 20 日前のコール・オプションの MER, RMSER の計算結果は、表 4 にまとめた。

表4. コール・オプションの推定値の比較 (満期20日前)

MER

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
DOTM	-0.098	-0.233	-0.316	-0.292	1.335	2.015	241
OTM	-0.146	-0.041	-0.188	-0.194	0.319	0.342	74
ATM	-0.115	-0.076	-0.132	-0.123	0.027	0.023	64
ITM	-0.074	-0.040	-0.079	-0.072	-0.001	-0.008	48
DITM	-0.032	-0.008	-0.030	-0.026	0.012	0.002	97
Total	-0.092	-0.127	-0.201	-0.188	0.665	0.978	524

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	1.361	1.522	3.079	3.209	-0.538	-0.457	2.378	241
OTM	0.402	0.383	0.408	0.386	-0.167	-0.165	0.111	74
ATM	0.045	0.043	0.069	0.053	-0.118	-0.116	-0.067	64
ITM	0.006	0.007	0.015	0.012	-0.079	-0.070	-0.055	48
DITM	0.009	0.010	0.016	0.015	-0.032	-0.026	-0.016	97
Total	0.690	0.762	1.487	1.541	-0.299	-0.259	1.093	524

RMSER

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
DOTM	1.021	0.804	0.797	0.906	2.544	3.985	241
OTM	0.304	0.351	0.309	0.318	0.709	0.724	74
ATM	0.164	0.241	0.172	0.169	0.155	0.148	64
ITM	0.105	0.145	0.108	0.104	0.090	0.089	48
DITM	0.060	0.095	0.060	0.058	0.055	0.053	97
Total	0.705	0.570	0.558	0.630	1.747	2.717	524

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	2.541	2.988	8.255	7.495	0.758	0.776	7.164	241
OTM	0.812	0.759	0.741	0.743	0.303	0.300	0.655	74
ATM	0.165	0.155	0.184	0.164	0.169	0.165	0.250	64
ITM	0.091	0.090	0.095	0.092	0.114	0.107	0.119	48
DITM	0.054	0.054	0.057	0.056	0.064	0.060	0.059	97
Total	1.751	2.047	5.606	5.091	0.532	0.543	4.866	524

出所) 筆者作成

表 5. コール・オプションの推定値の比較 (満期 30 日前)

MER

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
DOTM	-0.257	-0.289	-0.463	-0.338	1.524	2.193	260
OTM	-0.110	-0.022	-0.167	-0.158	0.230	0.289	77
ATM	-0.092	-0.073	-0.125	-0.117	0.018	0.047	66
ITM	-0.039	-0.025	-0.063	-0.054	0.008	0.023	42
DITM	-0.011	0.013	-0.027	-0.021	0.023	0.031	50
Total	-0.169	-0.166	-0.294	-0.224	0.841	1.208	495

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	1.544	1.916	3.021	4.143	-0.489	-0.434	3.358	260
OTM	0.370	0.359	0.405	0.409	-0.114	-0.123	0.066	77
ATM	0.078	0.078	0.095	0.097	-0.111	-0.103	-0.033	66
ITM	0.045	0.047	0.059	0.061	-0.063	-0.049	-0.026	42
DITM	0.040	0.042	0.046	0.050	-0.030	-0.019	0.006	50
Total	0.887	1.081	1.672	2.263	-0.298	-0.267	1.768	495

RMSER

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
DOTM	0.926	0.714	0.762	0.833	3.551	4.209	260
OTM	0.350	0.373	0.336	0.333	0.522	0.568	77
ATM	0.168	0.215	0.178	0.174	0.148	0.156	66
ITM	0.092	0.148	0.099	0.096	0.090	0.098	42
DITM	0.061	0.098	0.064	0.062	0.063	0.067	50
Total	0.689	0.546	0.573	0.622	2.583	3.060	495

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	2.658	3.187	6.620	8.714	0.814	0.819	9.471	260
OTM	0.655	0.624	0.714	0.685	0.366	0.331	0.552	77
ATM	0.171	0.167	0.206	0.189	0.183	0.165	0.224	66
ITM	0.097	0.099	0.113	0.116	0.101	0.091	0.143	42
DITM	0.065	0.068	0.077	0.082	0.068	0.061	0.099	50
Total	1.945	2.324	4.807	6.322	0.612	0.612	6.868	495

出所) 筆者作成

まず、MERの結果を見てみると、TotalではMSEG-nモデルの値が -0.092 であり、全てのモデルの中でオプション価格の推定値の上方または下方バイアスが最も小さい。その次がMSEG-tモデルであり、これらのMSEGモデルは、他のモデルよりもMERの基準で優れていることが分かる。また、MSGモデル、MSG-cモデル、GARCHモデル、BSモデルの値は非常に悪く、EGARCHモデルの値は比較的良い。RMSERの基準では、EGARCH-nモデルを用いたとき推定値と市場価格の乖離率が最も小さく(0.532)、その次はEGARCH-tモデルとなっている。MSEGモデル、MSEG-cモデルの値も比較的良いが、従来のEGARCHモデルには僅かに及ばない。また、この基準でもMSGモデル、MSG-cモデル、GARCHモデル、BSモデルの値は非常に大きい。以上のMER、RMSERの結果から、満期20日前のコール・オプションの評価においては、スイッチングを考える以前に、少なくともボラティリティの変動を表す式にはEGARCHモデルを含める必要があることが分かる。

