

Fractionally Integrated ARCH 型モデルによる

日経 225 先物価格の分析

三井 秀俊

1. はじめに

日経 225 先物は、大阪証券取引所の他、Chicago Mercantile Exchange (CME) や Singapore Exchange Derivatives Trading Limited (SGX-DT) にも上場されている。そのため、日経 225 先物は非常に流動性が高く、最も活発に取引されている。本論文では、日経 225 先物のボラティリティの長期記憶 (long memory) 性に焦点を当て実証分析を行なう。ボラティリティの長期記憶性が存在するならば、長期の限月をもつ先物の価格付けがより正確に行なうことができるようになる。長期記憶性を捉えるため Baillie *et al.* (1996) の FIGARCH (Fractionally Integrated GARCH) モデルと Bollerslev and Mikkelsen (1996) の FIEGARCH (Fractionally Integrated Exponential GARCH) モデルを使用する。渡部・佐々木 (2005) では AR(1)-FIEGARCH モデルにより日経 225 先物の実証分析を行なっているが、誤差項には正規分布を仮定している。しかし、株価収益率の分布は、古くから正規分布よりも裾が厚い分布 (fat tail) であることが知られている。そのため ARCH 型モデルの誤差項には、正規分布以外の仮定をおく場合が多い。また、多くの先行研究では、誤差項の分布に正規分布よりも尖度の高い分布を用いた方が当てはまりが良いとの結果が得られている。したがって、本研究では、誤差項の分布として標準正規分布の他に、基準化された Student- t 分布 (standardized Student- t distribution)、一般化誤差分

布 (GED : Generalized Error Distribution)、基準化された skewed-Student t 分布 (standardized skewed-Student t distribution) を使用することにする。これらを仮定したモデルにより日経 225 先物価格のボラティリティの変動性に関して分析を行なう。

実証分析を進めるにあたっては、2000 年 1 月 4 日から 2012 年 10 月 31 日までの日経 225 先物価格の日次データを用いて実証的な検証を行なった。本研究の実証分析の結果として、主に以下の結果が得られた。(1) 日経 225 先物のボラティリティは、定常長期記憶過程か、あるいは、非定常長期記憶過程に従う。(2) 日経 225 先物価格の収益率とボラティリティとの間の非対称性が存在する。(3) 日経 225 先物における時系列分析に対して正規分布よりも裾の厚い分布を用いることは有効である。

本論文の以下の構成は次の通りである。第 2 節では、FIGARCH モデルに関して解説し、本論文で用いた誤差項の分布について説明する。第 3 節では、本論文で利用した日経 225 先物のデータと FIGARCH モデルによる実証結果に関して述べる。最後の第 4 節では、まとめと今後の課題について言及する。

2. 分析モデル

2.1 FIGARCH モデルと FIEGARCH モデル

t 時点の日経 225 先物の収益率を R_t とする。 P_t を t 時点の日経 225 先物価格の水準とすると、 t 時点の日経 225 先物の収益率 R_t は以下のように

定義される.

$$R_t = (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \times 100. \quad (2.1)$$

このとき、収益率 R_t の過程を以下のようにおく.

$$R_t = \mu + \epsilon_t, \quad (2.2)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad (2.3)$$

$$z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, Var[z_t] = 1. \quad (2.4)$$

ここで、(2.2) 式の定数項 μ は期待収益率、 ϵ_t は誤差項であり、収益率に自己相関は無いと仮定する. *i. i. d.* は、過去と独立で同一な分布 (independent and identically distributed) を表す. $E[\cdot]$ は期待値、 $Var[\cdot]$ は分散を表す. 本論文では、ボラティリティの変動の特性を捉えるために、Baillie et al. (1996) が提案した FIGARCH モデルと Bollerslev and Mikkelsen (1996) が提案した FIEGARCH モデルを用いる. FIGARCH(p, d, q) モデルは、ボラティリティ σ_t^2 が以下の過程で表される¹⁾.

$$\sigma_t^2 = \omega[1 - \beta(L)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta(L)]^{-1} \phi(L) (1-L)^d \right\} \epsilon_t^2. \quad (2.5)$$

ここで、 $\beta(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_p L^p$, $\phi(L) = [1 - a(L) - \beta(L)](1-L)^{-1}$, $a(L) = a_1 L + a_2 L^2 + \dots + a_q L^q$ を表す. また、 L はラグ・オペレータ (Lag operator) を表し、 $L^i y_t = y_{t-i}$, ($i=0, 1, \dots$) となる. $(1-L)^d$ は、以下のように表現される.

$$\begin{aligned} (1-L)^d &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)} L^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\dots(d-k+1)}{k!} (-L)^k. \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数 (gamma function)²⁾ である. $(1-L)^d$ における d が長期記憶性³⁾ を捉えるパラメータを示す. $0 < d < 1$ となるとき、ボラティリティ σ_t^2 は長期記憶過程に従っていることがわかる. また、 $0 < d < 0.5$ のとき定常長期記憶過程と呼び、 $0.5 \leq d < 1$ のとき非定常長期記憶過程と呼ぶ. $d=1$ のとき、ボラティリティ σ_t^2 は単位根を持ち非定常過程となる. $d=0$ のとき短期記憶過程となり、Bollerslev (1986) の GARCH(p ,

q) モデルとなる⁴⁾. ここで、FIGARCH($1, d, 1$) モデルは以下のように表される.

$$\sigma_t^2 = \omega[1 - \beta_1(L)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1} \phi_1(L) (1-L)^d \right\} \epsilon_t^2. \quad (2.7)$$

FIEGARCH(p, d, q) モデルは、ボラティリティ σ_t^2 が以下の過程で表される.

