

【論文】

リスク資産価格の時系列分析における非対称分布の有効性

—TOPIX, 日経平均, JPX 日経インデックス 400—*

三井 秀俊[†]

1 はじめに

リスク資産価格の収益率の分布は正規分布に比べて裾が厚いことが広く知られており、リスク資産価格収益率のボラティリティは市場の変化に応じて時間を通じて変動している。このような特徴を持つ時系列データは、通常、GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) モデル、EGARCH (Exponential GARCH) モデルなどの ARCH 型モデル¹⁾ や確率的ボラティリティ変動 (Stochastic Volatility) モデル²⁾ などで定式化されることが多く、リスク資産価格分析に関して頻繁に利用されている。また、リスク資産の中でも株価収益率や外国為替レート変化率の分布は歪んでいて、左右非対称であることが多くの実証研究で示されている。そのため、このような現象を捉えるには、平均が異なる分布から構成される混合分布による定式化が考えられ、里吉・三井 (2013) では混合正規分布と混合 t 分布を用いて、日経平均の分析を行なっている。また、Lambert and Laurent (2001), Giot and Laurent (2003, 2004), 渡部・佐々木 (2006), 三井 (2012, 2013), 里吉 (2018) では、Fernández and Steel (1998) の提案した skewed-Student t 分布によりリスク資産価格の分析を行ない、左右非対称分布の有効性を明らかにしている。そのため、本論文では誤差項の分布として基準化された Student- t 分布 (standardized Student- t distribution) と基準化された skewed-Student t 分布 (standardized skewed-Student t distribution) を使用することにする。

本論文では、リスク資産として日本の代表的な

株価指数である TOPIX (Tokyo Stock Price Index; 東証株価指数)、日経平均 (Nikkei Stock Average)³⁾、JPX 日経インデックス 400 (JPX-Nikkei Index 400) を使用する。これらの株価指数を用いる理由は、金融派生商品として先物・オプションを持つためである。TOPIX は TOPIX 先物・TOPIX オプション、日経平均は日経 225 先物⁴⁾・日経 225 オプション、JPX 日経インデックス 400 は JPX 日経インデックス 400 先物・JPX 日経インデックス 400 オプションの原資産となっている。特に、オプションに関しては、収益率の分布の仮定は非常に重要な要因であり、オプション価格に対して影響を与える⁵⁾。また、ボラティリティの変動過程としては、長期記憶 (long memory) 性に焦点を当てる。これは、ボラティリティの長期記憶性が存在するならば、長期の限月をもつ先物・オプションの価格付けがより正確に行なうことができるようになるためである。長期記憶性を捉えるため Baillie *et al.* (1996) の FIGARCH (Fractionally Integrated GARCH) モデルと Bollerslev and Mikkelsen (1996) の FIEGARCH (Fractionally Integrated Exponential GARCH) モデルを使用する。これまで、Student- t 分布、skewed-Student t 分布と FIGARCH モデル、FIEGARCH モデルにより分析を行なっている研究として、三井 (2012, 2013) がある。三井 (2012) では、リスク資産として、日本の商品先物市場 (commodity futures market) における日経商品先物指数、東穀農産物指数、日経・東工取商品指数、金 (Gold) のデータを用いて実証研究を行っており、skewed-Student t 分布の有効性とボラティリティの長期記

憶性を示している。また、三井(2013)では、日本の株価指数先物市場における日経225先物に関して、三井(2013)と同様の結果を得ている。

本論文では、実証分析を進めるにあたり、2010年1月4日に東京証券取引所でアローヘッド(arrowhead)⁶⁾が稼働したため、2010年1月4日から2017年9月29日までのTOPIX、日経平均、JPX日経インデックス400の日次データを用いて実証的な検証を行なった。アローヘッドの導入により高頻度取引(High Frequency Trading; HFT)が盛んになり日本の株式市場が以前よりも効率的になったと考えられる⁷⁾ため、アローヘッドの導入前の株価指数データは使用しないこととした。本論文の実証分析の結果として、FIGARCHモデルについては、全ての株価指数に関して、誤差項の分布にはStudent- t 分布よりも非対称分布であるskewed-Student t が適当であることが明確となり、分布の左右非対称性が重要であることがわかった。また、TOPIX、日経平均、JPX日経インデックス400のボラティリティは定常長期記憶過程に従っていることが明らかとなった。FIGARCHモデルについては、全ての株価指数について誤差項の分布に非対称分布を用いることは必ずしも有効であるわけではないことが示された。また、TOPIXとJPX日経インデックス400のボラティリティは定常長期記憶過程に従い、日経平均のボラティリティは非定常長期記憶過程に従うことが明らかとなった。

本論文の以下の構成は次の通りである。第2節では、本論文で用いた誤差項の分布であるStudent- t 分布、skewed-Student t 分布とボラティリティ変動モデルであるFIGARCHモデル、FIGARCHモデルについて解説し、モデルの推定法に関して説明する。第3節では、本論文で利用したTOPIX、日経平均、JPX日経インデックス400のデータと実証結果に関して述べる。最後の第4節では、まとめと今後の課題について言及する。

2 分析モデル

2.1 モデル

t 時点のTOPIX、JPX日経インデックス400の収益率を R_t とする。 $Index_t$ を t 時点のTOPIX、JPX日経インデックス400の水準⁸⁾とすると、 t 時点のTOPIX、JPX日経インデックス400の収益率 R_t は以下のように定義される。

$$R_t = (\ln Index_t - \ln Index_{t-1}) \times 100. \quad (2.1)$$

また、 S_t を t 時点の日経平均の株価の水準とすると、 t 時点の日経平均の収益率 R_t は以下のように定義される。

$$R_t = (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \times 100. \quad (2.2)$$

このとき、収益率 R_t の過程を以下のようにおく。

$$R_t = \mu + \epsilon_t, \quad (2.3)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad (2.4)$$

$$z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, \text{Var}[z_t] = 1. \quad (2.5)$$

ここで、(2.3)式の定数項 μ は期待収益率、 ϵ_t は誤差項であり、収益率に自己相関は無いと仮定する。 $i.i.d.$ は、過去と独立で同一な分布(independent and identically distributed)を表す。 $E[\cdot]$ は期待値、 $\text{Var}[\cdot]$ は分散を各々表す。

株価指数の収益率の分布は、正規分布よりも裾が厚い分布であることが知られている。また、多くの先行研究では、誤差項の分布に正規分布よりも尖度の高い分布を用いた方が当てはまりが良いとの結果が得られている。また、収益率の分布の左右対称性、つまり分布の歪みが知られている。したがって、本論文では、 z_t の分布として、基準化されたStudent- t 分布、基準化されたskewed-Student t 分布⁹⁾を使用することにする。

z_t が平均0、分散1に基準化されたStudent- t 分布に従う場合、その密度関数 $f_{(v)}(z_t; v)$ は以下のように与えられる。

$$f_{(v)}(z_t; \nu) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi(\nu-2)}} \times \left(1 + \frac{z_t^2}{\nu-2}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad \nu > 2. \quad (2.6)$$

ここで, ν は自由度 (degree of freedom) を表す. Student- t 分布は 0 について左右対称となり, $\nu > 4$ に対して尖度は 3 よりも大きくなる¹⁰⁾. また, $\nu \rightarrow \infty$ のとき標準正規分布の密度関数に収束する.

z_t が平均 0, 分散 1 に基準化された skewed-Student t 分布に従う場合, その密度関数 $f_{(skt)}(z_t; \nu, \xi)$ は以下のように与えられる.