表5は満期から30日前の結果である。MERのTotalではMSEG-tモデルの値が -0.166 であり、全てのモデルの中でオプション価格の推定値のバイアスが最も小さい。その次がMSEG-nモデルであり、MSEGモデルは他のモデルよりもMERの基準で優れている。マネネス別では、MSEGモデルのDOTMとOTMの値が小さくなっており、その影響でTotalの値が小さくなったと考えられる。また、20日前と同様にMSGモデル、MSG-cモデル、GARCHモデル、BSモデルの値は非常に悪い結果となっている。次にRMSERであるが、ここでもMSEG-tモデルの結果が0.546と最も良くなっている。MERとRMSERのどちらの基準でもMSEG-tモデルの優位性が示されたことになり、満期20日前とは異なる結果となった。4.1節で見たようにMSEG-tモデルはブル・ベアを捉えることができる唯一のモデルである。満期からの期間が20日から30日に長くなったために、ブ

ル・ベアの予測の効果が出た可能性がある。

以上の結果から、満期までの期間が長いコール・オプションでは、ブル・ベアを捉えることができるモデルで評価を行ったほうが良いと考えられる。

4.2.3 プット・オプションの実証結果

満期から20日前のプット・オプションの計算結果は表6に示した。コールのケースと異なり、全体的にほぼ同じ値になっているが、Totalの値を比べてみると、MSEG-c-nモデルはMERが -0.384 、RMSERが0.528であり、両方の基準において最も小さい値となっている。表7の満期から30日前では、MERが最も小さいのはMSEG-tモデルとMSEG-c-tモデル、RMSERが最も小さいのはMSEG-c-tモデルとなった。ここでも20日前と同様に各モデルの値は大きく異なっていない。

コールの30日前ではブル・ベアを含めたMSEGモデルのパフォーマンスが最も良かった。しかしながらプットでは、満期までの長さにかかわらず、全体的に見てボラティリティのみがスイッチングを起こすMSEG-cモデルのほうが若干良い値になっている。したがって、プット・オプションの評価では原資産価格のブル・ベアは考慮する必要がないと考えられる。

4.2.4 期間別の実証結果

表8から表11には、MERとRMSERの結果を一年間ごとに分けてまとめた。コール・オプションの2008年の結果を見てみると、満期20日前と30日前のどちらにおいても、MSGモデル、MSG-cモデル、GARCHモデル、BSモデルのオプション評価はかなりのoverpricingになっている。一方、MSEGモデル、MSEG-cモデル、EGARCHモデルの2008年は他の年と同じような値である。

図6には、2007年以降のEGARCH-tモデルとGARCH-tモデルのボラティリティの推移を示し

表 6. プット・オプションの推定値の比較 (満期 20 日前)

MER

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
DOTM	-0.712	-0.690	-0.672	-0.709	-0.858	-0.833	291
OTM	-0.348	-0.308	-0.314	-0.333	-0.448	-0.435	54
ATM	-0.162	-0.132	-0.138	-0.149	-0.204	-0.198	64
ITM	-0.061	-0.054	-0.041	-0.047	-0.074	-0.076	67
DITM	-0.013	0.005	0.002	-0.001	-0.006	-0.016	108
Total	-0.414	-0.392	-0.384	-0.406	-0.501	-0.489	584

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	-0.864	-0.872	-0.864	-0.842	-0.773	-0.755	-0.850	291
OTM	-0.483	-0.490	-0.494	-0.477	-0.330	-0.354	-0.410	54
ATM	-0.243	-0.240	-0.237	-0.224	-0.142	-0.164	-0.127	64
ITM	-0.108	-0.105	-0.105	-0.091	-0.050	-0.059	-0.010	67
DITM	-0.032	-0.030	-0.028	-0.020	-0.005	-0.007	0.014	108
Total	-0.520	-0.524	-0.519	-0.503	-0.438	-0.435	-0.474	584

RMSER

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
DOTM	0.757	0.747	0.725	0.756	0.876	0.857	291
OTM	0.393	0.377	0.363	0.382	0.485	0.478	54
ATM	0.203	0.218	0.186	0.194	0.252	0.251	64
ITM	0.090	0.139	0.081	0.083	0.102	0.106	67
DITM	0.040	0.056	0.038	0.038	0.042	0.049	108
Total	0.553	0.547	0.528	0.551	0.642	0.629	584

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	0.880	0.890	0.885	0.868	0.812	0.793	0.898	291
OTM	0.514	0.524	0.533	0.523	0.378	0.395	0.545	54
ATM	0.283	0.282	0.276	0.272	0.193	0.205	0.261	64
ITM	0.129	0.126	0.125	0.118	0.090	0.092	0.105	67
DITM	0.053	0.053	0.055	0.051	0.041	0.040	0.054	108
Total	0.649	0.656	0.654	0.641	0.589	0.577	0.662	584