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \phi(L)^{-1} (1-L)^{-d} [1 + a(L)] g(z_{t-1}), \quad (2.8)$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|] \quad (2.9)$$

$$g(z_{t-1}) = \begin{cases} (\theta + \gamma)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|), & \text{if } z_{t-1} > 0, \\ (-\theta + \gamma)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|), & \text{if } z_{t-1} < 0. \end{cases}$$

ここでは、ボラティリティの対数値を被説明変数としてパラメータの非負制約を取り除き定式化されている. $\theta < 0$ ならば、資産価格が上昇した日の翌日よりも、資産価格が下落した日の翌日の方がボラティリティは上昇する. このモデルでは、ボラティリティの対数値を被説明変数としているため $\omega, \beta, a, \theta, \gamma$ に非負制約は必要としない. $d=0$ のとき、Nelson (1991) の EGARCH(p, q) モデルとなる⁵⁾.

次数 p, q の選択は、過去の実証研究において $p=1, q=0$ とする場合が多い⁶⁾ ので、本論文でも FIGARCH($1, d, 0$), FIEGARCH($1, d, 0$) を用いて分析を行なう. FIGARCH($1, d, 0$) は、以下のように表現される.

$$\sigma_t^2 = \omega[1 - \beta_1(L)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1-L)^d \right\} \epsilon_t^2. \quad (2.10)$$

また、FIEGARCH($1, d, 0$) は以下のように表現される.

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) &= \omega + [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1-L)^{-d} g(z_{t-1}), \\ g(z_{t-1}) &= \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

これらのモデルを用いて日経 225 先物のボラティリティの変動特性に関して実証分析を行なう.

2.2 誤差項の分布の仮定

資産収益率の分布は、正規分布よりも裾が厚い分布であることが知られている。また、多くの先行研究では、誤差項の分布に正規分布よりも尖度の高い分布を用いた方が当てはまりが良いとの結果が得られている。したがって、本論文では、 z_t の分布として、標準正規分布、基準化された Student- t 分布、一般化誤差分布、基準化された skewed-Student t 分布⁷⁾を使用することにする⁸⁾。

(i) Student- t 分布：

基準化された Student- t 分布の密度関数 $f_{(t)}(z_t; \nu)$ は以下のように与えられる。

$$f_{(t)}(z_t; \nu) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi(\nu-2)}} \times \left(1 + \frac{z_t^2}{\nu-2}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad \nu > 2. \quad (2.12)$$

ここで、 ν は自由度 (degree of freedom) を表す。Student- t 分布は 0 について左右対称となり、 $\nu > 4$ に対して尖度は 3 よりも大きくなる⁹⁾。また、 $\nu \rightarrow \infty$ のとき標準正規分布の密度関数に収束する。

(ii) GED：

GED の密度関数 $f_{(GED)}(z_t; \nu)$ は以下のように与えられる。

$$f_{(GED)}(z_t; \nu) = \frac{\nu \exp(-\frac{1}{2}|z_t/\lambda|^\nu)}{\lambda \nu 2^{(1+\frac{1}{\nu})} \Gamma(1/\nu)}, \quad \nu > 0, \quad (2.15)$$

$$\lambda_\nu = \sqrt{\frac{\Gamma(1/\nu) 2^{(-2/\nu)}}{\Gamma(3/\nu)}}$$

ここで、 ν は裾の厚さを示すパラメータである。 $\nu = 2$ のとき z_t は標準正規分布に従う。 $\nu < 2$ のとき正規分布より裾が厚い分布に従い¹⁰⁾、 $\nu > 2$ のとき正規分布より裾が薄い分布に従う¹¹⁾。

(iii) skewed-Student t 分布：

基準化された skewed-Student t 分布の密度関数 $f_{(skt)}(z_t; \nu, \xi)$ は以下のように与えられる。

$$f_{(skt)}(z_t; \nu, \xi) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi(\nu-2)}} \left(\frac{2s}{\xi+1/\xi}\right)$$

$$\times \left(1 + \frac{(sz_t + m)^2}{\nu-2} \xi^{-2I_t}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad \nu > 2. \quad (2.16)$$

ただし、

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{if } z_t \geq -\frac{m}{s} \\ -1 & \text{if } z_t < -\frac{m}{s} \end{cases} \quad (2.17)$$

