Institute of Business Research

Working Paper Series

IBR No.001

December 2002

ボラティリティ変動モデルによる オプション評価法の展開

三井　秀俊

College of Economics, Nihon University

ボラティリティ変動モデルによる
オプション評価法の展開

三井秀俊*

要約

本論文は, ボラティリティ変動モデルによるオプション価格付け理論について実証研究を主眼としてサーベイを行ったものである. オプションの原資産としては, 株式, 株式指数, 通貨とし, ヨーロピアン・オプションを対照とした. ヨーロピアン・オプションの価格付けに頻繁に用いられている Black / Scholes [1973] モデルは, 原資産価格のボラティリティが時間を通じて一定であると仮定している. しかしながら, これら原資産収益率のボラティリティは経験的な事実として時間を通じて確率的に変動していることが知られている. そこで代表的なボラティリティ変動モデルである SV (Stochastic Volatility) モデルと ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) 型モデル, 特に, GARCH (Generalized-ARCH) モデルとを用いたオプション価格付け理論について実証研究を中心にサーベイを行った.

*日本大学 経済学部 専任講師, E-mail: mitsui@eco.nihon-u.ac.jp.

1 はじめに

オプション価格付け理論では, Black / Scholes [1973]（以下, B-S モデル）がヨーロピアン・オプション[1] に対して理論的な解を与え, Merton [1973] が別の接近法で B-S モデルが数学的に正しいことを証明して以来, オプション価格付けに関する理論・実証研究は飛躍的に増加した．また, Merton [1973] が配当がある場合のオプションについて拡張すると, Garman / Kohlhagen [1983] により通貨オプション[2] にも適用できるように改良され, 外国為替オプション市場でも用いられるようになった．そのため, B-S モデルとその拡張モデルは株式, 株価指数, 通貨を原資産とするヨーロピアン・オプションに一般的に実務の世界でも利用されるようになった．研究者の間でもオプション価格の実証研究に際しては, B-S モデルとパフォーマンスを比較してモデルの評価を行うようになった[3].

ボラティリティ(Volatility) [4] はオプション価格付け理論において重要な役割を果たしており, オプション市場はボラティリティが取り引きされる市場であると特徴付けられる．B-S モデルのオプション価格付けの導出の際の主要な仮定は, 行使日までボラティリティが時間を通じて一定であることである．しかし, 過去の多くの実証研究によりボラティリティは経験的な事実として時間を通じて確率的に変動していることが知られている．したがって, ボラティリティが変動するモデルを定式化してオプション価格付けの分析を行う必要がある．

ボラティリティ変動モデルを用いてオプション価格付けを分析する場合には大きく 2 つに分けて研究が行われている．1 つは, SV（Stochastic Volatility) モデルを用いる方法である (SV モデルの理論と実証のサーベイ論文としては, Taylor [1994], Ghysels / Harvey / Renault [1996], Shephard [1996], 渡部 [2000, 第 3 章], Fouque / Papanicolaou / Sircar [2000], Mele / Fornari [2000], Jiang [2002] 参照)．連続時間の SV モデルは, オプション価格付けに有効な方法である．しかし, SV モデルはボラティリティを観測されない変数として扱っているため, 尤度を求めることが難しいなどの難点がある． したがって, オプション価格の評価に関する実証研究は非常に少なく, 多くの研究は数値実験に終始している． もう 1 つの方法は, Engle [1982] の ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) モデルとそれを一般化した Bollerslev [1986] の GARCH (Generalized-ARCH) モデルを用いることである (ARCH 型モデルの理論と実証の優れたサーベイ論文としては, Bollerslev / Chou / Kroner [1992], Higgins / Bera [1992], Bollerslev / Engle / Nelson [1994], Diebold / Lopez [1995], Palm [1996], Shephard, [1996], 渡部 [2000, 第 2 章], Franses / van Dijk [2000] 参照)．これら ARCH 型モデルはファイナンス時系列の非線型性をうまく捉え, オプションの実証研究に対しても有用である．これは, ARCH 型モデルが t 期のボラティリティを $t-1$ 期に既知の変数のみの確定的な関数として定式化し, モデルを拡張しても容

易に推定することができるためである．しかし, SV モデルと同様にオプション価格の評価に関する実証研究は僅かである．

本論文の以下の構成は次の通りである．第 2 節では, B-S モデルについて説明する．第 3 節では, 最初に, 連続時間 SV オプションと離散時間オプションとについてオプション価格評価の方法に関してサーベイを行う．特に連続時間 SV オプションでは, Hull / White [1987] と Heston [1993] のモデルについて説明する．次に, SV オプションの実証研究について纏める．また, SV モデルの推定量の比較についても概観する．第 4 節では, 伝統的な投資家のリスク中立性を仮定した ARCH 型オプションと Duan [1995] の局所リスク中立性による GARCH オプション価格付けについてサーベイを行い, 実証研究について纏める．また, Heston / Nandi [2000] の GARCH オプションの閉じた解を用いた実証研究について検討する．最後の第 5 節では, 簡単に今後の展望について述べる．

2 Black-Scholes モデル

B-S モデルでは, 原資産価格 S が対数正規に分布し, 以下の幾何ブラウン運動モデルで記述されるとする．

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz_1 \tag{2.1}$$

ここで, μ はドリフト項, dt は時間の微小変化, σ は標準偏差, dz_1 はウィナー過程を表す．ファイナンス理論では σ をボラティリティと呼び, 計量分析では σ^2 をボラティリティと呼ぶことが多い．本論文では, σ^2 をボラティリティと定義した．このとき, 時点 t での 権利行使価格 K のヨーロピアン・コール・オプション価格 C_t^{BS} とヨーロピアン・プット・オプション価格 P_t^{BS} は, 以下の B-S モデルで与えられる．

$$\begin{aligned}
C_t^{BS} &= S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), && (2.2)\\
P_t^{BS} &= -S_t N(-d_1) + K e^{-r(T-t)} N(-d_2) && (2.3)\\
d_1 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}$$

ここで, $N(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数, r は安全資産利子率 (連続複利), T は行使日である[5]．プット・オプション価格 P_t^{BS} は, プット・コール・パリティ (put-call parity) を用いて

$$P_t^{BS} = C_t^{BS} - S_t + e^{-(T-t)r} K \tag{2.4}$$

として導出することもできる．

変数 (S_t, K, T, r) の情報は金融市場から直接入手可能であるが, ボラティリティ σ^2 は何らかの方法で推定しなければならない. B-S モデルの主要な仮定は, (i) 取引費用, 税金, 配当は存在しない, (ii) オプションの証拠金は不要, (iii) 安全資産利子率 (金利) は一定, かつ既知, (iv) 安全資産の借入, 貸出は無制限, (v) 行使日まで, ボラティリティが一定であることである. これらの条件のなかで本論文では, (v) の「ボラティリティが一定」の仮定をはずした場合のオプション評価について考察する[6]. 実際, 過去の多くの実証研究によりボラティリティは変動していることが知られている. したがって, 以下の節ではこのボラティリティ σ^2 が変動する場合のオプション価格評価の方法について解説を行い, それらの実証研究について概観する. なお, B-S モデルを用いたオプションの実証研究の要約に関しては, 大村 [1988, pp158-177] を参照して頂きたい.