出所) 筆者作成

表7. プット・オプションの推定値の比較 (満期30日前)

MER

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
DOTM	-0.691	-0.650	-0.660	-0.643	-0.836	-0.832	307
OTM	-0.282	-0.242	-0.253	-0.272	-0.388	-0.428	51
ATM	-0.147	-0.116	-0.124	-0.140	-0.179	-0.212	65
ITM	-0.059	-0.057	-0.047	-0.056	-0.078	-0.098	56
DITM	-0.014	-0.030	-0.011	-0.014	-0.026	-0.035	60
Total	-0.446	-0.416	-0.421	-0.416	-0.545	-0.554	539

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	-0.858	-0.849	-0.845	-0.793	-0.714	-0.698	-0.810	307
OTM	-0.477	-0.475	-0.474	-0.436	-0.264	-0.289	-0.352	51
ATM	-0.259	-0.258	-0.266	-0.232	-0.131	-0.151	-0.106	65
ITM	-0.141	-0.137	-0.142	-0.117	-0.056	-0.067	-0.003	56
DITM	-0.064	-0.061	-0.062	-0.048	-0.017	-0.022	0.017	60
Total	-0.587	-0.580	-0.580	-0.538	-0.455	-0.453	-0.506	539

RMSER

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
DOTM	0.728	0.701	0.704	0.687	0.859	0.855	307
OTM	0.317	0.309	0.293	0.306	0.421	0.454	51
ATM	0.198	0.226	0.185	0.193	0.227	0.248	65
ITM	0.106	0.151	0.100	0.104	0.118	0.130	56
DITM	0.056	0.087	0.054	0.055	0.066	0.073	60
Total	0.563	0.546	0.544	0.533	0.667	0.668	539

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
DOTM	0.874	0.866	0.865	0.821	0.752	0.732	0.868	307
OTM	0.496	0.498	0.502	0.475	0.308	0.321	0.470	51
ATM	0.287	0.288	0.301	0.278	0.200	0.203	0.242	65
ITM	0.162	0.161	0.172	0.157	0.107	0.110	0.130	56
DITM	0.087	0.086	0.094	0.087	0.058	0.058	0.084	60
Total	0.687	0.681	0.682	0.646	0.581	0.567	0.678	539

出所) 筆者作成

表 8. コール・オプションの推定値の比較 (期間別, 満期 20 日前)

MER

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
2007年	0.004	-0.259	-0.154	-0.219	0.552	0.491	101
2008年	0.116	-0.054	-0.059	0.018	1.185	1.974	203
2009年	-0.329	-0.135	-0.354	-0.364	0.236	0.282	220
全期間	-0.092	-0.127	-0.201	-0.188	0.665	0.978	524

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
2007年	0.607	0.440	0.655	0.526	-0.216	-0.232	-0.040	101
2008年	1.208	1.489	3.211	3.351	-0.237	-0.146	2.977	203
2009年	0.251	0.239	0.277	0.336	-0.394	-0.376	-0.125	220
全期間	0.690	0.762	1.487	1.541	-0.299	-0.259	1.093	524

RMSER

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
2007年	0.588	0.457	0.480	0.485	1.459	1.264	101
2008年	0.939	0.677	0.654	0.795	2.427	4.134	203
2009年	0.461	0.506	0.491	0.504	0.926	1.037	220
全期間	0.705	0.570	0.558	0.630	1.747	2.717	524

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
2007年	1.594	1.235	1.531	1.272	0.502	0.499	1.081	101
2008年	2.417	3.043	8.893	8.075	0.530	0.573	7.761	203
2009年	0.864	0.861	0.896	0.904	0.547	0.534	0.519	220
全期間	1.751	2.047	5.606	5.091	0.532	0.543	4.866	524

出所) 筆者作成

た。2008年9月のリーマン・ショックでボラティリティは急激に上昇しているが、GARCH-tモデルの値がEGARCH-tモデルを大きく上回っていることが分かる。このことが、オプション評価の差につながったと考えられる。

つまり、GARCH-tモデルのボラティリティが高すぎるために、MSGモデル、MSG-cモデル、GARCHモデルではコール・オプションの過大評

価になったと推測される。それに対してプット・オプションでは、リーマン・ショックでのボラティリティの差の影響は見られなかった。

5. 結論と今後の課題

本論文では、原資産価格変動のブル・ベアに焦点を当て、MSEGARCHモデルを利用して日経225オプション価格の評価を行ない、日経225オ

表9. コール・オプションの推定値の比較 (期間別, 満期30日前)

MER

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
2007年	0.069	-0.133	-0.114	-0.044	0.930	1.332	101
2008年	-0.059	-0.241	-0.243	-0.132	1.568	2.035	206
2009年	-0.417	-0.102	-0.447	-0.422	-0.002	0.237	188
全期間	-0.169	-0.166	-0.294	-0.224	0.841	1.208	495

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
2007年	1.410	1.468	1.838	1.812	0.005	-0.046	0.408	101
2008年	1.266	1.615	2.849	4.082	-0.325	-0.235	4.162	206
2009年	0.190	0.287	0.294	0.512	-0.431	-0.421	-0.124	188
全期間	0.887	1.081	1.672	2.263	-0.298	-0.267	1.768	495