とする。ここで、 ν は自由度を表し分布の厚さを示す。 ξ は非対称パラメータを表し、分布の歪みを示す。また、

$$m = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right), \quad (2.18)$$

$$s = \sqrt{\left(\xi + \frac{1}{\xi} - 1\right) - m^2} \quad (2.19)$$

である。 $\xi = 1$ 、あるいは、 $\ln(\xi) = 0$ のとき左右対称となり Student- t 分布と等しくなる。 $\xi > 1$ 、あるいは、 $\ln(\xi) > 0$ のとき分布の右裾が厚くなる。また、 $\xi < 1$ 、あるいは、 $\ln(\xi) < 0$ のとき分布の左裾が厚くなる。 z_t の分布が標準正規分布、基準化された Student- t 分布、GED、基準化された skewed-Student t 分布に従う場合、(2.2) 式の z_t は各々以下のように表現される¹²⁾。

$$z_t \sim i. i. d. N(0, 1), \quad (2.20)$$

$$z_t \sim i. i. d. t(0, 1, \nu), \quad (2.21)$$

$$z_t \sim i. i. d. GED(0, 1, \nu), \quad (2.22)$$

$$z_t \sim i. i. d. skt(0, 1, \nu, \xi). \quad (2.23)$$

2.3 推定法

パラメータ集合を Θ とするとき、FIGARCH $(1, d, 0)$ モデルの誤差項が正規分布に従うときには $\Theta = (\mu, \lambda, \omega, d, \beta_1)$ 、誤差項が Student- t 分布、GED に従うときには自由度 ν が追加され $\Theta = (\mu, \lambda, \omega, d, \beta_1, \nu)$ 、誤差項が skewed-Student t に従うときには ξ が追加され $\Theta = (\mu, \lambda, \omega, d, \beta_1, \nu, \xi)$ となる。また、FIGARCH $(1, d, 0)$ の場合には、各々の FIGARCH $(1, d, 0)$ モデルパラメータ集合に θ と γ が追加される¹³⁾。このとき尤度関数は以下のようになる。

$$L(\Theta) = f(R_1, R_2, \dots, R_T | \Theta) \\ = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_t} f\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t}\right). \quad (2.24)$$

したがって、対数尤度関数は、

$$\ln L(\Theta) = - \sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t) + \sum_{t=1}^T \ln f\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t}\right) \quad (2.25)$$

となる。また、誤差項となる標準正規分布、基準化された Student-*t* 分布、GED、基準化された skewed-Student *t* 分布に対する対数尤度関数 $\ln L_{(n)}$, $\ln L_{(t)}$, $\ln L_{(GED)}$, $\ln L_{(skt)}$ と FIEGARCH(1, *d*, 0) モデルにおいて、(2.11) 式の標準正規分布、基準化された Student-*t* 分布、GED、基準化された skewed-Student *t* 分布に対する $E(|z_t|)_{(n)}$, $E(|z_t|)_{(t)}$, $E(|z_t|)_{(GED)}$, $E(|z_t|)_{(skt)}$ に関しては、各々、補論 A と補論 B を参照して頂きたい。パラメータの推定に関しては、統計分析ソフト G@RCH4.20xMetrix¹⁴⁾ を利用して対数尤度関数を最大化することにより行なう。

2.4 本論文で使用するモデル

本論文では、ボラティリティの変動性の分析について、2.1 で説明した FIGARCH(1, *d*, 0) モデルと FIEGARCH(1, *d*, 0) モデルを使用する。また、誤差項の分布は、2.2 で解説した、正規分布、Student-*t* 分布、GED、skewed-Student *t* 分布を仮定する。本論文で使用する 8 種類のモデルを纏めると以下ようになる。

1. FIGARCH(1, *d*, 0)-*n*…(2.2) – (2.4), (2.10), (2.20) 式¹⁵⁾.
2. FIGARCH(1, *d*, 0)-*t*…(2.2) – (2.4), (2.10), (2.21) 式.
3. FIGARCH(1, *d*, 0)-GED…(2.2) – (2.4), (2.10), (2.22) 式.
4. FIGARCH(1, *d*, 0)-*skt*…(2.2) – (2.4), (2.10), (2.23) 式.
5. FIEGARCH(1, *d*, 0)-*n*…(2.2) – (2.4),

(2.9), (2.11), (2.20) 式¹⁶⁾.

6. FIEGARCH(1, *d*, 0)-*t*…(2.2) – (2.4), (2.9), (2.11), (2.21) 式.
7. FIEGARCH(1, *d*, 0)-GED…(2.2) – (2.4), (2.9), (2.11), (2.22) 式.
8. FIEGARCH(1, *d*, 0)-*skt*…(2.2) – (2.4), (2.9), (2.11), (2.23) 式.

“-*n*”, “-*t*”, “-GED”, “-*skt*” は、誤差項が各々、正規分布、Student-*t* 分布、GED、skewed-Student *t* 分布に従うことを表す。

3. データと実証結果

3.1 データ

本研究では、データとして大阪証券取引所で取引されている日経 225 先物価格¹⁷⁾ を使用し、日経 NEEDS-FinancialQuest からデータを取得した。先物データ系列は各限月ごとに分かれているため、期近物を繋げることによりデータ系列の作成を行なった¹⁸⁾。サンプル期間は、2000 年 1 月 4 日から 2012 年 10 月 31 日までである (図 1 を参照)¹⁹⁾。収益率は、(2.1) 式を用いて計算を行なった (図 2 を参照)。標本期間は、2000 年 1 月 5 日から 2012 年 10 月 31 日まで、標本数は 3154 である。データの基本統計量として、平均、標準偏差、歪度、尖度、最大値、最小値、正規性の検定統計量²⁰⁾ が表 1 に纏められている。尖度について、“3”を超えていることから、また、正規性検定が有意なことから、日経 225 先物の収益率の分布は正規分布よりも裾が厚いことがわかる。また、収益率のヒストグラム・密度関数は、図 3 に描かれている。ここでは、密度と正規近似が重ねて描かれている。 $N(s=1.631)$ は、表 1 より正規近似が平均 -0.024 、分散が 1.631^2 の正規分布 $N(-0.024, 1.631^2)$ に従うことを表している。