通常, オプションの計量分析ではボラティリティを大きく 2 つに分けている. 過去のデータを利用して推計されるボラティリティをヒストリカル・ボラティリティ (Historical Volatility) と呼び, B-S モデルやその類似のモデルを利用して逆算されたボラティリティをインプライド・ボラティリティ (Implied Volatility) と呼んでいる.

オプション評価の研究を行う場合には, 原資産価格 S と権利行使価格 K の乖離の程度 (マネネス) により数種類のカテゴリーに分類して分析を行う. コール・オプションでは, 原資産価格 S と権利行使価格 K とを比較して, $S/K = 1$ ならば at-the-money (ATM), $S/K > 1$ ならば in-the-money (ITM), $S/K < 1$ ならば out-of-the-money (OTM) と呼ぶ. 実際には, 厳密に ATM になる可能性はほとんどないため, ATM 付近のオプションを near-the-money (NTM) オプションと呼ぶこともある. また, 原資産価格 S と権利行使価格 K との乖離が非常に大きいときには, ITM では deep-in-the-money (DITM), あるいは, far-in-the-money (FITM) と呼び, OTM では deep-out-of-the-money (DOTM), あるいは, far-out-of-the-money (FOTM) と呼ぶ. プット・オプションでは, 各々 K/S となる. 以下ではこれらの略語で表記することにする.

3 SV モデルによるオプション価格付け

3.1 連続時間 SV オプション

ここでは, 連続時間 SV オプションについて解説を行う. 最初にボラティリティ σ^2 の過程が幾何ブラウン運動に従うモデルについて説明し, 次にボラティリティ σ^2 の過程が平均回帰性 (mean reversion) を持つモデルについて説明する.

Hull / White [1987] は, 原資産価格 S とボラティリティσ^2 との動きが無相関の場合のオプション価格に対して解析解 (analytic solution) を与えた. そこでは, ボラティリティσ^2 の変動を連続

時間過程として,

$$d\sigma^2 = \psi\sigma^2 dt + \delta\sigma^2 dz_2 \tag{3.1}$$

と定式化している．ここで, ウィナー過程 dz_2 は (2.1) 式の dz_1 と無相関 (原資産収益率とボラティリティとの間の相関 $\rho = 0$) であるとする．コール・オプション価格 C_t は, 原資産価格 S_t, ボラティリティ σ_t^2, 現在時点 t の関数で, $C(S_t, \sigma_t^2, t)$ と表現され, (2.1), (3.1) 式, Cox / Ingersoll / Ross [1985a] の資産均衡モデル[7] より偏微分方程式,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + + \frac{1}{2}\delta^2\sigma^4 \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^4} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \psi\sigma^2\frac{\partial C}{\partial \sigma^2} - rS + \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \tag{3.2}$$

が得られる．(3.2) 式のコール・オプション価格の解析解はリスク中立評価 (risk neutral valuation) を利用することにより導出する．リスク中立性の下ではリスク・プレミアムが存在しないため, オプションの収益率の期待値は安全資産利子率の期待値に等しくなる．したがってオプション価格 $C(S_t, \sigma_t^2, t)$ は 行使価格 K を省略すると以下のように評価される．

$$C(S_t, \sigma_t, t) = e^{-(T-t)r}\int C(S_T, \sigma_T^2, T)p(S_T|S_t, \sigma_t^2)dS_T \tag{3.3}$$

ここで, S_T は満期日 T の原資産価格, σ_T^2 は満期日のボラティリティ, $p(S_T|S_t, \sigma_t^2)$ は S_t, σ_t^2 を条件とする条件付分布関数を表す．現在時点 t から満期日 T までのボラティリティの平均を確率積分を用いて

$$V = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma_s^2 ds \tag{3.4}$$

と定義する．このとき (3.3) 式を簡単化のため S_t を省略して書き直すと

$$\begin{aligned} C(S_t, \sigma_t, t) &= e^{-(T-t)r}\int\int C(S_T)g(S_T|V)h(V|\sigma_t^2)dS_T dV & (3.5) \\ &= \int\left[e^{-(T-t)r}\int C(S_T)g(S_T|V)dS_T\right]h(V|\sigma_t^2)dV & (3.6) \end{aligned}$$

となる[8]．ここで, (3.6) 式の [·] は B-S モデルのコール・オプション価格となる．そこで B-S モデルを利用すると, リスク中立性の下でのコール・オプション価格 C_t^{HW} は (3.6) 式より以下のように求めることができる．

$$\begin{aligned} C_t^{HW} &= \int C(V)h(V|\sigma_t^2)dV & (3.7) \\ &= \hat{E}_V[C_t^{BS}(V)] & (3.8) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} C_t^{BS}(V) &= S_t N(d_5) - Ke^{-r(T-t)}N(d_6), & (3.9) \\ d_5 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r + V/2)(T-t)}{\sqrt{V(T-t)}} \\ d_6 &= d_5 - \sqrt{V(T-t)} \end{aligned}$$

でり, $\hat{E}_V$ はリスク中立的な世界 (risk neutral world) での V に関しての期待値を表す.

(3.7) 式はリスク中立的な世界でしか成立しないが, リスク許容な世界 (risky world) でのオプション価格も求めることができる. $\psi = 0$ のとき, 時点 t でのヨーロピアン・コール・オプション価格 $C_t^{BS}(V)$ に対してテイラー級数 (Taylor series) を利用することにより以下のような解を与えることができる.

$$\begin{aligned} C_t^{SV} &= C_t^{BS}(\bar{V}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_t^{BS}(\bar{V})}{\partial V^2}\bigg|_{\bar{V}} Var(V) + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_t^{BS}(\bar{V})}{\partial V^3}\bigg|_{\bar{V}} Skew(V) + \cdots \\ &= C_t^{BS} + \frac{1}{2}\frac{S_t\sqrt{T-t}N'(d_1)(d_1 d_2 - 1)}{4\sigma^3} \times \left[\frac{2\sigma^4(e^k - k - 1)}{k^2} - \sigma^4\right] \\ &\quad + \frac{1}{6}\frac{S_t\sqrt{T-t}N'(d_1)(d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 + d_2^2)}{8\sigma^5} \\ &\quad \times \sigma^6 \left[\frac{e^{3k} - (9+18K)e^k + (8 + 24k + 18k^2 + 6k^3)}{3k^2}\right] + \cdots \qquad (3.10) \end{aligned}$$

$$\bar{V} = E[V], \quad k = \delta^2(T-t)$$

ここで, $C_t^{BS}(\bar{V})$ は (3.9) 式で $V = \bar{V}$ としたときの B-S モデルの公式, $Var(\cdot)$ は分散, $Skew(\cdot)$ は歪度, $E[\cdot]$ は期待値を表す. 彼らは数値実験を行い, SV オプション価格は B-S モデルのオプション価格よりも NTM オプションで低めの価格を与えるという結果を得ている.