RMSER

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
2007年	0.678	0.539	0.514	0.563	1.935	2.435	101
2008年	0.801	0.552	0.599	0.704	3.751	4.373	206
2009年	0.548	0.543	0.574	0.553	0.370	0.712	188
全期間	0.689	0.546	0.573	0.622	2.583	3.060	495

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
2007年	2.398	2.521	3.401	3.556	0.645	0.613	2.725	101
2008年	2.452	3.069	7.023	9.412	0.634	0.656	10.460	206
2009年	0.537	0.694	0.761	1.161	0.569	0.559	0.581	188
全期間	1.945	2.324	4.807	6.322	0.612	0.612	6.868	495

出所) 筆者作成

プション市場でのMSEGARCHモデルの有効性の実証的な検証を行なった。本研究で得られた主な結果をまとめると次のようになる。

- [1] 原資産価格のブル・ベアは、MSEG-tモデルによってのみ捉えることができる。
- [2] 満期から20日前のコール・オプションでは、MERの基準でMSEG-nモデル、RMSERの基準でEGARCH-nモデルが選択される

が、満期までの期間を30日にすると、どちらの基準においてもMSEG-tモデルのパフォーマンスが最も優れている。したがって、満期までの期間が長いコール・オプションでは、ブル・ベアを捉えることができるモデルで評価を行ったほうが良いと考えられる。

- [3] 一方、プット・オプションでは、満期まで

表 10. プット・オプションの推定値の比較 (期間別, 満期 20 日前)

MER

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
2007年	-0.438	-0.352	-0.368	-0.430	-0.520	-0.532	113
2008年	-0.287	-0.240	-0.267	-0.280	-0.394	-0.379	216
2009年	-0.511	-0.538	-0.490	-0.502	-0.583	-0.562	255
全期間	-0.414	-0.392	-0.384	-0.406	-0.501	-0.489	584

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
2007年	-0.538	-0.559	-0.565	-0.566	-0.429	-0.439	-0.555	113
2008年	-0.412	-0.409	-0.390	-0.357	-0.333	-0.321	-0.304	216
2009年	-0.603	-0.606	-0.609	-0.597	-0.531	-0.530	-0.582	255
全期間	-0.520	-0.524	-0.519	-0.503	-0.438	-0.435	-0.474	584

RMSE

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
2007年	0.566	0.523	0.506	0.568	0.651	0.654	113
2008年	0.430	0.421	0.421	0.432	0.556	0.537	216
2009年	0.633	0.644	0.613	0.627	0.703	0.687	255
全期間	0.553	0.547	0.528	0.551	0.642	0.629	584

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
2007年	0.655	0.678	0.687	0.688	0.579	0.580	0.706	113
2008年	0.561	0.563	0.546	0.519	0.495	0.469	0.548	216
2009年	0.713	0.717	0.719	0.709	0.663	0.654	0.727	255
全期間	0.649	0.656	0.654	0.641	0.589	0.577	0.662	584

出所) 筆者作成

の長さにかかわらずボラティリティのみがスイッチングを起こす MSEG-c モデルのパフォーマンスが若干良いという結果になり、原資産価格のブル・ベアを考慮する必要はない。

- [4] リーマン・ショック直後のボラティリティの上昇局面において、コール・オプションでは MSG モデル, MSG-c モデル, GARCH

モデル, BS モデルのオプション評価はかなりの overpricing になるが, MSEG モデル, MSEG-c モデル, EGARCH モデルのパフォーマンスは極めて優れている。

- [5] 原資産価格収益率とボラティリティとの非対称性を踏まえた定式化や誤差項の分布, 期待収益率とボラティリティがマルコフ・スイッチング過程に従うという仮定は, オ

表 11. プット・オプションの推定値の比較 (期間別, 満期 30 日前)

MER

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
2007年	-0.369	-0.241	-0.300	-0.298	-0.521	-0.585	110
2008年	-0.380	-0.349	-0.371	-0.356	-0.465	-0.467	195
2009年	-0.536	-0.555	-0.519	-0.522	-0.623	-0.612	234
全期間	-0.446	-0.416	-0.421	-0.416	-0.545	-0.554	539

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
2007年	-0.590	-0.601	-0.595	-0.571	-0.322	-0.337	-0.619	110
2008年	-0.513	-0.494	-0.491	-0.420	-0.433	-0.416	-0.337	195
2009年	-0.647	-0.643	-0.647	-0.621	-0.536	-0.537	-0.594	234
全期間	-0.587	-0.580	-0.580	-0.538	-0.455	-0.453	-0.506	539

RMSER

	MSEG		MSEG-c		MSG		標本数
	n	t	n	t	n	t	
2007年	0.477	0.413	0.425	0.398	0.642	0.677	110
2008年	0.494	0.466	0.485	0.466	0.604	0.602	195
2009年	0.648	0.652	0.633	0.631	0.726	0.713	234
全期間	0.563	0.546	0.544	0.533	0.667	0.668	539