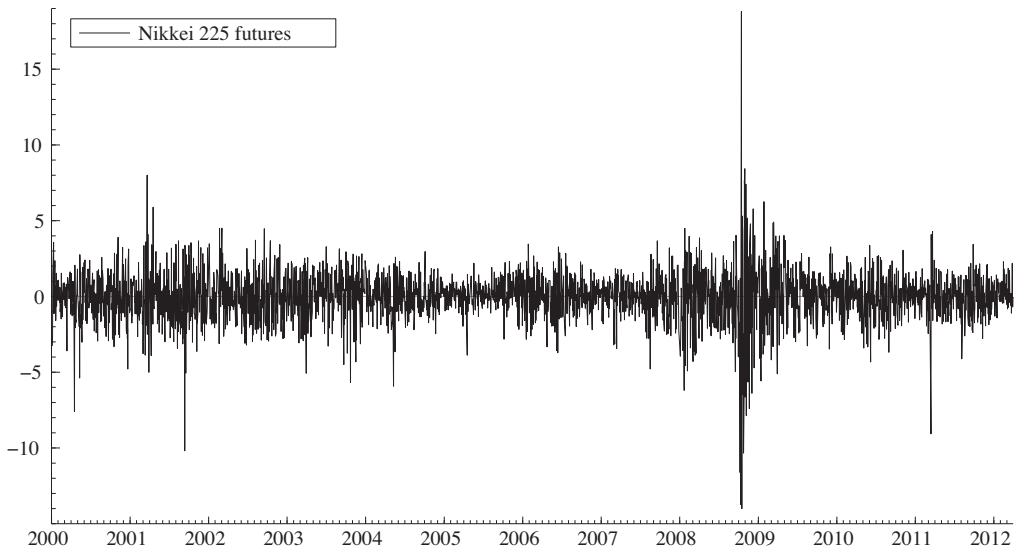
3.2 実証結果

本論文の実証結果は、表 2 に纏められている。実証結果を纏めると以下ようになる。

図 1. 終値 (2000/1/4-2012/10/31)



図 2. 収益率 (2000/1/5-2012/10/31)



(i) FIGARCH(1, d , 0) モデル: μ に関しては, 誤差項が正規分布, skewed-Student t 分布に従う場合には有意ではなく, GED 分布, Student- t 分布に従う場合には統計的に有意な結果となった. ω に関しては, 全ての分布に関して統計的に有意な推定値となった. 長期記憶性を示す d の推定値は, 0.481, 0.510, 0.493, 0.836 であり, 統計的に有意な結果が

得られた. ただし, d の推定値が $0 < d < 0.5$ の定常長期記憶過程の場合と $0.5 \leq d < 1$ の非定常長期記憶過程の場合に分かれる結果となった. β_1 はボラティリティの持続性を表すパラメータであり, 全ての分布に関して統計的に有意な推定値となっている. 自由度 ν に関して, t 分布, skewed-Student t の場合には推定値は各々 8.749, 9.369 であり統計的に

図3. ヒストグラム・密度関数 (2000/1/5-2012/10/31)

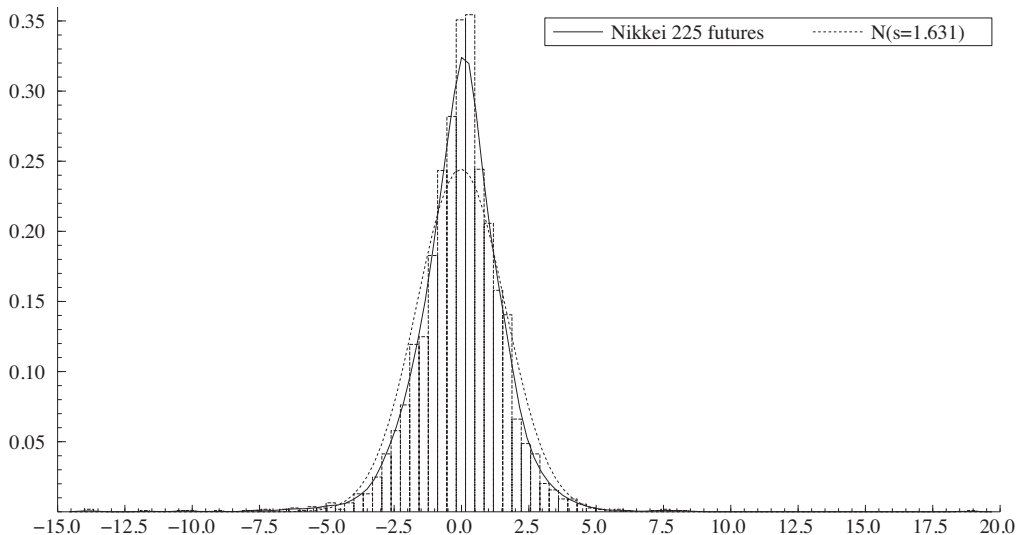


表1. 収益率 R_t (%) の基本統計量

2000年1月5日-2012年10月31日, 標本数3154

	平均	標準偏差	歪度	尖度	最大値	最小値	正規性検定
日経225先物	-0.024	1.631	-3.05	15.28	18.81	-14.00	3973.**