その後, オプション理論における SV モデルの研究の多くは, ボラティリティの変動を Ornstein-Uhlenbeck 過程のような平均回帰性を持つ以下のような連続時間確率過程によって定式化している.

$$d\sigma^2 = \kappa[\theta^* - \sigma^2]dt + \delta\sigma dz_2 \qquad (3.11)$$

ここで, θ^* は長期的な平均回帰, κ は長期的な平均回帰への調整速度を表す. ボラティリティは, 平均回帰の速度が κ によって決定される長期の平均 θ^* に向かって変動する. したがって, 平均ボラティリティ θ^* が上昇するとオプション価格も上昇する. dz_2 と dz_1 が無相関 $(\rho \neq 0)$ のモデルは, Stein / Stein [1991], Ball / Roma [1994] により, dz_2 と dz_1 が相関 ρ を持つモデルは Hull / White [1988b], Heston [1993] により用いられた.

上記のような平均回帰性を持つモデルの場合にも, Hull / White [1987] と同様に, (2.1), (3.11) 式, Cox / Ingersoll / Ross [1985a] の資産均衡モデルより偏微分方程式,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho\delta\sigma^2 S\frac{\partial^2 C}{\partial S \partial\sigma^2} + \frac{1}{2}\delta^2\sigma^2\frac{\partial^2 C}{\partial\sigma^4} + rS\frac{\partial C}{\partial S} \\ &\qquad + \{\kappa[\theta^* - \sigma^2] - \lambda\sigma^2\}\frac{\partial C}{\partial\sigma^2} - rS + \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \qquad (3.12) \end{aligned}$$

が得られる. ここで, $\lambda\sigma^2$ はボラティリティに関するリスク・プレミアムを表す. Hull / White [1988b] は, ボラティリティの変動によって生じるプライシング・バイアス (pricing bias) に対し

表 1: 連続時間 SV オプション

著者	ボラティリティ過程	相関係数 ρ^*	解法
Hull/White [1987]	$d\sigma^2 = \psi\sigma^2 dt + \delta\sigma^2 dz_2$	$\rho = 0$	Taylor series
Hull/White [1988b]	$d\sigma^2 = \kappa[\theta^* - \sigma^2]dt + \delta\sigma dz_2$	$\rho \neq 0$	Power series
Stein/Stein [1991]	$d\sigma = \kappa[\theta^* - \sigma]dt + \delta dz_2$	$\rho = 0$	Fourier inversion
Heston [1993]	$d\sigma^2 = \kappa[\theta^* - \sigma^2]dt + \delta\sigma dz_2$	$\rho \neq 0$	Fourier inversion
Ball/Roma [1994]	$d\sigma^2 = \kappa[\theta^* - \sigma^2]dt + \delta\sigma dz_2$	$\rho = 0$	Fourier inversion (MGF)

* 原資産収益率とボラティリティとの間の相関を表す.

て級数 (Power Series) を利用してオプション価格を導出している. Stein / Stein [1991], Ball / Roma [1994] はリスク中立性を仮定し, $\lambda = 0$ としてフーリエ解析を用いて解析解を求めた. 特に, Ball / Roma [1994] は 積率母関数 (MGF: moment generating function) を用いてより精度の高いフーリエ解析を行っている. これらの研究については, 表 1 に纏められている. また, これらの連続時間過程を用いたオプション評価モデルは実証研究に直接利用することは難しいので, ここでは詳しい解説を省略する.

3.2 連続時間 SV オプションの閉じた解

ここでは, 連続時間オプションに対して, 最初に閉じた解 (closed form solution) を与えた Heston [1993] に関して説明を行う. Heston [1993] は, 原資産価格とボラティリティが (2.1), (3.12) 式に従うとき, 適切な境界条件を与えて偏微分方程式 (3.12) 式を解き, コール・オプション価格の閉じた解を以下のように与えた.

$$C_t^{SV} = S\Phi_1 - K\Phi(t,T)\Phi_2 \tag{3.13}$$

ここで, $S\Phi_1$ は最適な権利行使による原資産の現在価値, $K\Phi(t,T)\Phi_2$ は権利行使価格支払いの現在価値, Φ_j $(j = 1, 2)$ は ITM オプションで権利行使される条件付確率を表す. $x = \ln[S]$ として, 特性関数 (characteristic function) [9] が

$$f_j(x, \sigma^2, T; \phi) = e^{C(T-t;\phi)+D(T-t;\phi)\sigma^2+i\phi x} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
C(T-t;\phi) &= r\phi i(T-t) + \frac{a}{\delta^2}\left\{(b_j - \rho\delta\phi i + d)(T-t) - 2\ln\left[\frac{1-ge^{d(T-t)}}{1-g}\right]\right\} \\
D(T-t;\phi) &= \frac{b_j - \rho\delta\phi i + d}{\delta^2}\left[\frac{1-e^{d(T-t)}}{1-ge^{d(T-t)}}\right] \\
g &= \frac{b_j - \rho\delta\phi i + d}{b_j - \rho\delta\phi i - d}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d &= \sqrt{(\rho\delta\phi i - b_j)^2 - \delta^2(2\mu_j\phi i - \phi^2)} \\
u_1 &= \frac{1}{2},\ u_2 = -\frac{1}{2},\ a = \kappa\theta^*,\ b_1 = \kappa + \lambda - \rho\delta,\ b_2 = \kappa + \lambda
\end{aligned}
$$

のように与えられる (詳しくは, Heston [1993] Appendix 参照) [10] と, 以下のように特性関数を反転させることにより, もともとの確率を得ることができる (フーリエの逆変換; fourier inversion).

$$
\Phi_j(x, \sigma^2, T; \ln[K]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{e^{-i\phi\ln[K]}f_j(x, \sigma^2, T; \phi)}{i\phi}\right]d\phi\ ,\quad j = 1, 2 \tag{3.15}
$$

ここで, $Re[\cdot]$ は複素数の整数部分 (real part) を表す. (3.13), (3.14), (3.15) の 3 つの方程式よりヨーロピアン・コール・オプションの解が得られる. Heston [1993] は, 所与のパラメータの下で以下のようなシミュレーション結果を得ている.