$$f_{(skt)}(z_t; \nu, \xi) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi(\nu-2)}} \left(\frac{2s}{\xi+1/\xi} \right) \times \left(1 + \frac{(sz_t+m)^2}{\nu-2} \xi^{-2s} \right)^{-(\nu+1)/2}, \quad \nu > 2. \quad (2.7)$$

ただし,

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{if } z_t \geq -\frac{m}{s} \\ -1 & \text{if } z_t < -\frac{m}{s} \end{cases} \quad (2.8)$$

とする. ここで, ν は自由度を表し, 分布の厚さを示す. ξ は非対称パラメータを表し, 分布の歪みを示す. また,

$$m = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right), \quad (2.9)$$

$$s = \sqrt{\left(\xi + \frac{1}{\xi} - 1 \right) - m^2} \quad (2.10)$$

である. $\xi = 1$, あるいは, $\ln(\xi) = 0$ のとき左右対称となり Student- t 分布と等しくなる. $\xi > 1$, あるいは, $\ln(\xi) > 0$ のとき分布の右裾が厚くなる (右に歪んだ分布となる). また, $\xi < 1$, あるいは, $\ln(\xi) < 0$ のとき分布の左裾が厚くなる (左に歪んだ分布となる). 図 1 には, ξ の値の変化により確率分布の形状がどのように変わるかを描いている. 自由度 ν は, いずれも 5 としている. $\xi = 1$ のときには, 左右対称の分布となる. $\xi =$

1.2 のときには左に歪んだ分布となり, $\xi = 0.8$ のときには右に歪んだ分布となる.

z_t の分布が基準化された Student- t 分布, skewed-Student t 分布に従う場合, (2.5) 式の z_t は各々以下のように表される.

$$z_t \sim i. i. d. t(0, 1, \nu), \quad (2.11)$$

$$z_t \sim i. i. d. skt(0, 1, \nu, \xi). \quad (2.12)$$

本論文では, ボラティリティの変動過程として, その特性を捉えるために, Baillie *et al.* (1996) が提案した FIGARCH モデルと Bollerslev and Mikkelsen (1996) が提案した FIEGARCH モデルを用いる. FIGARCH (p, d, q) モデルは, ボラティリティ σ_t^2 が以下の過程で表される.

$$\sigma_t^2 = \omega[1 - \beta(L)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta(L)]^{-1} \right. \\ \left. \times \phi(L)(1-L)^d \right\} \epsilon_t^2. \quad (2.13)$$

ここで, $\beta(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_p L^p$, $\phi(L) = [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1-L)^{-1}$, $\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_q L^q$ を表す. また, L はラグ・オペレータ (Lag operator) を表し, $L^i y_t = y_{t-i}$, ($i=0, 1, \dots$) となる. あるいは, FIGARCH (p, d, q) モデルは, 以下のように表される.

$$\sigma_t^2 = \omega^* + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i L^i \epsilon_t^2 \quad (2.14)$$

$$= \omega^* + \psi(L) \epsilon_t^2, \quad 0 \leq d \leq 1. \quad (2.15)$$

ここで,

$$\omega^* = \omega[1 - \beta(L)]^{-1},$$

$$\psi(L) = 1 - [1 - \beta(L)]^{-1} \phi(L)(1-L)^d.$$

また, $(1-L)^d$ は, 以下のように表される.

$$(1-L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)} L^k \\ = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\dots(d-k+1)}{k!} (-L)^k. \quad (2.16)$$

ここで、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数 (gamma function),

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx, \text{ for } \nu > 0$$

である。 $(1-L)^d$ における d が長期記憶性¹¹⁾ を捉えるパラメータを示す。 $0 < d < 1$ となるとき、ボラティリティ σ_t^2 は長期記憶過程に従っていることがわかる。また、 $0 < d < 0.5$ のとき定常長期記憶過程と呼び、 $0.5 \leq d < 1$ のとき非定常長期記憶過程と呼ぶ。 $d=1$ のとき、ボラティリティ σ_t^2 は単位根を持ち非定常過程となる。 $d=0$ のとき短期記憶過程となり、Bollerslev (1986) の GARCH (p, q) モデルとなる。GARCH (p, q) モデルは、ラグ・オペレータ L を用いると、以下のように表される。

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L) \epsilon_t^2 + \beta(L) \sigma_t^2. \quad (2.17)$$

FIEGARCH (p, d, q) モデルは、ボラティリティ σ_t^2 が以下の過程で表される。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \phi(L)^{-1}(1-L)^{-d} [1 - \alpha(L)] g(z_{t-1}), \quad (2.18)$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma[|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|] \quad (2.19)$$

$$g(z_{t-1}) = \begin{cases} (\theta + \gamma)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|), & \text{if } z_{t-1} > 0, \\ (-\theta + \gamma)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|), & \text{if } z_{t-1} < 0, \end{cases}$$

ここでは、ボラティリティの対数値を被説明変数としてパラメータの非負制約を取り除き定式化されている。 $\theta < 0$ ならば、資産価格が上昇した日の翌日より、資産価格が下落した日の翌日の方がボラティリティは上昇する。このモデルでは、ボラティリティの対数値を被説明変数としているため $\omega, \beta, \alpha, \theta, \gamma$ に非負制約は必要としない。 $d=0$ のとき、Nelson (1991) の EGARCH (p, q) モデルとなる。EGARCH (p, q) は、ラグ・オペレータ L を用いると、以下のように表される。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 - \beta(L)]^{-1} [1 + \alpha(L)] g(z_{t-1}), \quad (2.20)$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma[|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|].$$

次数 p, q の選択は、過去の実証研究において $p=1, q=0$ とする場合が多い¹²⁾ ので、本論文でも FIGARCH ($1, d, 0$), FIEGARCH ($1, d, 0$) を用いて分析を行なう。FIGARCH ($1, d, 0$) は、以下のように表される。

$$\sigma_t^2 = \omega [1 - \beta_1(L)]^{-1} + \{1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1}(1-L)^d\} \epsilon_t^2. \quad (2.21)$$

また、FIEGARCH ($1, d, 0$) は以下のように表される。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 - \beta_1(L)]^{-1}(1-L) g(z_{t-1}), \quad (2.22)$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma[|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|].$$

これらのモデルを用いて TOPIX、日経平均、JPX 日経インデックス 400 のボラティリティの変動特性に関しても実証分析を行なう。

2.2 推定法

前節のモデルのパラメータは最尤法 (Maximum Likelihood method) で推定することができる。パラメータ集合を Θ とするとき、FIGARCH ($1, d, 0$) モデルの誤差項が Student- t 分布従うときには $\Theta = (\mu, \omega, d, \beta_1, \nu)$ 、誤差項が skewed-Student t に従うときには、分布の非対称パラメータ ξ が追加され $\Theta = (\mu, \omega, d, \beta_1, \nu, \xi)$ となる。また、FIGARCH ($1, d, 0$) の場合には、各々の FIGARCH ($1, d, 0$) モデルパラメータ集合に加えて、 θ と γ が追加され、誤差項が Student- t 分布に従うときには $\Theta = (\mu, \omega, d, \beta_1, \theta, \gamma, \nu)$ 、誤差項が skewed-Student t に従うときには $\Theta = (\mu, \omega, d, \beta_1, \theta, \gamma, \nu, \xi)$ となる。このとき尤度関数 $L(\Theta)$ は以下ようになる。ただし、 T は標本サイズを表す。

$$L(\Theta) = f(R_1, R_2, \dots, R_T | \Theta) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_t} f\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t}\right). \quad (2.23)$$