**は有意水準1%で有意であることを示す。
出所) 筆者作成。

有意な結果となり, 各々, $\nu > 4$ となっている。また, GED分布の場合にも推定値は1.479であり統計的に有意な結果となり $\nu < 2$ となっている。これらの結果より, 日経225先物価格の収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることがわかる。また, 非対称パラメータ $\ln(\xi)$ の推定値は-0.106で統計的に有意であり, 収益率の分布の左裾が厚いことを示している。

(ii) FIGARCH(1, d , 0)モデル: μ に関しては, 全ての分布について統計的に有意ではなく, ω に関しては, 全ての分布に関して統計的に有意な推定値となった。長期記憶性を示す d の推定値は, 0.167, 0.467, 0.223, 0.138であり, 統計的に有意な結果が得られた。 d の推定値が $0 < d < 0.5$ であるということは, 日経225先物のボラティリティ σ^2 の過程は, 定常長期記憶過程に従っていることがわか

る。 β_1 は, 全ての分布に関して統計的に有意な推定値となっている。非対称性を示すパラメータ θ に関しては, 全ての分布において統計的に有意な結果が得られた。自由度 ν に関して, Student- t 分布, skewed-Student t の場合には推定値は各々5.845, 12.10であり統計的に有意な結果となり $\nu > 4$ となっている。また, GED分布の場合にも推定値は1.557であり統計的に有意な結果となり $\nu < 2$ となっている。これらの結果より, ここでも日経225先物価格の収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることがわかる。また, $\ln(\xi)$ の推定値は-0.110で統計的に有意であり, ここでも日経225先物価格の収益率の分布の左裾が厚いことを示されている。

次に, FIGARCH(1, d , 0)モデルとFIGARCH(1, d , 0)モデルの定式化が正しいかどうかのモデルの診断をLjung-Boxの Q 統計量により行なう²¹⁾。

表 2. モデルの推定結果

$$R_t = \mu + \epsilon_t, \epsilon_t = \sigma_t z_t, \sigma_t > 0, z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, Var[z_t] = 1.$$

$$FIGARCH(1, d, 0) : \sigma_t^2 = \omega [1 - \beta_1(L)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1-L)^d \right\} \epsilon_t^2.$$

$$FIEGARCH(1, d, 0) : \ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1-L)^{-d} g(z_{t-1}),$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|].$$

	FIGARCH(1, d, 0)				FIEGARCH(1, d, 0)			
	<i>n</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>	<i>skt</i>	<i>n</i>	<i>t</i>	<i>GED</i>	<i>skt</i>
μ	0.035 (1.546)	0.049* (2.249)	0.050* (2.247)	0.028 (1.249)	0.011 (0.513)	0.076* (2.242)	0.010 (0.482)	0.008 (0.363)
ω	0.094* (3.066)	0.079* (3.262)	0.084* (3.175)	0.037* (2.189)	0.765* (5.066)	0.914* (3.939)	0.502* (2.034)	0.426* (2.094)
d	0.481* (3.962)	0.510* (2.608)	0.493* (3.660)	0.836* (9.924)	0.167* (3.254)	0.467* (9.650)	0.223* (2.440)	0.138* (2.664)
β_1	0.425* (3.229)	0.494* (2.418)	0.459* (3.193)	0.807* (11.63)	0.924* (12.18)	0.388* (2.046)	0.912* (4.474)	0.945* (17.55)
θ	—	—	—	—	-0.089* (-4.668)	-0.225* (-4.104)	-0.082* (-3.947)	-0.082* (-4.186)
γ	—	—	—	—	0.156* (5.476)	0.006* (2.668)	0.139* (3.874)	0.138* (4.685)
ν	—	8.749* (6.089)	1.479* (21.43)	9.369* (5.887)	—	5.845* (9.177)	1.557* (21.21)	12.10* (4.724)
$\ln(\xi)$	—	—	—	-0.106* (-4.308)	—	—	—	-0.110* (-4.258)
Log-lik.	-5526.07	-5481.37	-5488.41	-5472.48	-5486.08	-5559.74	-5461.73	-5448.24
$Q(20)$	12.25	11.61	11.90	11.66	14.38	20.52	13.70	13.72
$Q^2(20)$	20.36	36.25	24.56	29.76	19.52	27.52	19.50	20.83