	MSG-c		GARCH		EGARCH		BS	標本数
	n	t	n	t	n	t		
2007年	0.675	0.686	0.686	0.663	0.460	0.446	0.749	110
2008年	0.630	0.613	0.613	0.552	0.548	0.526	0.574	195
2009年	0.736	0.732	0.734	0.708	0.655	0.645	0.722	234
全期間	0.687	0.681	0.682	0.646	0.581	0.567	0.678	539

出所) 筆者作成

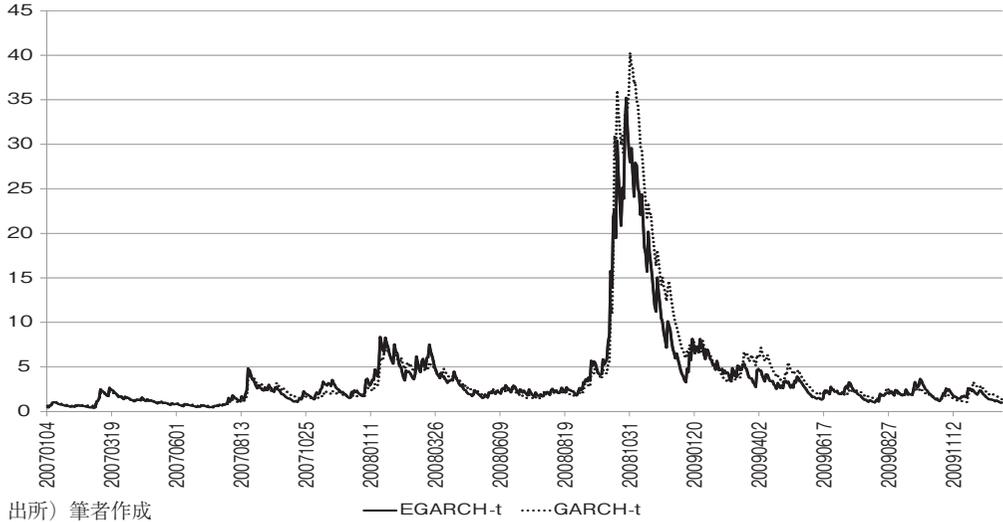
プション価格の評価において非常に重要である。

今後の課題としては、次の3点が考えられる。

- [1] 原資産価格収益率とボラティリティとの非対称性をモデル化している Glosten, Jagannathan and Runkle (1993) の GJR モデル¹⁴⁾ や、もう一つの代表的なボラティリティ変動モデルである確率的分散変動

- (stochastic volatility) モデルによるオプション価格とのパフォーマンスの比較を行なう。
- [2] 投資家のリスク中立性を仮定するのではなく、Duan (1995), Siu *et al.* (2004) のように原資産収益率の過程にリスク・プレミアムを考慮して定式化を行なう。
- [3] オプション価格の分析に関して、インプライド・ボラティリティ (implied volatility),

図 6. ボラティリティ



ボラティリティ・スマイル (volatility smile) などについても詳細に研究する。

6. 補論：MSEGARCH モデルの最尤推定

ここでは、MSEGARCH モデルの最尤推定法を説明する。尤度関数を L とする。

$$\begin{aligned} L &= f(R_1, R_2, \dots, R_T) = \prod_{t=1}^T f(R_t | I_{t-1}) \\ &= \prod_{t=1}^T \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 f(R_t, \Delta_t = j, \Gamma_t = l | I_{t-1}) \\ &= \prod_{t=1}^T \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 f(R_t | \Delta_t = j, \Gamma_t = l, I_{t-1}) \\ &\quad \Pr[\Delta_t = j, \Gamma_t = l | I_{t-1}]. \end{aligned}$$

対数尤度関数は

$$\begin{aligned} \ln L &= \sum_{t=1}^T \ln \left\{ \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 f(R_t | \Delta_t = j, \Gamma_t = l, I_{t-1}) \right. \\ &\quad \left. \Pr[\Delta_t = j, \Gamma_t = l | I_{t-1}] \right\} \\ &= \sum_{t=1}^T \ln \left\{ i' \left(\eta_t \odot \hat{\xi}_{t|t-1} \right) \right\} \quad (6.1) \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_t = \begin{pmatrix} f(R_t | \Delta_t = 1, \Gamma_t = 1, I_{t-1}) \\ f(R_t | \Delta_t = 1, \Gamma_t = 2, I_{t-1}) \\ f(R_t | \Delta_t = 2, \Gamma_t = 1, I_{t-1}) \\ f(R_t | \Delta_t = 2, \Gamma_t = 2, I_{t-1}) \end{pmatrix},$$

$$\hat{\xi}_{t|t-1} = \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_t = 1, \Gamma_t = 1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_t = 1, \Gamma_t = 2 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_t = 2, \Gamma_t = 1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_t = 2, \Gamma_t = 2 | I_{t-1}] \end{pmatrix}$$

であり、 \odot はベクトルの要素ごとを掛け合わせることを示す。

(6.1) 式の $\hat{\xi}_{t|t-1}$ は、Hamilton (1989) の提案したフィルタリング手法 (ハミルトン・フィルタ) によって求める¹⁵⁾。 $\hat{\xi}_{t|t-1}$ を書き換えると