1. 相関 ρ は原資産収益率の歪度に影響を与える. $\rho > 0$ のとき, σ^2 の値が高いと原資産収益率の確率密度の右裾を広げるが, σ^2 の値が低いと原資産収益率の確率密度の左裾を広げることはない. $\rho < 0$ のときには $\rho > 0$ の場合と逆の結果になる.
2. $\rho > 0$ ($\rho < 0$) のとき B-S モデルと比較して, OTM のコール・オプション価格を上昇（低下）させ, ITM のコール・オプション価格を低下（上昇）させる.
3. σ^2 の変動は原資産収益率の尖度を上昇させる.
4. σ^2 の変動は FITM と FOTM のオプション価格を上昇させ NTM のオプション価格を低下させる. OTM に比べて ITM のオプション価格に影響をより与える.

以上の結果より原資産収益率とボラティリティ σ^2 との相関 ρ と, ボラティリティ σ^2 の変動がオプション価格の評価を行う際に重要な要因であることがわかる. しかし, Heston [1993] のモデルは連続型のためパラメータの推定を行うことはできず, 実証研究に直接利用することはできない[11]
.

3.3 連続時間 SV モデルの離散時間モデルでの近似

実証研究を行うためには, 連続時間モデル (2.1), (3.11) 式を離散時間モデルに変換しなくてはならない. 多くの実証研究では, ボラティリティの対数が以下のような自己回帰の線形確率過程に従うとしてモデル化されている. (2.1), (3.11) 式を離散時間モデルに変換すると

$$
\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} = \mu + u_t\sigma_t, \tag{3.16}
$$

$$
\ln\sigma_{t+1}^2 = \alpha + \beta\ln\sigma_t^2 + \eta_t, \tag{3.17}
$$

$$
\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}\right).
$$

となる．ここで, u_t, η_t は過去と独立で同一な ($i.i.d.$: independently and identically distributed) 標準正規分布に従い, u_t と η_t とは相関 ρ を持つと仮定する．しかし, ボラティリティの過程 (3.17) 式を用いて導かれる偏微分方程式は解析的に解くことができない．そこで, 代表的な投資家がリスク中立的な選好をもつものと仮定すると, リスク・プレミアムが存在しないため, オプションの収益率の期待値は安全資産利子率の期待値に等しくなる．このときのコール・オプション価格 C_t^{SV} は, オプションの期末の価値を安全資産利子率で現在価値に割り引いた値

$$C_t^{SV} = e^{-r(T-t)}\hat{E}\left[Max(S_T - K, 0)\right] \tag{3.18}$$

となる．多くの実証研究では, モンテカルロ・シミュレーションにより (3.18) 式の数値解を導出する．

例えば, 原資産価格とボラティリティが (3.16), (3.17) 式の過程に従うときには, 以下のように数値解を求めることができる．最初に, 無相関の標準正規分布に従う乱数 $\{u_s\}_{s=t}^{T}, \{w_s\}_{s=t}^{T}$ を発生させる．次にそれを使って $\{\eta_s\}_{s=t}^{T}$ を以下のように計算する．

$$\eta_s = \sigma_\eta(\rho u_s - w_s\sqrt{1-\rho^2}) \tag{3.19}$$

このようにして得られた分布は,

$$\begin{pmatrix} u_s \\ \eta_s \end{pmatrix} \sim i.i.d.N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}\right), s = t, \cdots, T \tag{3.20}$$

となる．そこで, ボラティリティの適当な初期値 σ_t^2 と原資産価格の適当な初期値 S_t を (3.16), (3.17) 式に逐次代入することにより満期日の原資産価格 S_T が得られる．これを十分大きな回数 N 回繰り返し, そこから $\{S_{T,i}\}_{i=1}^{N}$ を求める．それを使ってオプションの期末の価値を現在価値に割り引いた値の平均値

$$\hat{C}_t = e^{-r(T-t)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Max(S_{T,i} - K, 0)\right] \tag{3.21}$$

として計算することによりオプション価格が得られる．(3.21) で (3.18) の推定値を得ることができる根拠は, 大数の法則 (law of large numbers) により $N \to \infty$ とすると, (3.21) 式の右辺は, $E[e^{-r(T-t)}Max(S_T - K, 0)]$ に収束するためである．同様に (3.7) 式の Hull / White [1987] モデルも離散型モデル

$$\hat{C}_t^{HW} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_{t,i}^{BS}(V_i) \tag{3.22}$$

$$V_i = \frac{1}{T-t}\sum_{s=t+1}^{T}\sigma_{s,i}^2$$

のように変形してモンテカルロ・シミュレーションを用いて評価することができる.

オプション価格の導出にモンテカルロ・シミュレーションを最初に利用したのは Boyle [1977] である. そこでは, ボラティリティ一定の下での株式オプションに適用している. Johnson / Shanno [1987] が SV モデルのオプションに利用し, その後シミュレーションの精度を高めるために様々な手法が考案された. 例えば, 代表的な分散減少法である制御変数法 (Control Variates) を用いるとコール・オプション価格の推定値は,

$$\hat{C}_t^{CV} = C_t^{BS} + \left(\hat{C}_t^{SV} - \hat{C}_t^{BS}\right) \tag{3.23}$$

$\hat{C}_t^{CV}$ ：制御変数法によるコール・オプション価格の推定値,
C_t^{BS} ：B-S モデルの解析解によるコール・オプション価格,
$\hat{C}_t^{SV}$ ：SV オプションの数値解によるコール・オプション価格の推定値,
$\hat{C}_t^{BS}$ ：B-S モデルの数値解によるコール・オプション価格の推定値,

として求めることができる. Hull / White [1988a] は, この方法をラティス法 (Lattice Method) に適用しアメリカン・オプション価格の評価に用いることを提案している. この他にも負相関の方法 (Antithetic Variates), 層別サンプリング (Stratified Sampling), ラテン・ハイパーキューブ・サンプリング (Latin Hypercube Sampling), 加重サンプリング (Importance Sampling) などの様々な手法が提案されている (数値解法によるオプション評価に関して詳しくは, Barraquand [1995], Broadie / Glasserman [1996], Boyle / Broadie / Glasserman [1997], 森平/小島 [1997], 湯前/鈴木 [2000], Jäckel [2002], Tavella [2002] 参照).

3.4 SV オプションの実証研究

SV オプションを用いた実証研究としては, Wiggins [1987], Scott [1987], Chesney / Scott [1989], Melino / Turnbull [1990], 三井 [1998], Mahieu / Schotman [1998] がある. これらの SV オプションの実証研究については, 表 2 に纏められている.