したがって、対数尤度関数 $\ln L(\Theta)$ は、

$$\ln L(\Theta) = - \sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t) + \sum_{t=1}^T \ln f\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t}\right) \quad (2.24)$$

となる。このとき、誤差項となる基準化された Student- t 分布に対する対数尤度関数 $\ln L_{(t)}$ は以下のようになる。

$$\ln L_{(t)} = T \left\{ \ln \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \ln \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln [\pi(\nu-2)] \right\} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \left[\ln(\sigma_i^2) + (1+\nu) \ln \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu-2} \right) \right]. \quad (2.25)$$

また、基準化された skewed-Student t 分布に対する対数尤度関数 $\ln L_{(skt)}$ は以下のようになる。

$$\ln L_{(skt)} = T \left\{ \ln \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \ln \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln [\pi(\nu-2)] + \ln \left(\frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \right) + \ln(s) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \left\{ \ln(\sigma_i^2) + (\nu+1) \ln \left[1 + \frac{(sz_i + m)^2}{\nu-2} \xi^{-2z_i} \right] \right\}. \quad (2.26)$$

FIEGARCH $(1, d, 0)$ モデルにおいて、(2.22) 式の基準化された Student- t 分布、基準化された skewed-Student t 分布に対する $E(|z_t|)_{(t)}$ 、 $E(|z_t|)_{(skt)}$ に関しては、各々、以下のようになる。

$$E(|z_t|)_{(t)} = \frac{2 \Gamma((1+\nu)/2) \sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu/2)}, \quad (2.27)$$

$$E(|z_t|)_{(skt)} = \frac{4\xi^2}{\xi+1/\xi} \frac{\Gamma((1+\nu)/2) \sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu/2)}. \quad (2.28)$$

本論文では、FIGARCH $(1, d, 0)$ モデルと FIGARCH $(1, d, 0)$ モデルのパラメータの推定に関しては、時系列分析ソフト G@RCH 7.0¹³⁾ を利用してモデルの推定を行なう。

2.3 本論文で使用するモデル

本論文では、誤差項の分布とボラティリティの変動性の分析について、2.1 で説明した Student- t

分布と skewed-Student t 分布を仮定し、FIGARCH $(1, d, 0)$ モデルと FIEGARCH $(1, d, 0)$ モデルを使用する。本論文で使用する 4 種類のモデルを纏めると以下のようになる。

1. FIGARCH $(1, d, 0)$ - t ... (2.3) – (2.5), (2.11), (2.21) 式.

2. FIGARCH $(1, d, 0)$ - skt ... (2.3) – (2.5), (2.12), (2.21) 式.

3. FIEGARCH $(1, d, 0)$ - t ... (2.3) – (2.5), (2.11), (2.22) 式.

4. FIEGARCH $(1, d, 0)$ - skt ... (2.3) – (2.5), (2.12), (2.22) 式.

“- t ”, “- skt ” は、誤差項が各々、Student- t 分布、skewed-Student t 分布に従うことを表す。

3 データと実証結果

3.1 データ

本研究では、データとして TOPIX、日経平均、JPX 日経インデックス 400 の日次データを使用し、日経 NEEDS-FinancialQuest からデータを取得した。標本期間は、2010 年 1 月 4 日から 2017 年 9 月 29 日までである（図 2 を参照）¹⁴⁾ 日次収益率 (%) は、TOPIX と JPX 日経インデックス 400 については (2.1) 式、日経平均については (2.2) 式を用いて計算を行なった（図 3 を参照）。標本期間は、2010 年 1 月 5 日から 2017 年 9 月 29 日まで、標本サイズは 1,900 である。データの基本統計量として、平均、標準偏差、歪度 (skewness)、尖度 (kurtosis)、最大値、最小値、正規性の検定統計量¹⁵⁾ が表 1 に纏められている。

TOPIX、日経平均、JPX 日経インデックス 400 の収益率の歪度について、全ての株価指数に関して負の値となっており、これらの株価指数収益率の分布は左に歪んだ分布に従っていると考えられる。また、TOPIX、日経平均、JPX 日経インデックス 400 の収益率の尖度について、全ての株価指数に関して 3 を超えていることから、また、正規性検定が有意なことから、これらの株価指数収益率の分布は正規分布よりも裾が厚いことがわか

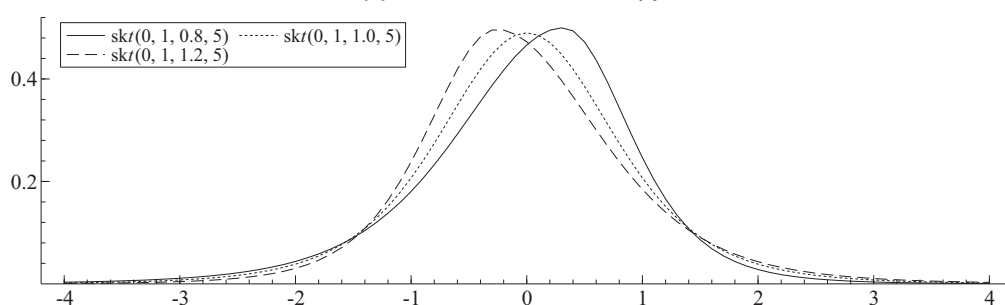
る。したがって、TOPIX、日経平均、JPX 日経インデックス 400 の収益率は、正規分布よりも裾が厚く、左に歪んだ分布に従っていることがわかる。各々の収益率のヒストグラム・密度関数は、図4に描かれている。ここでは、密度と正規近似が重ねて描かれている。例えば、TOPIX に関してみると、 $N(s=1.28)$ は、表1より正規近似が平均 0.032、分散が 1.28^2 の正規分布 $N(0.032, 1.28^2)$

に従うことを示している。

3.2 実証結果

本論文の実証結果は、FIGARCH $(1, d, 0)$ に関しては表2纏められ、FIEGARCH $(1, d, 0)$ に関しては表3に纏められている。実証結果を纏めると以下ようになる。

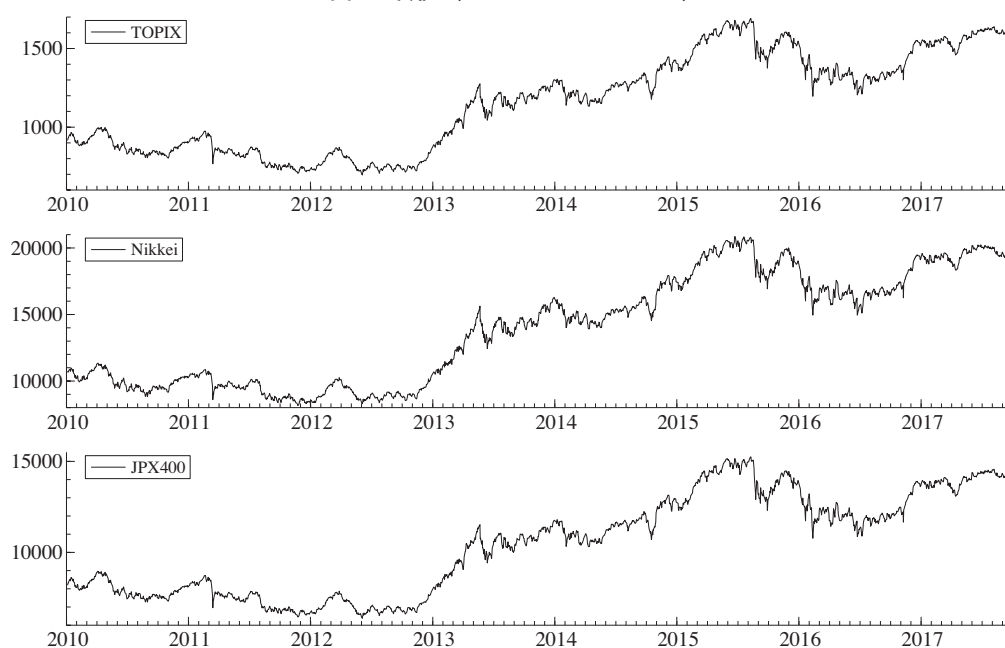
図1：skewed-Student t の例



(注) 細線は $\xi = 0.8$ 、点線は $\xi = 1$ 、波線は $\xi = 1.2$ のケースを表す。いずれも分散は 1 に基準化され、自由度は $\nu = 5$ である。