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{t|t-1} &= \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_t = 1, \Gamma_t = 1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_t = 1, \Gamma_t = 2 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_t = 2, \Gamma_t = 1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_t = 2, \Gamma_t = 2 | I_{t-1}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_t = 1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_t = 2 | I_{t-1}] \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \Pr[\Gamma_t = 1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Gamma_t = 2 | I_{t-1}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^2 \Pr[\Delta_t = 1, \Delta_{t-1} = i | I_{t-1}] \\ \sum_{i=1}^2 \Pr[\Delta_t = 2, \Delta_{t-1} = i | I_{t-1}] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \otimes \left(\frac{\sum_{k=1}^2 \Pr[\Gamma_t = 1, \Gamma_{t-1} = k | I_{t-1}]}{\sum_{k=1}^2 \Pr[\Gamma_t = 2, \Gamma_{t-1} = k | I_{t-1}]} \right) \\
 &= \left(\frac{\sum_{i=1}^2 \Pr[\Delta_t = 1 | \Delta_{t-1} = i]}{\sum_{i=1}^2 \Pr[\Delta_t = 2 | \Delta_{t-1} = i]} \Pr[\Delta_{t-1} = i | I_{t-1}] \right) \\
 & \otimes \left(\frac{\sum_{k=1}^2 \Pr[\Gamma_t = 1 | \Gamma_{t-1} = k]}{\sum_{k=1}^2 \Pr[\Gamma_t = 2 | \Gamma_{t-1} = k]} \Pr[\Gamma_{t-1} = k | I_{t-1}] \right) \\
 &= \left[\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_{t-1} = 1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{t-1} = 2 | I_{t-1}] \end{pmatrix} \right] \\
 & \otimes \left[\begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pr[\Gamma_{t-1} = 1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Gamma_{t-1} = 2 | I_{t-1}] \end{pmatrix} \right] \\
 &= \left[\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \right] \\
 & \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_{t-1} = 1, \Gamma_{t-1} = 1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{t-1} = 1, \Gamma_{t-1} = 2 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{t-1} = 2, \Gamma_{t-1} = 1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{t-1} = 2, \Gamma_{t-1} = 2 | I_{t-1}] \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

つまり,

$$\hat{\xi}_{t|t-1} = (P \otimes Q) \hat{\xi}_{t-1|t-1} \tag{6.2}$$

となる。ただし,

$$\hat{\xi}_{t-1|t-1} = \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_{t-1} = 1, \Gamma_{t-1} = 1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{t-1} = 1, \Gamma_{t-1} = 2 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{t-1} = 2, \Gamma_{t-1} = 1 | I_{t-1}] \\ \Pr[\Delta_{t-1} = 2, \Gamma_{t-1} = 2 | I_{t-1}] \end{pmatrix}$$

である。

t 時点までの情報 I_t が与えられたもとで, $\Delta_t = j$ かつ $\Gamma_t = l$ ($j, l = 1, 2$) となる確率は,

$$\begin{aligned}
 & \Pr[\Delta_t = j, \Gamma_t = l | I_t] \\
 &= \Pr[\Delta_t = j, \Gamma_t = l | I_{t-1}, R_t] \\
 &= \frac{f(\Delta_t = j, \Gamma_t = l, R_t | I_{t-1})}{f(R_t | I_{t-1})} \\
 &= \frac{f(R_t | \Delta_t = j, \Gamma_t = l, I_{t-1}) \Pr[\Delta_t = j, \Gamma_t = l | I_{t-1}]}{\sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 f(R_t, \Delta_t = j, \Gamma_t = l | I_{t-1})} \\
 &= \left\{ f(R_t | \Delta_t = j, \Gamma_t = l, I_{t-1}) \Pr[\Delta_t = j, \Gamma_t = l | I_{t-1}] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\left/ \left\{ \frac{\sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 f(R_t | \Delta_t = j, \Gamma_t = l, I_{t-1})}{\Pr[\Delta_t = j, \Gamma_t = l | I_{t-1}]} \right\} \right.$$

ベクトルで表すと,

$$\hat{\xi}_{t|t} = \frac{(\eta_t \odot \hat{\xi}_{t|t-1})}{i'(\eta_t \odot \hat{\xi}_{t|t-1})} \tag{6.3}$$

となる。以上の (6.2) 式と (6.3) 式を交互に繰り返すことによって, $t = 1, 2, \dots, T$ について $\xi_{t|t-1}$ を計算し, (6.1) 式に代入する。 $t = 1$ 時点の $\Pr[\Delta_1, \Gamma_1 | I_0]$ の計算に必要な

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_0 = 1, \Gamma_0 = 1 | I_0] \\ \Pr[\Delta_0 = 1, \Gamma_0 = 2 | I_0] \\ \Pr[\Delta_0 = 2, \Gamma_0 = 1 | I_0] \\ \Pr[\Delta_0 = 2, \Gamma_0 = 2 | I_0] \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \Pr[\Delta_0 = 1 | I_0] \\ \Pr[\Delta_0 = 2 | I_0] \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \Pr[\Gamma_0 = 1 | I_0] \\ \Pr[\Gamma_0 = 2 | I_0] \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