Wiggins [1987] は, AT&T, Beatrice, Ford, IT&T, IBM, Mobil, Sears, Union Carbide の 8 社の個別株式と S&P500 index, CRSP (Center for Research in Security Prices at the University of Chicago) value-weighted index の原資産データを用いている. その中から典型的なパラメータの推定値である IT&T と S&P500 index を選んでオプションの実証研究を行っている. モデルのパラメータの推定は積率法 (MM: Method of Moments) で行い, 有限差分法によりオプション価格の数値解を導出している. SV オプションは B-S モデルと比較してほとんど変わらない結果を得ている. Scott [1987] は, Digital Equipment Corporation (DEC) の株価データを用いて MM でモ

デルの推定を行いモンテカルロ・シミュレーションによりオプション価格の数値解を導出している．SV オプションは B-S モデルと比較して優れているという結果を得ている．Chesney / Scott [1989] は, Hull / White [1987], Scott [1987], Wiggins [1987] の手法を米ドル/スイス・フランの通貨オプションに適用した．SV オプションは, ヒストリカル・ボラティリティを用いた B-S モデルよりは優れているが, インプライド・ボラティリティを用いた B-S モデルと比べると劣っている結果となっている．Melino / Turnbull [1990] は, カナダドル/米ドルの為替レート・データを用い, 一般化積率法（GMM: Generalized Method of Moments) でパラメータの推定を行っている．そこでは, オプション価格の予測に著しい改善がみられることを示している．三井 [1998] は, 日経 225 オプション市場で Harvey / Shephard [1996] らによって提案された u_t と η_t の相関係数 ρ も考慮した非対称離散時間型 SV モデルを用いて実証研究を行っている．(3.16), (3.17) 式を, $y_t \equiv \ln(R_t - \mu), h_t \equiv \ln(\sigma_t^2), \xi_t \equiv \ln(u_t^2)$ として線形の状態空間モデルに変形すると

$$y_t = h_t + \xi_t \tag{3.24}$$

$$h_{t+1} = \alpha + \beta h_t + s_t \zeta + \eta_t^* \tag{3.25}$$

$$\left.\begin{pmatrix} \xi_t \\ \eta_t^* \end{pmatrix}\right| s_t \sim i.i.d.\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 & \gamma s_t \\ \gamma s_t & \sigma_\eta^2 - \zeta^2 \end{bmatrix}\right), t = 1, \cdots, T$$

となる[12]．ここで, $\zeta = E_+[E\eta_t|u_t], \quad \gamma = E_+(\eta_t\xi_t) - E_+(\eta_t)E(\xi_t)$ である．s_t は R_t の符号を示す．すなわち, R_t が正（負）ならばの値は 1（-1）となる．これは, 変数の 2 乗からの情報の損失を補うためのものである．ここでは, 上記のモデルをカルマンフィルターを利用した疑似最尤法（QML: Quasi-Maximum Likelihood estimation) [13] を用いてパラメータの推定を行い, 制御変数法を用いてオプション価格の数値解を導出している．三井 [1998] は, 短期のオプションでは, SV オプションは B-S モデルより優れているわけではないとしている．Mahieu / Schotman [1998] は単純な SV モデルを用いて異なる 3 つの推定量の比較と, ATM オプションでの SV オプション価格と B-S モデルとの比較を行っている．Mahieu / Schotman [1998] については次節で説明を行う．

3.5 SV モデルの推定量の比較と SV オプション

Mahieu / Schotman [1998] は以下のような単純な SV モデルを用いて, (i) Harvey / Ruiz / Shephard [1994] の提案したカルマン・フィルターを利用した QML, (ii) Simulated Estimation and Maximization (SIEM) [14] , (iii) マルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC: Markov-chain Monte Carlo) を用いたベイズ推定法 (Bayes procedure), の 3 つの推定量の効率性の比較を行っている．

$$R_t^{\text{通貨}} = \psi \exp\left(\frac{h_t}{2}\right) u_t \tag{3.26}$$

$$h_t = \beta h_{t-1} + \eta_t \tag{3.27}$$

表 2: SV オプションの実証研究

著者	原資産	データ期間*		相関係数 ρ**	推定法
Wiggins [1987]	S&P500 index, IT&T	1962.7-1984.12	日次	$\rho \neq 0$	MM
Scott [1987]	DEC	1982.7-1983.6	日次	$\rho = 0$	MM
Chesney/Scott [1989]	米ドル/スイス・フラン	1984.1-1984.12	日次	$\rho \neq 0$	MM
Melino/Turnbull [1990]	カナダドル/米ドル	1983.2-1985.1	日次	$\rho \neq 0$	GMM
三井 [1998]	日経 225	1994.1-1995.6	日次	$\rho \neq 0$	QML
Mahieu/Schotman [1998]	4 種類の通貨***	1973.1-1994.2	週次	$\rho = 0$	SIEM, etc.****

* データ期間はオプション・データの期間を表す.
** 原資産収益率とボラティリティとの間の相関を表す.
*** 米ドル, 英ポンド, 円, ドイツ・マルク.
**** QML, Bayes.

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right).$$

ここで, $R_t^{通貨}$ は 2 国間の為替レートの収益率, $\psi^2 \exp(h_t) \equiv \sigma^2$ は収益率 $R_t^{通貨}$ の分散, ψ はスケール・パラメータ (scale parameter) を表し, u_t, η_t は過去と独立で同一な標準正規分布に従い, u_t と η_t とは無相関であると仮定する. (3.26) 式を $y_t \equiv \ln R_t^2$ として線形の形に書き直すと,

$$y_t = \beta + h_t + \xi_t, \quad \xi_t \sim i.i.d.N(-1.2704, \sigma_\xi^2) \tag{3.28}$$

ここで, $\beta = \ln \psi^2$, $\xi = \ln u_t^2$ とする. (i) $\sigma_\xi^2 = \pi^2/2$ とした場合の QML 推定量を ‘QML1’, σ_ξ^2 に制約をおかない場合の QML 推定量を ‘QML2’, とする. また ξ_t の分布 $f(\xi_t)$ が以下のような混合モデル (mixture model) で表されるとする.

$$f(\xi_t) = \sum_{i=1}^{3} p_i N(\mu_i, \sigma_{\xi,i}^2) \tag{3.29}$$

$$\xi_t = \xi(z_t), \quad z_t = 1, 2, \cdots, K, \quad \xi(i) \sim N(\mu_i, \sigma_{\xi,i}^2), \quad Pr(z_t = i) = p_i$$

(ii) $f(\xi_t)$ が所与のパラメータの下での混合分布 (fixed mixture) とした場合の Simulated Maximum Likelihood 推定量を ‘SIEM1’, $f(\xi_t)$ がフリー・パラメータの混合分布 (flexible mixture) とした場合の ML 推定量を ‘SIEM2’, (iii) $f(\xi_t)$ がフリー・パラメータの混合分布とした場合の Multi-move Gibbs Sampler を利用したベイズ推定量を ‘Bayesian’, とした 5 種類のモデルを 3 つの推定量を用いて実証研究を行っている[15].