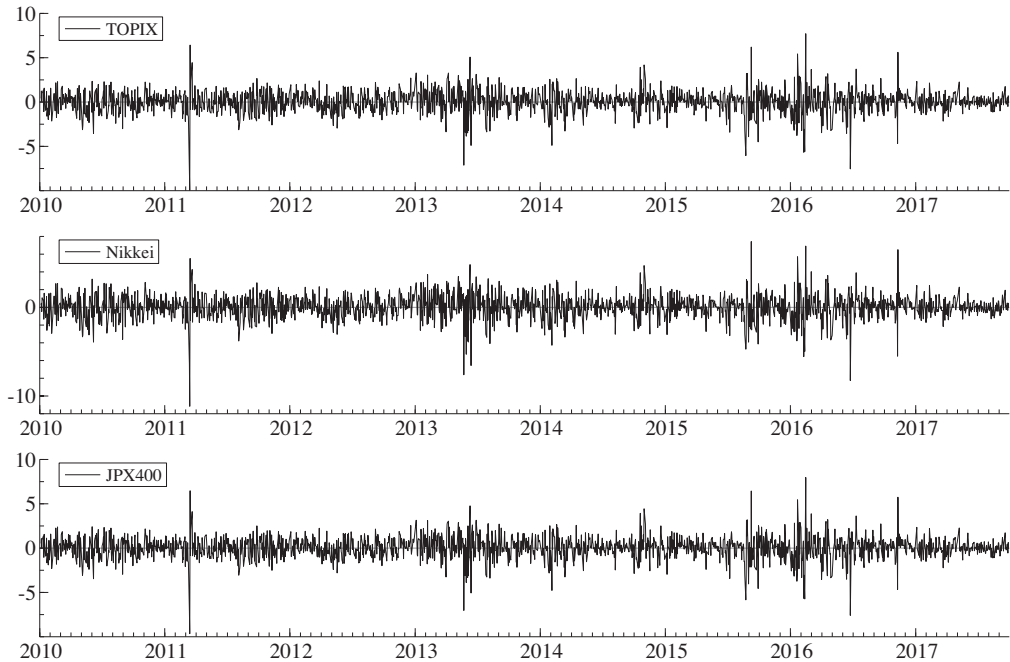
(出所) 里吉 (2018)

図2：終値 (2010/1/4–2017/9/29)



(出所) 筆者作成

図 3：収益率（2010/1/5–2017/9/29）



（出所）筆者作成

表 1 収益率 R_t (%) の基本統計量

2010 年 1 月 5 日 – 2017 年 9 月 29 日, 標本サイズ 1,900

	平均	標準偏差	歪度	尖度	最大値	最小値	正規性検定
TOPIX	0.032	1.283	– 0.531	8.935	7.715	– 9.952	809.0 ***
日経平均	0.034	1.377	– 0.541	8.367	7.426	– 11.15	687.5. ***
JPX400	0.031	1.272	– 0.467	8.882	7.975	– 9.649	837.4. ***

*** は有意水準 1% で有意であることを示す。

（出所）筆者作成

(1) TOPIX

(i) FIGARCH $(1, d, 0)$ モデル： μ に関しては, Student- t 分布, skewed-Student t に従う場合には統計的に有意な結果となった。 ω に関しては, 統計的に有意な結果とはならなかった。 長期記憶性を示す d の推定値は, 各々, 0.412, 0.400 であり, 統計的に有意な結果が得られた。 d の推定値が $0 < d < 0.5$ であるということは, TOPIX のボラティリティ σ^2 の過程は, 定常長期記憶過程に従っていることがわかる。 β_1 はボラティリティの持続性を表すパラメータであり, 0.282, 0.270 であ

り統計的に有意な推定値となっている。 自由度 ν に関して, t 分布, skewed-Student t の場合には, 推定値は各々, 7.200, 7.725 であり統計的に有意な結果となり $\nu > 4$ となっている。 これらの推定結果より, TOPIX の収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることがわかる。 また, 非対称パラメータ $\ln(\xi)$ の推定値は -0.095 で統計的に有意であり, TOPIX の収益率の分布は左に歪んでいることを示している。

(ii) FIEGARCH $(1, d, 0)$ モデル： μ に関しては, 誤差項が Student- t 分布に従う場合には有意であ

り, skewed-Student t に従う場合には統計的に有意な結果とはならなかった. ω に関しては, 統計的に有意な結果とはならなかった. 長期記憶性を示す d の推定値は, 0.475, 0.463 であり, 統計的に有意な結果が得られた. d の推定値が $0 < d < 0.5$ であるということは, FIGARCH (1, d , 0) モデルの場合と同様に TOPIX のボラティリティ σ^2 の過程は, 定常長期記憶過程に従っていることがわかる. β_1 は, 全ての分布に関して統計的に有意な推定値となっている. 非対称性を示すパラメータ θ に関しても, 統計的に有意な結果が得られている. 自由度 ν に関して, Student- t 分布, skewed-Student t の場合には推定値は各々, 8.012, 8.047 であり統計的に有意な結果となり $\nu > 4$ となっている. これらの結果より, ここでも TOPIX の収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることがわかる. また, 非対称パラメータ $\ln(\xi)$ の推定値は -0.004 で統計的に有意な結果とはならなかった. FIGARCH モデルとは異なる推定結果となった.

(2) 日経平均

(i) FIGARCH (1, d , 0) モデル: μ に関しては, Student- t 分布, skewed-Student t に従う場合には統計的に有意な結果となった. ω に関しては, 統計的に有意な結果とはならなかった. 長期記憶性を示す d の推定値は, 各々, 0.416, 0.408 であり, 統計的に有意な結果が得られた. このことから日経平均のボラティリティ σ^2 の過程は, 定常長期記憶過程に従っていることがわかる. β_1 は, 0.316, 0.305 であり統計的に有意な推定値となっている. 自由度 ν に関して, t 分布, skewed-Student t の場合には, 推定値は各々, 6.821, 7.265 であり統計的に有意な結果となっている. これらの推定結果より, 日経平均の収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることがわかる. また, 非対称パラメータ $\ln(\xi)$ の推定値は -0.080 で統計的に有意であり, 日経平均の収益率の分布は左に歪んでいる.