には, 定常確率

$$\begin{aligned}
 \Pr[\Delta_0 = 1 | I_0] &= \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}}, \\
 \Pr[\Delta_0 = 2 | I_0] &= \frac{1 - p_{11}}{2 - p_{11} - p_{22}}, \\
 \Pr[\Gamma_0 = 1 | I_0] &= \frac{1 - q_{22}}{2 - q_{11} - q_{22}}, \\
 \Pr[\Gamma_0 = 2 | I_0] &= \frac{1 - q_{11}}{2 - q_{11} - q_{22}}
 \end{aligned}$$

を用いる。

里吉清隆 (東洋大学経営学部准教授)
三井秀俊 (日本大学経済学部准教授)

注

*本研究で使用した日経225 オプションのデータは大阪証券取引所から提供して頂いた。また, 本論文を作成するにあたり, 森保洋准教授 (長崎大学), 竹内明香助教 (早稲田大学) から多くの貴重なコ

メントを頂いた。ここに記して感謝の意を表したい。本研究は、証券経済学会第73回全国大会（2010年6月6日、明治大学）、日本金融学会2010年度秋季大会（2010年9月26日、神戸大学）で報告したものである。

〒112-8606 東京都文京区白山5-28-20. e-mail: satoyoshi@toyo.jp

〒101-8360 東京都千代田区三崎町1-3-2. e-mail: mitsui.hidetoshi@nihon-u.ac.jp

- 1) Gray (1996) はこのモデルを、レジーム・スイッチング GARCH (regime-switching GARCH) モデルと名付けた。しかし、レジーム・スイッチングはマルコフ連鎖によって引き起こされることから、本研究ではマルコフ・スイッチング GARCH モデルと呼ぶことにした。
- 2) 大鋸・大屋 (2009) は、Haas *et al.* (2004) の MSGARCH モデルをベイズ統計学に基づくマルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC 法) によって推定する手法を提案し、TOPIX の分析に有効であることを明らかにしている。
- 3) Henry (2009) は、Gray (1996) の MSGARCH モデルを拡張した MSEGARCH モデルを提案し、英国の証券市場のデータについて分析を行なっている。
- 4) 証明は、渡部 (2000) 1.4 節を参照のこと。
- 5) 詳しくは、里吉 (2004b) を参照のこと。
- 6) オプションを始めとした金融工学理論では、連続複利方式 (continuous compounding) により、 $R_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$ とすることが一般的である。しかしながら、本研究のモデルでは収益率をそのように定義すると、オプションの評価を行なうことができない。詳細は Satoyoshi and Mitsui (2011) を参照のこと。
- 7) 時点 T での権利行使価格 K 、残存期間 r^* のヨーロッパ・コール・オプション価格 C_T^{BS} とヨーロッパ・プット・オプション価格 P_T^{BS} は、以下の BS モデルで与えられる。

$$C_T^{BS} = S_T N(d_1) - Ke^{-r^* \tau} N(d_2),$$

$$P_T^{BS} = -S_T N(-d_1) + Ke^{-r^* \tau} N(-d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_T/K) + (r^* + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau},$$

$$N(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \quad i = 1, 2.$$

ここで、 $N(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数、 r^* は連続複利方式の無リスク資産利率を表す。

- 8) ハミルトン・フィルタについては Hamilton (1989)、Kim and Nelson (1999) を参照のこと。
- 9) 日経 225 オプション終値と日経 225 株価指数終値とが異時点で値付けされている可能性があるが、本研究では考慮しなかった。
- 10) 日経 225 株価指数 (日経平均) のデータは、日経 NEEDS-FinancialQUEST を利用した。また、パラメータの推定には、プログラミング言語である OxMetrics 5.00 (<http://www.oxmetrics.net/>) を利用した。
- 11) far-out-of-the-money と呼ぶこともある。
- 12) far-in-the-money と呼ぶこともある。
- 13) 実際には、厳密に ATM になる可能性は殆どないため、ATM 付近のオプションを near-the-money オプションと呼ぶこともある。
- 14) GJR モデルは、以下のように定式化される。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \left(\alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \gamma_i D_{t-i}^- \epsilon_{t-i}^2 \right),$$

$$D_{t-1}^- = \begin{cases} 1 & \epsilon_{t-1} < 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

D_{t-i}^- は、 ϵ_{t-i} が負のときには 1、それ以外のときには 0 であるダミー変数である。

- 15) 詳細は Kim and Nelson (1999) を参照のこと。

参考文献

- 大鋸崇、大屋幸輔 (2009) 「株式市場におけるブル相場、ベア相場の日次データを用いた分析・ベイジアンアプローチ」『ジャフィー・ジャーナル (金融工学と市場計量分析)』 pp.112-150.
- 里吉清隆 (2004a) 「マルコフ・スイッチング GARCH モデルによる日本の株式市場のボラティリティの