*は有意水準 5% で有意であることを示す。括弧内の数値は *t* 値を表す。
出所) 筆者作成。

表 2 の $Q(20)$ と $Q^2(20)$ は、各々 20 次までの基準化した残差 ($\hat{\epsilon}_t^{-1}$) とその 2 乗の Ljung-Box の Q 統計量を表している。ここでは、漸近的に自由度 20 の χ^2 分布に従う。FIGARCH(1, d , 0) モデルと FIEGARCH(1, d , 0) モデルに関して統計的に有意な推定値が得られていない。全ての $Q(20)$ と $Q^2(20)$ の値に対して、帰無仮説は 10% 有意水準でも棄却することはできない。ここから、FIGARCH(1, d , 0) モデルと FIEGARCH(1, d , 0) モデルは、日経 225 先物のボラティリティの自己相関を捉えていることがわかる。

4. 結論と今後の課題

本論文は、FIGARCH(1, d , 0) モデル、FIEGARCH(1, d , 0) モデルを用いて日経 225 先物のボラティリティの変動性に関して分析を行なったものである。日経 225 先物価格のデータを用いてボラティリティの長期記憶性に焦点を当て実証的な検証を行なった。

FIGARCH(1, d , 0) モデルについては、誤差項が Student- t 分布、skewed-Student t 分布に従う場合には日経 225 先物のボラティリティは定常長期記憶過程に従っており、GED 分布、Student- t 分布に従う場合には非定常長期記憶過程に従っている

ことが明らかとなった。また、FIEGARCH(1, d, 0)モデルについては、ボラティリティは全ての分布に関して定常長期記憶過程に従っていることが明らかとなった。また、日経225先物の収益率とボラティリティとの間には非対称性があることがわかった。日経225先物価格の日次収益率の分布に対してStudent-t分布、GED分布、skewed-Student t分布などの正規分布よりも裾の厚い分布を用いることは有効であるという結果を得た。

今後の課題としては、現物資産の日経225についてはオプション取引も行なわれているので、FIGARCHモデル、FIEGARCHモデルによるオプション価格付けへの応用を行なうことも重要である。その他のFractionally Integrated ARCH型モデルとして、Ding *et al.* (1993)のAPGARCH (Asymmetric Power GARCH)モデルを発展させたTse (1998)のFIAPARCH (Fractionally Integrated APGARCH)、Hwang (2001)のASYMM-FIGARCH (Asymmetric FIGARCH)、Davidson (2004)のHYGARCH (Hyperbolic GARCH)がある。これらのモデルも用いて、ボラティリティの長期記憶性の分析を行ない比較を行なうことやジャンプ過程、曜日効果などをモデルに組み込んで分析を行なうことなどが考えられる。

補論 A : $\ln L_{(n)}$, $\ln L_{(t)}$, $\ln L_{(GED)}$, $\ln L_{(skt)}$

誤差項となる標準正規分布、基準化されたStudent-t分布、GED、基準化されたskewed-Student t分布に対する対数尤度関数 $\ln L_{(n)}$, $\ln L_{(t)}$, $\ln L_{(GED)}$, $\ln L_{(skt)}$ は以下のように記述される。

$$\begin{aligned} \ln L_{(n)} &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [\ln(2\pi) + \ln(\sigma_t^2) + z_t^2], \\ \ln L_{(t)} &= T \left\{ \ln \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \ln \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \ln[\pi(\nu-2)] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln(\sigma_t^2) + (1+\nu) \ln \left(1 + \frac{z_t^2}{\nu-2} \right) \right], \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \ln L_{(GED)} &= \sum_{t=1}^T \left[\ln \left(\frac{\nu}{\lambda \nu} \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{z_t}{\lambda \nu} \right|^\nu \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{1}{\nu} \right) \ln(2) - \ln \Gamma \left(\frac{1}{\nu} \right) - \frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) \right], \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \ln L_{(skt)} &= T \left\{ \ln \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \ln \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \ln[\pi(\nu-2)] + \ln \left(\frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \right) + \ln(s) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left\{ \ln(\sigma_t^2) + (\nu+1) \right. \\ &\quad \left. \times \ln \left[1 + \frac{(sz_t + m)^2}{\nu-2} \xi^{-2I_t} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

補論 B : $E(|z_t|)_{(n)}$, $E(|z_t|)_{(t)}$, $E(|z_t|)_{(GED)}$, $E(|z_t|)_{(skt)}$

FIEGARCH(1, d, 0)モデルにおいて、(2.11)式の標準正規分布、基準化されたStudent-t分布、GED、基準化されたskewed-Student t分布に対する $E(|z_t|)_{(n)}$, $E(|z_t|)_{(t)}$, $E(|z_t|)_{(GED)}$, $E(|z_t|)_{(skt)}$ は以下のように表される。

$$E(|z_t|)_{(n)} = \sqrt{2/\pi}, \tag{4.4}$$

$$E(|z_t|)_{(t)} = \frac{2\Gamma((1+\nu)/2)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)}, \tag{4.5}$$

$$E(|z_t|)_{(GED)} = 2^{(1/\nu)} \lambda \nu \frac{\Gamma(2/\nu)}{\Gamma(1/\nu)}, \tag{4.6}$$

$$E(|z_t|)_{(skt)} = \frac{4\xi^2}{\xi+1/\xi} \frac{\Gamma((1+\nu)/2)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)}. \tag{4.7}$$

(日本大学経済学部准教授)

注

1) あるいは、以下のように表現される。

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega^* + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i L^i \epsilon_t^2 \\ &= \omega^* + \psi(L) \epsilon_t^2, \quad 0 \leq d \leq 1. \end{aligned}$$