(ii) FIEGARCH (1, d , 0) モデル: μ , ω に関しては, 統計的に有意な結果とはならなかった. 長期記憶性を示す d の推定値は, 0.525, 0.520 であり, 統計的に有意な結果が得られた. ただし, d の推定値が $0.5 \leq d < 1$ であるということは, 日経平均のボラティリティ σ^2 の過程は, 非定常長期記憶過程に従っていることがわかる. β_1 , θ に関しても, 統計的に有意な結果が得られている. ν に関して, Student- t 分布, skewed-Student t の場合には推定値は各々, 7.136, 7.158 であり統計的に有意な結果となり日経平均の収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることがわかる. また, $\ln(\xi)$ の推定値は -0.005 であるが, 統計的に有意な結果とはならなかった. TOPIX と同様に FIGARCH モデルとは異なる推定結果となった.

(3) JPX 日経インデックス 400

(i) FIGARCH (1, d , 0) モデル: TOPIX, 日経平均と同様な推定結果が得られている. JPX 日経インデックス 400 のボラティリティの過程は, 定常長期記憶過程に従っている. また, JPX 日経インデックス 400 の収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っており, 収益率の分布は左に歪んでいる.

(ii) FIEGARCH (1, d , 0) モデル: μ , ω に関しては, 統計的に有意な結果とはならなかった. JPX 日経インデックス 400 のボラティリティの過程は, TOPIX と同様に定常長期記憶過程に従っている. また, TOPIX, 日経平均と同様に JPX 日経インデックス 400 収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っているが, 非対称分布に従っているとは言えない結果となった.

モデルの当てはまり具合については, FIGARCH モデルでは, 全ての株価指数において Student- t 分布の場合よりも skewed-Student t 分布の場合の方が対数尤度の値が高くなっている. したがって, 誤差項の分布は裾が厚いだけでは不十分であり, 分布の左右非対称性が重要であること

表 2 : FIGARCH (1, d , 0) モデルの推定結果

$$R_t = \mu + \epsilon_t, \epsilon_t = \sigma_t z_t, \sigma_t > 0, z_t \sim i. i. d., E[z_t] = 0, Var[z_t] = 1, \\ \sigma_t^2 = \omega [1 - \beta_1(L)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1 - L)^d \right\} \epsilon_t^2.$$

	TOPIX		日経平均		JPX400	
	t	skt	t	skt	t	skt
μ	0.092 * (4.051)	0.073 * (3.091)	0.086 * (3.519)	0.067 * (2.610)	0.086 * (3.843)	0.070 * (2.972)
ω	0.062 (1.608)	0.054 (1.442)	0.067 (1.596)	0.060 (1.457)	0.065 (1.718)	0.059 (1.583)
d	0.412 * (5.687)	0.400 * (5.783)	0.416 * (5.333)	0.408 * (5.729)	0.408 * (5.448)	0.400 * (5.520)
β_1	0.282 * (3.510)	0.270 * (3.476)	0.316 * (3.696)	0.305 * (3.748)	0.276 * (3.301)	0.264 * (3.261)
ν	7.197 * (5.977)	7.725 * (5.687)	6.821 * (6.459)	7.265 * (6.154)	7.045 * (6.099)	7.473 * (5.831)
$\ln(\xi)$	—	−0.095 * (−2.927)	—	−0.080 * (−2.668)	—	−0.082 * (−2.573)
$\ln L$	−2930.72	−2926.62	−3091.65	−3088.48	−2911.54	−2908.41
$Q(20)$	21.40	21.37	34.41	34.37	26.85	27.05
$Q^2(20)$	27.56	27.78	40.61	40.55	33.81	33.71

(i) * は有意水準 5% で有意であることを示す.

(ii) 括弧内の数値は t 値を表す.

(出所) 筆者作成

を示唆している. しかしながら, FIEGARCH モデルでは非対称パラメータ $\ln(\xi)$ の推定値は統計的に有意ではなく, そのため対数尤度の値もほとんど差が無い結果となっている.

次に, FIGARCH (1, d , 0) モデルと FIEGARCH (1, d , 0) モデルの定式化が正しいかどうかのモデルの診断を Ljung-Box の Q 統計量により行なう. 表 2・表 3 の $Q(20)$ と $Q^2(20)$ は, 各々, 20 次までの基準化した残差 ($\hat{\epsilon} \hat{\sigma}^{-1}$) とその 2 乗の Ljung-Box の Q 統計量を表している. ここでは, 漸近的に自由度 20 の χ^2 分布に従う. TOPIX, 日

経平均, JPX 日経インデックス 400 の全ての株価指数に対して, FIGARCH (1, d , 0) モデルと FIEGARCH (1, d , 0) モデルに関して統計的に有意な推定値が得られていない. 全ての $Q(20)$ と $Q^2(20)$ の値に対して, 帰無仮説は 10% 有意水準でも棄却することはできない. ここから, FIGARCH (1, d , 0) モデルと FIEGARCH (1, d , 0) モデルは, TOPIX, 日経平均, JPX 日経インデックス 400 のボラティリティの自己相関を捉えていることがわかる. また, 図 5 - 図 8 は, FIGARCH (1, d , 0)- t モデル, FIGARCH (1, d , 0)

表3：FIEGARCH (1, d, 0) モデルの推定結果

$$R_t = \mu + \epsilon_t, \epsilon_t = \sigma_t z_t, \sigma_t > 0, z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, Var[z_t] = 1,$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 - \beta_1(L)]^{-1} (1 - L)^{-d} g(z_{t-1}),$$

$$g(z_t - 1) = \theta z_t - 1 + \gamma [|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|].$$

	TOPIX		日経平均		JPX400	
	<i>t</i>	<i>skt</i>	<i>t</i>	<i>skt</i>	<i>t</i>	<i>skt</i>
μ	0.040 *	0.038	0.032	0.029	0.033	0.031
	(8.588)	(1.368)	(1.513)	(1.050)	(1.725)	(1.603)
ω	0.153	0.099	0.424	0.355	0.191	0.143
	(0.667)	(0.178)	(1.392)	(0.911)	(0.683)	(0.327)
d	0.475 *	0.463 **	0.525 *	0.520 *	0.498 *	0.490 *
	(3.579)	(1.882)	(5.247)	(4.602)	(3.867)	(2.796)
β_1	0.576 *	0.592 **	0.562 *	0.567 *	0.553 *	0.564 *
	(2.783)	(1.681)	(3.762)	(3.476)	(2.662)	(2.099)
θ	-0.153 *	-0.152 *	-0.139 *	-0.140 *	-0.151 *	-0.152 *
	(-4.799)	(-4.448)	(-4.607)	(-4.578)	(-4.736)	(-4.651)
γ	0.226 *	0.224 *	0.208 *	0.208 *	0.228 *	0.228 *
	(4.948)	(3.779)	(5.613)	(5.504)	(4.974)	(4.477)
ν	8.012 *	8.047 *	7.044 *	7.158 *	7.857 *	7.883 *
	(4.995)	(4.927)	(5.574)	(5.555)	(5.116)	(5.120)
$\ln(\xi)$	-	-0.004	-	-0.005	-	-0.003
	(-0.112)			(-0.227)		(-0.150)
$\ln L$	-2898.10	-2998.09	-3062.43	-3062.40	-2879.23	-2879.22
$Q(20)$	19.64	19.69	30.92	31.19	23.09	23.21
$Q^2(20)$	24.02	24.16	43.87	44.15	43.31	33.53

(i) *は有意水準 5%, **は有意水準 10% で有意であることを示す.