- 分析』『日本統計学会誌』第34巻, 第1号, pp.1-19.
- (2004b)「マルコフ・スイッチング GARCH モデルのバイズ推定法」『経営論集』62号, pp.123-136.
- 竹内(野木森)明香, 渡部敏明 (2008)「日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性とオプション価格」MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』No.24, pp.45-74.
- 三井秀俊 (2000)「日経 225 オプション価格の GARCH モデルによる分析」MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』No.7, pp.57-73.
- 三井秀俊, 渡部敏明 (2003)「バイズ推定法による GARCH オプション価格付けモデルの分析」日本統計学会『日本統計学会誌』第33巻, 第3号, pp.307-324.
- 森保洋 (1999)「ARCH モデルによる日経 225 オプション評価」『現代経済学研究』第7号, pp.143-159.
- 渡部敏明 (2000)『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.
- (2003)「日経 225 オプションデータを使った GARCH オプション価格付けモデルの検証」日本銀行金融研究所『金融研究』第22巻, 別冊第2号, pp.1-34.
- Bakshi, G., Cao, C. & Chen, Z. (1997) "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models," *Journal of Finance*, 52, pp.2003-2049.
- Bauwens, L. & Lubrano, M. (1998) "Bayesian Inference on GARCH Models Using the Gibbs Sampler," *Econometrics Journal*, 1, C23-C46.
- (2002) "Bayesian Option Pricing Using Asymmetric GARCH Models," *Journal of Empirical Finance*, 9, pp.321-342.
- Black, F. & Scholes, M. (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, pp.637-654.
- Bollerslev, T. (1986) "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, pp.307-327.
- Cai, J. (1994) "A Markov Model of Switching-Regime ARCH," *Journal of Business & Economic Statistics*, 12, pp.309-316.
- Diebold, F. X. (1986) "Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment." *Econometric Reviews*, 5, pp.51-56.
- Duan, J. -C. & Zhang, H. (2001) "Pricing Hang Seng Index Options around the Asian Financial Crisis - A GARCH Approach," *Journal of Banking & Finance*, 25, pp.1989-2014.
- Engle, R. F. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 50, pp.987-1007.
- Engle, R. F. & Mustafa, C. (1992) "Implied ARCH Models from Options Prices," *Journal of Econometrics*, 52, pp.289-311.
- Garcia, R. (1998) "Asymptotic Null Distribution of the Likelihood Ratio Test in Markov Switching Models," *International Economic Review*, 39, pp.763-788.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R. & Runkle, D. (1993) "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks," *Journal of Finance*, 48, pp.1779-1801.
- Gray, S. F. (1996) "Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process," *Journal of Financial Economics*, 42, pp.27-62.
- Haas, M., Mittnik, S. & Paolella, M. S. (2004) "A New Approach to Markov-Switching GARCH Models," *Journal of Financial Econometrics*, 2, pp.493-530.
- Hamilton, J. D. (1989) "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle," *Econometrica*, 57, pp.357-384.
- Hamilton, J. D. & Susmel, R. (1994) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime," *Journal of Econometrics*, 64, pp.307-333.
- Hansen, B. E. (1992) "The Likelihood Ratio Test under Nonstandard Conditions: Testing the Markov Switching

- Model of GNP," *Journal of Applied Econometrics*, 7, S61-S82.
- (1996) "Erratum: The Likelihood Ratio Test under Nonstandard Conditions: Testing the Markov Switching Model of GNP," *Journal of Applied Econometrics*, 11, pp.195-198.
- Henry, O. T. (2009) "Regime Switching in the Relationship between Equity Returns and Short-Term Interest Rates in the UK," *The Journal of Banking & Finance*, 33, pp.405-414.
- Kim, C.-J. & Nelson, C. R. (1999) *State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs- Sampling Approaches with Applications*, Cambridge, MA: MIT Press.
- Klaassen, F. (2002) "Improving GARCH Volatility Forecasts with Regime-Switching GARCH," *Empirical Economics*, 27, pp.363-394.
- Lamoureux, C. G. & Lastrapes, W. D. (1990) "Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model," *Journal of Business & Economic Statistics*, 8, pp.225-234.
- Noh, J., Engle, R. F. & Kane, A. (1994) "Forecasting Volatility and Option Pricing of the S&P500 Index," *Journal of Derivatives*, pp.17-30.
- Sabbatini, M. & Linton, O. (1998) "A GARCH Model of the Implied Volatility of the Swiss Market Index from Option Prices," *International Journal of Forecasting*, 14, pp.199-213.
- Saez, M. (1997) "Option Pricing under Stochastic Volatility and Interest Rate in the Spanish Case," *Applied Financial Economics*, 7, pp.379-394.
- Satoyoshi, K. & Mitsui, H. (2011) "Empirical Study of Nikkei 225 Options with the Markov Switching GARCH Model," *Asia-Pacific Financial Markets*, 18, pp.55-68.
- Siu, T. K., Tong, H. & Yang, H. (2004) "On Pricing Derivatives under GARCH Models: A Dynamic Gerber-Shiu Approach," *North American Actuarial Journal*, 8 (3), pp.17-31.
- Watanabe, T. and Ubukata, M. (2009) *Option Pricing Using Realized Volatility and ARCH Type Models. Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series 066*, Hitotsubashi University.