ここで、

$$\omega^* = \omega[1 - \beta(L)]^{-1},$$

$$\rho(L) = 1 - [1 - \beta(L)]^{-1} \phi(L) (1-L)^d.$$

2) ガンマ関数は以下のように定義される。

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-x} dx, \text{ for } \nu > 0.$$

3) k の自己相関係数 (autocorrelation coefficient) を

$$\rho(k) \text{ とするとき, } \sum_{k=1}^\infty |\rho(k)| < \infty \text{ ならば短期記憶}$$

過程に従い, $\sum_{k=1}^\infty |\rho(k)| = \infty$ ならば長期記憶過程

に従う。長期記憶性に関して詳しくは、矢島 (2003), 松葉 (2007) を参照。

4) GARCH(p, q) モデルは、ボラティリティ σ_t^2 が以下の過程で表される。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q a_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

ラグ・オペレータ L を用いると GARCH(p, q) モデルは、以下のように表現される。

$$\sigma_t^2 = \omega + a(L)\epsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2.$$

5) EGARCH(p, q) は、ボラティリティ σ_t^2 が以下の過程で表される。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) + \sum_{i=1}^q a_i [\theta z_{t-i} + \gamma (|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|)].$$

ラグ・オペレータ L を用いると EGARCH(p, q) モデルは、以下のように表現される。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 - \beta(L)]^{-1} [1 + a(L)] g(z_{t-1}),$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|].$$

6) 日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性の研究として、渡部・佐々木 (2005, 2006), 竹内 (野木森)・渡部 (2008), 竹内 (野木森) (2009) がある。これらの研究では、FIEGARCH (1, $d, 0$) モデルにより実証分析を行なっている。

7) Giot and Laurent (2004) は、Fernández and Steel (1998) の提案した skewed-Student t 分布を利用して ARCH 型モデルを基にした VaR (Value-at-Risk) に適用して株価指数と外国為替レートの分析を行なっ

ている。

8) その他の利用可能な正規分布よりも裾が厚い分布を ARCH 型モデルに応用した研究として、Bollerslev *et al.* (1994) の一般化 t 分布 (generalized t distribution) や Michelfelder (2005) の skewed GED (SGED) などがある。

9) 自由度 ν の Student- t 分布の尖度 K^t 分布は、

$$K^t \text{ 分布} = \frac{3(\nu-2)}{\nu-4} \quad (2.13)$$

$$= 3 + \frac{6}{\nu-4}, \quad \nu > 4 \quad (2.14)$$

となる。したがって、尖度は必ず 3 より大きくなる。

10) $\nu=1$ のとき z_t は、double exponential distribution あるいは、Laplace distribution に従う。

11) $\nu=\infty$ のとき z_t は、区間 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ の一様分布 (uniform distribution) に従う。

12) 詳しくは、Bauwens and Laurent (2005) を参照。

13) 誤差項が正規分布に従うときには $\Theta = (\mu, \lambda, \omega, d, \beta_1, \theta, \gamma)$, 誤差項が Student- t 分布, GED に従うときには $\Theta = (\mu, \lambda, \omega, d, \beta_1, \theta, \gamma, \nu)$, 誤差項が skewed-Student t に従うときには $\Theta = (\mu, \lambda, \omega, d, \beta_1, \theta, \gamma, \nu, \xi)$ となる。

14) 詳しくは、Doornik (2006), Laurent and Peters (2006), 市川 (2007), 三井 (2010), Xekalaki and Degiannakis (2010) を参照。

15) 例えば、FIGARCH(1, $d, 0$)- n は、纏めると以下のように表される。

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.N(0, 1),$$

$$\sigma_t^2 = \omega [1 - \beta_1(L)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1-L)^d \right\} \epsilon_t^2.$$

16) 例えば、FIEGARCH(1, $d, 0$)- n は、纏めると以下のように表される。

$$R_t = \mu + \lambda \sigma_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.N(0, 1),$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1-L)^{-d} g(z_{t-1}),$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|].$$

17) 9:00-15:15 に取引される日経 225 先物を研究対象とする。16:00-翌日 3:00 のナイト・セッションに関しては研究対象としない。また、CME や SGX-DT で取引されている日経 225 先物も対象外とする。

- 18) 日経 225 先物の限月は 3 月・6 月・9 月・12 月の 5 限月となっている。
- 19) 本研究では、図の作成は PcGive (統計・時系列分析ソフト) により行なった。作成したファイルは “.eps” ファイルで LATEX に取り込むことができる。PcGive に関して詳しくは、Doornik and Hendry (2001), ヘンドリー・ドーナック (2006) を参照。
- 20) 本論文では、収益率分布の正規性検定を行なう際に、歪度と尖度を用いる Jarque and Bera (1987) の方法を利用した。Jarque-Bera 検定統計量 JB は、

$$JB = \frac{\widehat{skew}^2 T}{6} + \frac{(\widehat{kurt} - 3)^2 T}{24} \sim \chi^2(2)$$