ここでは原資産として米ドル, 英ポンド, 円, ドイツ・マルクの 4 つの通貨を用いている. また, 日次データを用いると週末の扱いと曜日効果 (seasonal day-of-the-week effects) の問題があるた

め週次データを用いて推定を行っている．ヨーロピアン通貨オプションのコール・オプション価格 $C_t^{(SV,\,\text{通貨})}$ は, 以下のように (3.7) 式の Hull / White [1987] モデルを応用して導出している．

$$C_t^{(SV,\,\text{通貨})} = e^{-r_d(T-t)}\hat{E}[BS(W)] \tag{3.30}$$

ここで, $BS(W)$ は以下のような B-S モデルである．

$$BS(W) = F_t N(d_7) - KN(d_8) \tag{3.31}$$

$$d_7 = \frac{\ln(F_t/K) + W^2/2}{W}, \quad d_8 = d_7 - W$$

$$W^2 = \sum_{s=t+1}^{T} \exp(h_s^2) \tag{3.32}$$

ここで, F_t は t 時点での先物価格を表す．彼らは異なるボラティリティの推定量と ATM オプションとを比較し, また, SV オプション価格と B-S モデルを比較している．ここでの研究結果を纏めると以下のようになる．

1. ボラティリティ系列の推定値は推定法に強く依存し, 推定誤差は非常に大きい．
2. データの当てはまりの良さは, SIEM 2 が最も良い．
3. オプション価格の推定値の結果は, ボラティリティの推定値の結果と類似している．例えば, 円/米ドル, 英ポンド/米ドルのボラティリティの変動は大きく, オプション価格に影響している．
4. 非米ドル為替レートでは, B-S モデルとの乖離が大きい．これはボラティリティ過程の低い持続性に起因している．

以上の結果よりボラティリティの変動がオプション価格の評価を行う際に重要な要因であることがわかる．また, ボラティリティの推定に際しては推定量の効率性に注意する必要がある．

　最近では, 金融計量経済学 (Financial Econometrics) の分野では, 最近, MCMC を用いたベイズ推定法を利用した実証研究が大幅に増加している．今後, オプションの実証研究でも頻繁に用いられると思われる．MCMC に関して詳しくは Gilks / Richardson / Spiegelhalter [1996], Bauwens / Lubrano / Richard [1999], Robert / Casella [1999], Chen / Shao / Ibrahim [2000], 渡部 [2000, 第 3 章], 大森 [2001], Chib [2001] を参照して頂き, また, ベイズ統計学の経済学・計量経済学への応用について詳しくは Bauwens / Lubrano [1995], 和合 [1998] を参照して頂きたい．

4 ARCH 型モデルによるオプション価格付け

4.1 ARCH 型オプションの実証研究

ARCH 型モデルのオプションの実証研究の例として, S&P500 index のインプライド・ボラティリティとオプション価格を研究するため Engle / Mustafa [1992] がある. 彼らのモデルは 離散時間の経済で S_t を時点 t での資産価格 (S&P500 株価指数) とし, ボラティリティ σ_t^2 の過程は, 過去の予測誤差の 2 乗と過去のボラティリティの線形の関数として定式化されている GARCH(1,1) モデルに従うとする[16].

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} = 1 + r + \epsilon_t \tag{4.1}$$
$$\epsilon_t | \Omega_{t-1} \sim i.i.d.N(0, \sigma_t^2)$$
$$\epsilon_t = \sigma_t z_t \ , \ z_t \sim i.i.d.N(0,1)$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \tag{4.2}$$

ここで, ϵ_t は, 平均 0, ボラティリティσ_t^2 であり, z_t は $i.i.d.$ の標準正規分布に従うとする. Ω_{t-1} は時点 $t-1$ を含む $t-1$ 時点までの利用可能な情報集合を表す. 投資家のリスク中立性を仮定すると, コール・オプション価格は, (3.18) 式と同様にして求めることができる. N 種類のオプション価格に対して, (3.18) 式で求められたオプション価格 $C_{t,i}^{理論価格}$ と市場価格 $C_{t,i}^{市場価格}$ との誤差 $\varepsilon_{t,i}$ を計算し 2 乗すると以下のような損失関数 (loss function) を得る.

$$Loss(\omega, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{t,i}^2 \tag{4.3}$$

ここでは, この損失関数を最小化 (GSMM: Generalized Simulation Minimization Method) することによりパラメータ ω, α, β の推定を行っている. Engle / Mustafa [1992] の結果は, GARCH の定式化は一般的に B-S モデルより優れているわけではなかった. しかし, 長期のオプションに対しては適切な価格付けを行っているという結果を得ている.

この他, ARCH 型オプションを用いた実証研究としては, 表 3 に纏めたように Noh / Engle / Kane [1994], Saez [1997], Sabbatini / Linton [1998], Bauwens / Lubrano [1998], 森保 [1999] がある. Noh / Engle / Kane [1994] は, GARCH (1,1) モデルを用いて S&P500 index の実証研究を行っている. 多くの株式市場では月曜日にボラティリティが他の曜日に比べて高くなる傾向がある[17] ため, 以下の定式化によりこの曜日効果を考慮しているという特徴がある.

$$R_t = \omega + aR_{t-1} + \epsilon_t \tag{4.4}$$
$$\frac{\sigma_t^2}{n_t^\delta} = \omega + \frac{\alpha\epsilon_{t-1}^2}{n_{t-1}^\delta} + \frac{\beta\sigma_{t-1}^2}{n_{t-1}^\delta} \tag{4.5}$$

ここで, R_t は収益率 $(S_t/S_{t-1}-1)$, n_t は $(t-1)$ 営業日と t 営業日との間の「休業日数+1」(t 営業日の何日前が $(t-1)$ 営業日となるかを示す), δ は t 営業日でのボラティリティのスピードを表す. 例えば, $t=$ 月曜日で前営業日が金曜日ならば, $n_t=3$ であり, ボラティリティは n_t^δ 倍増加する. 以上のモデルに関して最尤法 (ML: Maximum Likelihood method) を用いてパラメータの推定を行っている. オプション評価に際しては, 以下のような配当を考慮した B-S モデルによる (3.7) 式の Hull / White [1987] モデルを利用している.

$$\begin{aligned}
C_t^{GH} &= \hat{E}[S_t e^{-d_t(T-t)}N(d_9) - Ke^{-r(T-t)}N(d_{10})] && (4.6)\\
d_9 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r - d_t + V/2)(T-t)}{\sqrt{V(T-t)}} &&\\
d_{10} &= d_9 - \sqrt{V(T-t)} &&\\
V &= \frac{1}{T-t}\sum_{s=t+1}^{T}\sigma_s^2 && (4.7)
\end{aligned}$$

ここで, d_t は S&P500 index の配当利回り (dividend yield) を表す. 彼らは, V をインプライド・ボラティリティとしたときのオプション価格よりも GARCH オプションは優れているという結果を得ている.