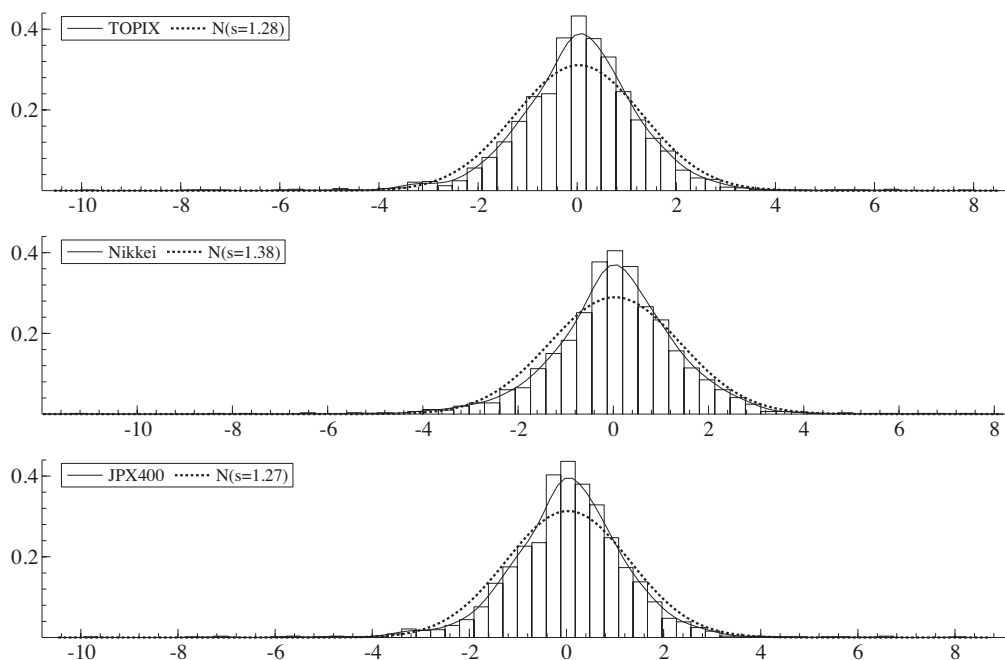
(ii) 括弧内の数値は *t* 値を表す.

(出所) 筆者作成

-*skt* モデル, FIEGARCH (1, *d*, 0)-*t* モデル, FIEGARCH (1, *d*, 0)-*skt* モデルにおける基準化された残差の分布を示している. 例えば, 図5の FIEGARCH (1, *d*, 0)-*t* の TOPIX に関してみると, *t* (0, 1, 7.197) は, 平均 0, 分散 1, 自由度 $\nu = 7.197$

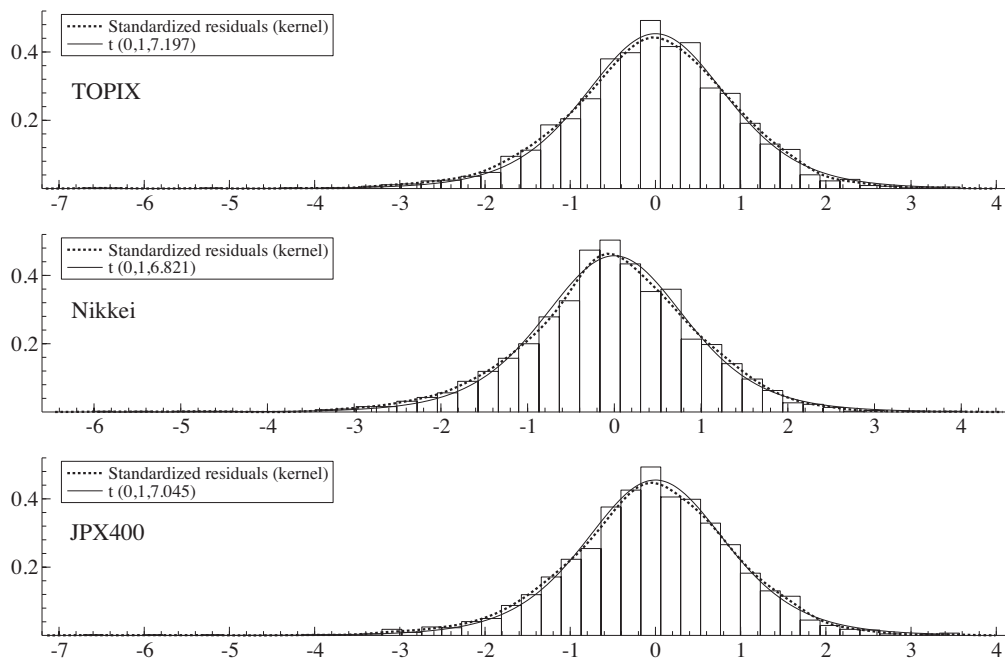
の基準化された Student-*t* 分布を表す. また, 図6の FIEGARCH (1, *d*, 0)-*skt* の TOPIX に関してみると, *skt*(0, 1, -0.095, 7.725) は, 平均 0, 分散 1, 非対称パラメータ $\xi = -0.095$, 自由度 $\nu = 7.725$ の基準化された skewed-Student *t* 分布を表す.