として与えられる。ここで、 \widehat{skew} , \widehat{kurt} はデータから計算される歪度と尖度を各々表し、 T は標本数を表す。正規分布であれば $JB=0$ であり、正規分布から乖離するほど JB の値は大きくなる。詳しくは、Jarque and Bera (1987) を参照。

- 21) Ljung-Box の統計量は、以下のように計算される。

$$Q^{LB} = T(T+2) \sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{T-i}$$

ここで、

$$r_i = \frac{T}{T-i} \frac{\sum_{t=i+1}^T (\hat{\epsilon}_t^2 - \bar{\epsilon})(\hat{\epsilon}_{t-i}^2 - \bar{\epsilon})}{\sum_{t=1}^T (\hat{\epsilon}_t^2 - \bar{\epsilon})^2}, \text{ for } \bar{\epsilon} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t^2$$

である。

参考文献

市川博也 (2007) 『応用経済学のための時系列分析』朝倉書店。

竹内 (野木森) 明香 (2009) 「個別株式ボラティリティの長期記憶性と非対称性」早稲田大学産業経営研究所ワーキング・ペーパー, 第 1 号。

竹内 (野木森) 明香・渡部敏明 (2008) 「日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性とオプション価格」MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』No.24, pp.45-74。

ヘンドリー, D. F.・J. A. ドーナック (市川博也 [訳・

解説]) (2006) 『PcGive による時系列分析入門』日本評論社。

松葉育雄 (2007) 『長期記憶過程の統計—自己相似た時系列の理論と方法—』共立出版

三井秀俊 (2010) 「G@RCH による資産価格の時系列分析」日本大学経済学部産業経営研究所『産業経営研究』第 32 号, pp.123-136。

矢島美寛 (2003) 「長期記憶をもつ時系列モデル」刈屋武昭・田中勝人・矢島美寛・竹内啓 [著] 『経済時系列の統計—その数理的基礎—』(統計科学のフロンティア 8) 岩波書店, pp.103-202。

渡部敏明・佐々木浩二 (2005) 「日経 225 先物価格を用いた FIEGARCH モデルの推定」大阪証券取引所『先物・オプションレポート』Vol.17, No.8, pp.1-4。

—— (2006) 「ARCH 型モデルと “Realized Volatility” によるボラティリティ予測とバリュエーション・リスク」日本銀行金融研究所『金融研究』第 25 巻, 別冊第 2 号, pp.39-74。

Baillie, R. T., T. Bollerslev and H. O. Mikkelsen (1996) “Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 74, pp.3-30。

Bauwens, L. and S. Laurent (2005) “A New Class of Multivariate Skew Densities, with Application to GARCH Models,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 23, pp.346-354。

Bollerslev, T. (1986) “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31, pp.307-327。

Bollerslev, T. and H. O. Mikkelsen (1996) “Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility,” *Journal of Econometrics*, 73, pp.151-184。

Bollerslev, T., R. F. Engle and D. B. Nelson (1994) “ARCH Models,” in R. F. Engle and D. McFadden (eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol.4, pp.2959-3038, North-Holland。

Davidson, J. (2004) “Moment and Memory Properties of Linear Conditional Heteroskedasticity Models, and a New Model,” *Journal of Business and Economic*

- Statistics, 22, pp.16-29.
- Ding, Z., C. W. J. Granger and R. F. Engle (1993) "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model," *Journal of Empirical Finance*, 1, pp.83-106.
- Doornik, J. A. (2006) *An Introduction to OxMetrics 4 - A Software System for Data Analysis and Forecasting*, Timberlake Consultants Ltd.
- Doornik, J. A. and D. F. Hendry (2001) *Econometric Modelling Using PcGive 10 Volume III*, Timberlake Consultants Ltd.
- Engle, R. F. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 50, pp.987-1007.
- Fernández, C. and M. F. J. Steel (1998) "On Bayesian modeling of Fat Tails and Skewness," *Journal of the American Statistical Association*, 93, pp.359-371.
- Giot, P. and S. Laurent (2004) "Modelling Daily Value-at-Risk Using Realized Volatility and ARCH Type Models," *Journal of Empirical Finance*, 11, pp.379-398.
- Glosten, L. R., R. Jagannathan and D. Runkle (1993) "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks," *Journal of Finance*, 48, pp.1779-1801.
- Hwang, Y. (2001) "Asymmetric Long Memory GARCH in Exchange Return," *Economics Letters*, 73, pp.1-5.
- Jarque, C. M. and A. K. Bera (1987) "Test for Normality of Observations and Regression Residuals," *International Statistical Review*, 55, pp.163-172.
- Laurent, S. and J.-P. Peters (2006) *Estimating and Forecasting ARCH Models Using G@RCH 4.2*, Timberlake Consultants Ltd.
- Michelfelder, R. A. (2005) "Volatility of Stock Returns: Emerging and Mature Markets," *Managerial Finance*, 31, pp.66-86.
- Nelson, D. B. (1991) "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59, pp.347-370.
- Tsay, R. S. (2010) *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., John Wiley & Sons.
- Tse, Y. K. (1998) "The Conditional Heteroskedasticity of the Yen-Dollar Exchange Rate," *Journal of Applied Econometrics*, 13, pp.49-55.
- Xekalaki, E. and S. Degiannakis (2010) *ARCH Models for Financial Applications*, Wiley.