Saez [1997] は, Spanish Stock index (IBEX-35) オプションに対して, GARCH, EGARCH, PNPGARCH, NGARCH, GJR, AGARCH, VGARCH の 7 種類の ARCH 型モデル[18] の比較を行いオプション価格評価に適用している. Noh / Engle / Kane [1994] と同様に曜日効果を捉えるために以下のような GARCH-S (seasonal GARCH) を用いている.

$$\sigma_t^2 = n_t^\delta\left[\omega + n_{t-1}^{-\delta}\left(\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^2\right)\right] \tag{4.8}$$

また, 収益率の過程にボラティリティを説明変数として組み込んで定式化した GARCH-M (in-mean) モデルを用いている. ここでは, 以上のモデルに関して BHHH (Brendt-Hall-Hall-Hausman) アルゴリズムを利用した ML 法を用いてパラメータの推定を行っている. オプション評価に際しては, これらのモデルの中から赤池の情報量基準 (AIC: Akaike's Information Criterion) の値が最も低い EGARCH(1,2)-M-S を用いることにより, (3.7) 式の Hull / White [1987] モデルと Amin / Ng [1993] の提案した

$$C_t^{AN} = E[S_t N(d_{11}) - Ke^{-r^*(T-t)}N(d_{12})], \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \frac{\ln[S_t/Ke^{-r^*(T-t)}] + (\bar{\sigma_t^2}/2)(T-t)}{\sqrt{\bar{\sigma_t^2}(T-t)}}\\
d_{12} &= d_{11} - \bar{\sigma_t^2}(T-t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{r} &= \frac{1}{T-t}\sum_{s=t}^{T-1} r_s && (4.10)\\
\bar{\sigma_t^2} &= \frac{1}{T-t}\sum_{s=t+1}^{T} \sigma_s^2 && (4.11)
\end{aligned}
$$

の数値解法を利用してオプション価格を求めている．これらの数値解は, NTM オプションでは高めの価格を与え (overpricing), その他のマネネスでは低めの値を与える (underpricing) としている．　また, Hull / White [1987] と Amin / Ng [1993] の方法はB-S モデルと比べて優れているが, Hull / White [1987] と Amin / Ng [1993] とを比べるとほとんど優劣の差はないという結果を得ている．Sabbatini / Linton [1998] は, Engle / Mustafa [1992] と類似した Simulation Minimization Method (SMM) の手法を用いて Swiss Market index (SMI) オプションに対して GARCH(1,1) を用いて実証研究を行い, B-S モデルと比較して GARCH オプションが優れているとの結果を得ている．

Bauwens / Lubrano [1998] は, MCMC の手法を利用したベイズ推定法を以下のような GJR (Glosten / Jagannathan / Runkle [1993]) 型の非対称 GARCH-Student モデルを用いてオプション価格付けに適用している．

$$
\begin{aligned}
\epsilon_t &= z_t\sigma_t, \quad z_t|\mathit{\Omega}_{t-1} \sim Student(0,1,\nu) && (4.12)\\
\sigma_t^2 &= \omega + \alpha^+\epsilon_{t-1}^{2+} + \alpha^-\epsilon_{t-1}^{2-} + \beta\sigma_{t-1}^2 && (4.13)\\
\epsilon_t^{2+} &= \epsilon_t^2\mathbf{1}_{\{\epsilon_t>0\}},\ \epsilon_t^{2-} = \epsilon_t^2\mathbf{1}_{\{\epsilon_t<0\}}
\end{aligned}
$$

ここで ν は自由度を表す．Bauwens / Lubrano [1998] は, Griddy Gibbs Sampler(GGS) [19] , Importance Sampling [20], Metropolis-Hastings (M-H) アルゴリズムの 3 種類の MCMC 法の比較を行い, GGS は収益率の系列の誤差項が Student t 分布に従うとき優れた方法であることを示している．$\theta = \{\omega, a, \nu, \omega, \alpha^+, \alpha^-, \beta\}$ とすると, GGS を用いて事後分布からサンプリングされる $\{\theta_1, \ldots, \theta_N\}$ で表記される N 個のパラメータ集合のサンプルを用いて, コール・オプション価格は, 割引現在価値を平均することにより以下のように評価することができる．

$$
C_t^{MCMC} = e^{-(T-t)r}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left[Max\left(S_T(\theta_j) - K\ ,\ 0\right)\right] \qquad (4.14)
$$

ここでは Brussels index で簡単な実証研究を行い, (4.14) 式で得られるオプション価格はB-S モデルと比較してほとんど変わらないという結果を得ている．

森保 [1999] は, 日経 225 オプション市場で GARCH モデルと GJR モデルを用いて実証分析を行っている．GARCH(1,1) モデルと GJR (1,1) を ML 法で推定を行い, モンテカルロ・シミュレーションを用いてオプション価格を導出している．そこでは, GARCH(1,1) モデル, GJR (1,1)

表 3: ARCH 型オプションの実証研究

著者	原資産	データ期間*		ボラティリティ過程	推定法
Engle/Mustafa [1992]	S&P500 index	1987.6-1987.10	日次	GARCH	GSMM
Noh/Engle/Kane [1994]	S&P500 index	1985.10-1992.2	日次	GARCH	ML
Saez [1997]	IBEX-35	1993.11-1994.5	日次	GARCH, etc.**	ML
Sabbatini/Linton [1998]	Swiss Market index	1992.8-1994.9	日次	GARCH	SMM
Bauwens/Lubrano [1998]	Brussels index	1996.1-1996.6	週次	GJR	ML, Bayes
森保 [1999]	日経 225	1992.9-1995.12	日次	GARCH, GJR	ML

* データ期間はオプション・データの期間を表す.
** EGARCH, PNPGARCH, NGARCH, GJR, AGARCH, VGARCH.

モデルのオプション価格とも B-S モデルのオプション価格よりも市場価格との乖離率が小さいことを示しており, 特に, プット・オプションと OTM オプションで顕著であるという結果を得ている. また, GARCH(1,1) モデルと GJR (1,1) モデルとのオプション価格を比較すると, GJR (1,1) モデルの方が市場価格との乖離率が若干小さくなることを示している.

4.2 局所リスク中立性による GARCH オプション価格付け

伝統的なリスク中立性を仮定したモデルに対して, Duan [1995] はリスク中立測度に GARCH モデルを変換することにより GARCH オプション価格付けの方法を発展させた[21].