図 4：ヒストグラム・密度関数（2010/1/4-2017/9/29）



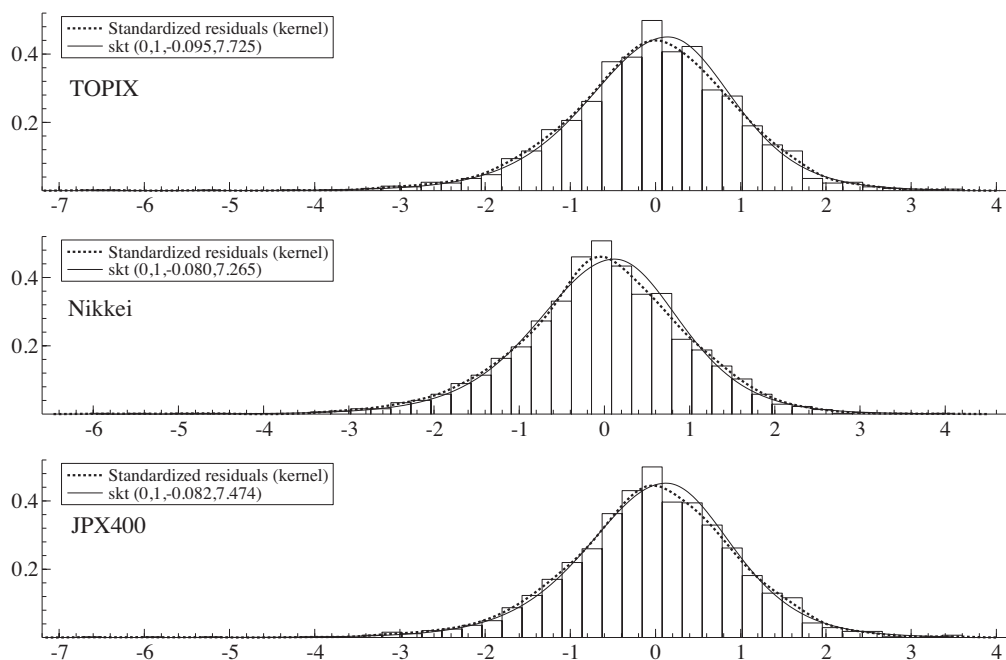
（出所）筆者作成

図 5：基準化された残差のヒストグラム・密度関数（FIGARCH (1, d , 0)- t ）



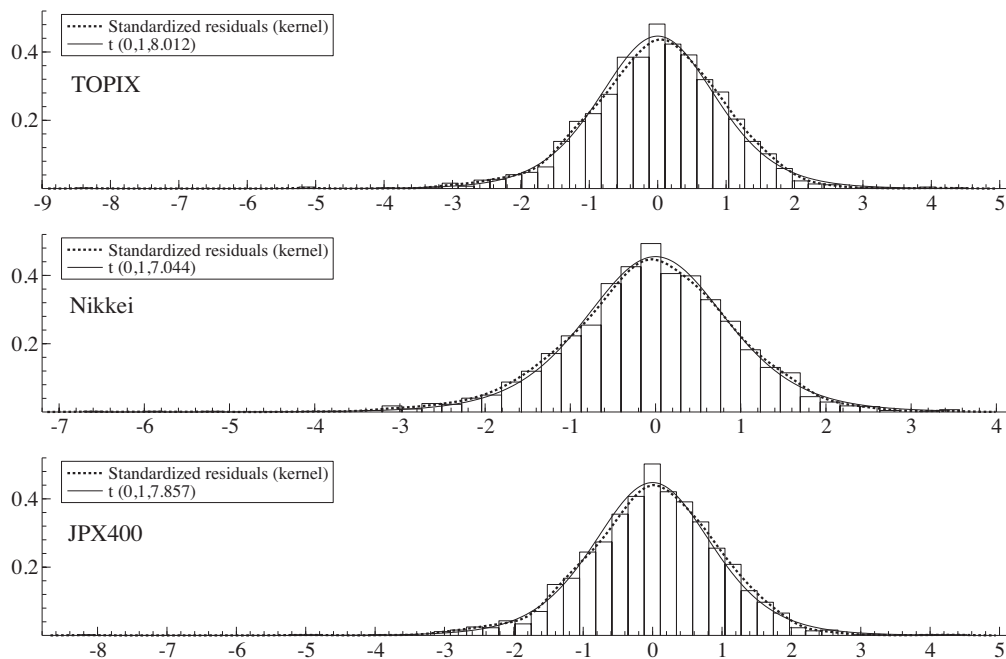
（出所）筆者作成

図6：基準化された残差のヒストグラム・密度関数 (FIGARCH (1, d, 0)-skt)



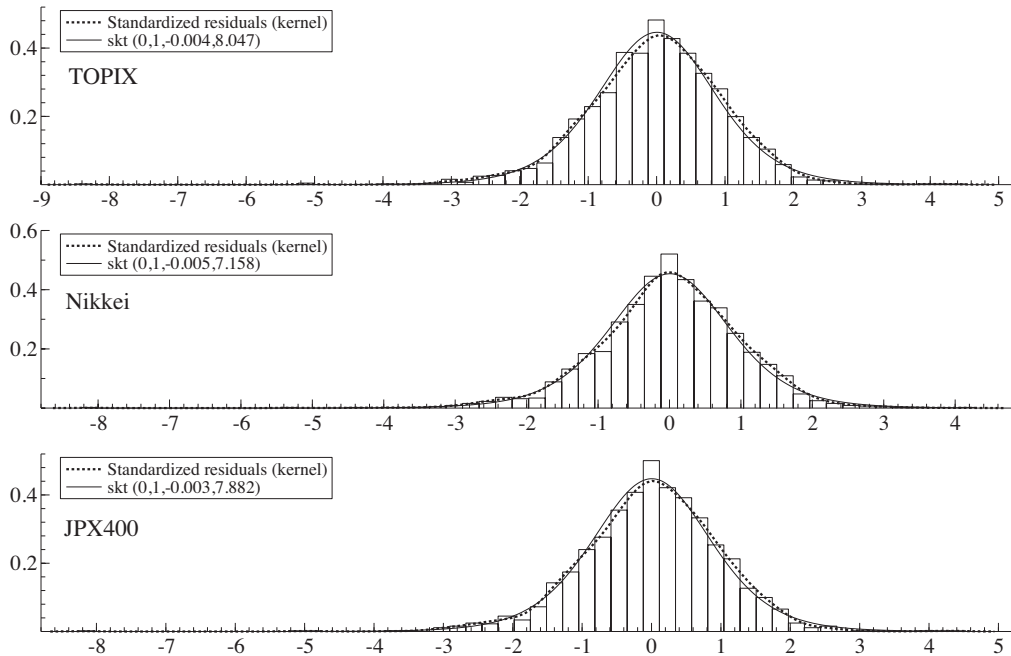
(出所) 筆者作成

図7：基準化された残差のヒストグラム・密度関数 (FIGARCH (1, d, 0)-t)



(出所) 筆者作成

図 8：基準化された残差のヒストグラム・密度関数 (FIEGARCH (1, d , 0)-skt)



(出所) 筆者作成

4 結論と今後の課題

本論文は、リスク資産価格収益率の非対称性分布に関して検証を行なうため TOPIX, 日経平均, JPX 日経インデックス 400 の日次データを用いて実証分析を行なった。また、これら株価指数のボラティリティの変動性に関して長期記憶性に焦点を当て実証的な分析を行なった。

FIGARCH モデルについては、誤差項の分布には Student- t 分布よりも skewed-Student t が適当であることが明らかとなり、分布の左右非対称性が重要であることがわかった。また、TOPIX, 日経平均, JPX 日経インデックス 400 のボラティリティは定常長期記憶過程に従っていることが明らかとなった。FIEGARCH モデルについては、誤差項の分布に非対称分布を用いることは必ずしも有効であるわけではないことが示された¹⁶⁾。また、TOPIX と JPX 日経インデックス 400 のボラティリティは定常長期記憶過程に従い、日経平

均のボラティリティは非定常長期記憶過程に従うことが明らかとなった。

今後の課題としては、skewed 正規分布¹⁷⁾, skewed 一般化誤差分布¹⁸⁾, 一般化双曲線非対称 t 分布¹⁹⁾ などその他の非対称分布を用いて分析を行ない、比較・検討することが考えられる。更に、里吉 (2018) のように Markov-Switching モデルを取り入れた定式化などが考えられる。また、ボラティリティの変動過程に関しても Stochastic Volatility モデルなど、ARCH 型モデル以外のモデルを使用した場合にどのような分析結果が得られるかについて検証する必要がある。更に、本論文で検証した株価指数は、TOPIX オプション, 日経 225 オプション, JPX 日経インデックスオプションの原資産となっているため、非対称分布とボラティリティの長期記憶性に関しては、三井 (2018) で提案しているようにオプション価格付け²⁰⁾への応用が期待される。

参考文献

- [1] 宇野淳・柴田舞 (2012), 「取引の高速化と流動性へのインパクト: 東証アローヘッドのケース」, MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』, No.31, pp.87-107.
- [2] 里吉清隆 (2018), 「EGARCH モデルによる TOPIX のブル・ベア局面の分析」, 日本大学経済学部経済科学研究所『紀要』, 第48号, pp.91-106.
- [3] 里吉清隆・三井秀俊 (2013), 「原資産の収益率に歪みがある場合のオプション評価—混合正規 EGARCH モデルによる分析—」, 『日本統計学会誌』, 第43巻, 第1号, pp.1-23.
- [4] 竹内(野木森)明香 (2012), 「個別株式ボラティリティの長期記憶性と非対称性の FIEGARCH モデルと EGARCH モデルによる実証分析」, 日本統計学会『日本統計学会誌』, 第42巻, 第1号, pp.1-23.
- [5] 竹内(野木森)明香・渡部敏明 (2008), 「日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性とオプション価格」, MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』, No.24, pp.45-74.
- [6] 中島上智・大森裕浩 (2011), 「一般化双曲型非対称 t 分布を用いた確率的ボラティリティ変動モデルの推定と株価収益率データへの応用」, 『日本統計学会誌』, 第40巻, 第2号, pp.61-88.
- [7] 増川純一・水野貴之・村井淨信・尹熙元 (2011), 『株価の経済物理学』, 培風館.
- [8] 松葉育雄 (2007), 『長期記憶過程の統計—自己相似な時系列の理論と方法—』, 共立出版
- [9] 三井秀俊 (2012), 「日本の商品先物市場におけるボラティリティの長期記憶性に関する分析」, 日本大学経済学部『経済集志』, 第82巻, 第2号, pp.33-55.
- [10] 三井秀俊 (2013), 「Fractionally Integrated ARCH 型モデルによる日経 225 先物価格の分析」, 日本大学経済学部産業経営研究所『産業経営研究』, 第35号, pp.23-33.
- [11] 三井秀俊 (2014), 『ARCH 型モデルによる金融資産分析』, 税務経理協会.
- [12] 三井秀俊 (2018), 「非対称分布によるボラティリティの長期記憶性に関するオプション評価法」, 日本大学経済学部経済科学研究所『紀要』, 第48号, pp.107-116.
- [13] 宮川公男 (2013), 『日経平均と「失われた 20 年」』, 東洋経済新報社.
- [14] 渡部敏明・佐々木浩二 (2005), 「日経 225 先物価格を用いた FIEGARCH モデルの推定」, 大阪証券取引所『先物・オプションレポート』, Vol.17, No.8, pp.1-4.
- [15] 渡部敏明・佐々木浩二 (2006), 「ARCH 型モデルと “Realized Volatility” によるボラティリティ予測とバリュエーション・アット・リスク」, 日本銀行金融研究所『金融研究』, 第25巻, 別冊第2号, pp.39-74.
- [16] Baillie, R. T., T. Bollerslev and H. O. Mikkelsen (1996), “Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 74, pp.3-30.
- [17] Bollerslev, T. (1986), “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31, pp.307-327.
- [18] Bollerslev, T. and H. O. Mikkelsen (1996), “Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility,” *Journal of Econometrics*, 73, pp.151-184.
- [19] Fernández, C. and M. F. J. Steel (1998), “On Bayesian modeling of Fat Tails and Skewness,” *Journal of the American Statistical Association*, 93, pp.359-371.
- [20] Giot, P. and S. Laurent (2003) “Value-at-Risk for Long and Short Trading Positions,” *Journal of Applied Econometrics*, Vol.18, No.6, pp.641-663.
- [21] Giot, P. and S. Laurent (2004) , “Modelling Daily Value-at-Risk Using Realized Volatility and ARCH Type Models,” *Journal of Empirical Finance*, 11, pp.379-398.
- [22] Jarque, C. M. and A. K. Bera (1987), “Test for

- Normality of Observations and Regression Residuals,” *International Statistical Review*, 55, pp.163–172.
- [23] Lambert, P. and S. Laurent (2001), “Modelling Financial Time Series Using GARCH-Type Models with a Skewed Student Distribution for the Innovation,” Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain Discussion Paper, 0125.
- [24] Laurent, S. (2013), *GARCH 7: Estimating and Forecasting ARCH Models*, Timberlake Consultants Press.
- [25] Michelfelder, R. A. (2005), “Volatility of Stock Returns: Emerging and Mature Markets,” *Managerial Finance*, 31, pp.66–86.
- [26] Nelson, D. B. (1991), “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach,” *Econometrica*, 59, pp.347–370.
- [27] Palma, W. (2007), *Long-Memory Time Series*, John Wiley & Sons.
- [28] Shephard, N. [ed.] (2005), *Stochastic Volatility: Selected Readings*, Oxford University Press.
- 5) Black-Scholes の公式では, 原資産収益率の分布は正規分布に従っていると仮定している.
- 6) アローヘッドは, 世界最高水準の高速性, 信頼性, 拡張性を持つ現物商品の売買システムである. 2015 年 9 月 24 日には, 注文件数の増加, 短時間での注文集中, 投資家の新しいニーズ等の株式市場の環境変化に対応するためリニューアルしている.
- 7) アローヘッド導入後の取引の高速化と流動性への影響に関して, 宇野・柴田 (2012) を参照.
- 8) TOPIX は 1968 年 1 月 4 日を起算日として基準値を 100 としている. また, JPX 日経インデックス 400 は 2013 年 8 月 30 日を起算日として基準値を 10,000 としている.
- 9) skewed-Student t 分布に関して詳しくは, Fernández and Steel (1998), Giot and Laurent (2003, 2004) を参照.
- 10) 自由度 ν の Student- t 分布の尖度 κ_t は,
- $$\kappa_t = \frac{3(\nu-2)}{\nu-4}$$
- $$= 3 + \frac{6}{\nu-4}, \quad \nu > 4$$
- となる. したがって, Student- t 分布の尖度は必ず 3 より大きくなる.
- 11) 長期記憶性に関して詳しくは, 松葉 (2007), Palma (2007), 増川・他 (2011) を参照.
- 12) 日本の株式現物・デリバティブ市場におけるボラティリティの長期記憶性の研究として, 渡部・佐々木 (2005, 2006), 竹内 (野木森)・渡部 (2008), 竹内 (野木森) (2012), 三井 (2013) がある. これらの研究では, FIEGARCH (1, d , 0) モデルにより実証分析を行なっている.
- 13) 詳しくは, Laurent (2013) を参照.
- 14) 本論文では, 図の作成は OxMetrics 7 (統計・時系列分析ソフト) により行なっている. 詳しくは, <https://www.timberlake.co.uk/software/oxmetrics.html>

注

* 本研究は, 平成 28 年度公益財団法人石井記念証券研究振興財団, および平成 29 年度日本大学経済学部在外研究員制度 (短期: 派遣期間 平成 29 年 8 月 7 日～平成 29 年 8 月 31 日) の助成を受けた. ここに記して感謝の意を表したい.

† 日本大学経済学部 教授, E-mail: mitsui.hidetoshi@nihon-u.ac.jp

- 1) ARCH 型モデルによるリスク資産価格の分析に関して詳しくは, 三井 (2014) を参照.
- 2) Stochastic Volatility モデルに関して詳しくは, Shephard [ed.] (2005) を参照. Stochastic Volatility モデルについて主要な論文を集めた論文集であり大変参考となる.
- 3) 日経平均の株価指数としての問題点として詳しくは, 宮川公男 (2013) を参照.
- 4) 日経 225 先物は, 大阪取引所の他, Chicago

を参照.

- 15) 本論文では, 収益率分布の正規性検定を行なう際に, 歪度と尖度を用いる Jarque and Bera (1987) の方法を利用した.
- 16) 里吉 (2018) では, skewed-Student t 分布を用いて Markov-Switching EGARCH モデルにより TOPIX の分析を行っており, 非対称分布の有用性を示す結果となっている.
- 17) 里吉 (2018) では, 正規分布, t 分布, skewed-

Student t 分布, skewed 正規分布により TOPIX の実証研究を行ない, 分布の有効性の比較を行なっている.

- 18) 詳しくは, Michelfelder (2005) を参照.
- 19) 中島・大森 (2011) では, 一般化双曲線非対称 t 分布により, 米国の株価指数 S&P 500 の実証研究を行なっている.
- 20) 三井 (2018) では, ボラティリティの長期記憶性と原資産収益率の分布の厚さと左右非対称性を考慮したオプションの評価法を提案している.