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r + \lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \epsilon_t, \tag{4.15}$$

$$\epsilon_t | \Omega_{t-1} \sim i.i.d.N(0, \sigma_t^2)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t \ , \ z_t \sim i.i.d.N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 \tag{4.16}$$

ここで, ϵ_t は, 平均 0, ボラティリティσ_t^2 である. r は一定の 1 期間の安全資産利子率, λ は一定の単位リスク・プレミアムである. リスク中立性を仮定するならば, $\lambda = 0$ となる. GARCH オプション価格付けモデルでのリスク中立評価は, 資産収益過程の分散不均一性を調整するために一般化しなければならない. そこで, Duan [1995] は局所リスク中立性 (LRNVR: Locally Risk-Neutral Valuation Relationship) を利用した. LRNVR とは, リスク中立確率測度 Q が真の確率測度 P に関して相互に絶対連続 (absolutely continuous) であるとき, 以下の 3 つの条件を満足することをいう.

1. $S_t/S_{t-1}|\Omega_{t-1}$ が確率測度 Q の下で対数正規分布に従っている.
2. $E^Q\left(\left.\frac{S_t}{S_{t-1}}\right|\Omega_{t-1}\right) = e^r$.
3. 確率測度 P に関して $Var^Q\left(\left.\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right|\Omega_{t-1}\right) = Var^P\left(\left.\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right|\Omega_{t-1}\right)$ a.s. [22] .

ここで，$E^Q(\cdot)$ は確率測度 Q の下での期待値を表し, $Var^Q(\cdot)$, $Var^P(\cdot)$ は，それぞれ 確率測度 Q, P の下での分散を表す．LRNVR は代表的主体が期待効用最大化を行う者で, 効用関数が 時間分離可能 (time separable) で 加法的 (additive) であり, 以下の３つの条件のいずれか１つを満たすならば成立する.

1. 効用関数は相対的危険回避度一定であり, 対数正規の集計された消費の変化が確率測度 P の下で一定の平均と分散を持つ正規分布に従う.
2. 効用関数は絶対的危険回避度一定であり, 集計された消費の変化が確率測度 P の下で一定の平均と分散を持つ正規分布に従う.
3. 効用関数は線形である.

真の確率測度 P の下で (4.15), (4.16) 式が成り立つとき, LRNVR が成立していると, リスク中立確率測度 Q の下では,

$$\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t, \quad \xi_t \sim i.i.d.N(0,\sigma_t^2) \tag{4.17}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i(\xi_{t-i} - \lambda\sigma_{t-i})^2 \tag{4.18}$$

となる (証明は Duan [1995] Appendix 参照)．ここで, リスクは確率測度 Q の下で局所的に中立化されているが, 単位リスク・プレミアム λ はボラティリティの過程に影響を及ぼしている．このとき, 期末の資産価格 S_T は以下のように表される.

$$S_T = S_t\exp\left[(T-t)r - \frac{1}{2}\sum_{s=t+1}^{T}\sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^{T}\xi_s\right] \tag{4.19}$$

したがって, GARCH(1,1)-M の定式化の下では, 満期日 T, 行使価格 K のヨーロピアン・コール・オプションは,

$$C_t^{GH} = e^{-(T-t)r}E^Q[Max(S_T - K, 0)|\Omega_t] \tag{4.20}$$

として導出することができる．$E^Q[\cdot]$ は確率測度 Q の下での期待値を表す.

(4.20) 式のオプション価格は, SV モデルと同様にモンテカルロ・シミュレーションにより数値解を導出することができる．他の方法としては, Duan / Simonato [1998] は経験的マルチンゲール・シミュレーション (EMS: Empirical Martingale Simulation) を利用する方法を提案している.

EMS は以下のような方法で将来の原資産価格 $S_{t+1}, S_{t+2}, \cdots, S_T$ を生成するシミュレーション法である.

$$S^*_{t+j,i} = S_t \frac{Z_{t+j,i}}{Z_{t,i}}, \quad j = 1, \cdots, T-t \tag{4.21}$$

$$Z_{t+j,i} = S^*_{t+j-1,i} \frac{\hat{S}_{t+j,i}}{\hat{S}_{t+j-1,i}} \tag{4.22}$$

$$Z_{t,i} = e^{-r(t+j)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Z_{t+j,i} \tag{4.23}$$

ここで, $\hat{S}_{t+j,i}$ は第 i 番目の EMS 修正前の $t+j$ 時点の原資産価格であり, $\hat{S}_{t,i}$ と $S^*_{t,i}$ は S_t とする. 以下の方法で EMS 修正を行う.

Step1 : $t+j-1$ 時点 から $t+j$ 時点 の収益 $\hat{S}_{t+j,i}/\hat{S}_{t+j-1,i}$ を計算し, $t+j$ 時点での仮の原資産価格 $Z_{t+j,i}$ を計算する.

Step2 : $Z_{t+j,i}$ の標本平均の割引現在価値 $Z_{t,i}$ を計算する.

Step3 : (4.21) 式により $t+j$ 時点での EMS 原資産価格を計算する.

満期日の EMS 原資産価格 $S^*_{T,i}$ まで, 繰り返し Step1-Step3 の計算を行う. このときコール・オプション価格は

$$C_t^{EMS} = e^{-(T-t)r} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Max[S^*_{T,i} - K, 0] \tag{4.24}$$

として求めることができる. モンテカルロ実験では, EMS はモンテカルロ・シミュレーションや Barraquand [1995] のモーメント・マッチング・シミュレーション (MMS: Moment Matching Simulation) よりも, 特に ITM, ATM, 長期のオプションにおいて効率的であるという結果が得られている. また, Duan / Gauthier / Simonato [2001] は, リスク中立性の下でのボラティリティ一定モデルでは, 経験的マルチンゲール準モンテカルロ (EMQMC: Empirical Martingale Quasi-Monte Carlo) シミュレーションが EMS よりも効率的であるという結果を得ている.

4.3 局所リスク中立性による GARCH オプションの実証研究と発展

Duan [1995] の局所リスク中立性のモデルを用いた実証研究としては, 三井 [2000], Duan / Zhang [2001], Bauwens / Lubrano [2002], 三井 / 渡部 [2004] がある. これら局所リスク中立性による GARCH オプションの実証研究については, 表 4 に纏められている. 三井 [2000] は, 日経 225 オプション市場で GARCH (1,1) モデルを QML で推定を行い, 制御変数法を用いてオプション価格を導出している. そこでは, コール・オプションにおいて理論値と市場価格の乖離率はすべてのマネネスにおいて GARCH オプションの方が B-S モデルよりも小さくなり, プット・オプ

ションにおいても, DOTM を除いては, コールの場合と同様になるという結果を得ている.

Duan / Zhang [2001] は, 局所リスク中立性のモデルに対して Hang Seng index (HSI) オプション市場で以下のような NGARCH(1,1) モデルを用いて実証研究を行っている.

$$\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} = r - d_t + \lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \epsilon_t, \tag{4.25}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\sigma_{t-1}^2(z_{t-1}-\gamma)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \tag{4.26}$$

ここで, d_t はインデックス・ポートフォリオ (index portfolio) の配当利回り, γ はレバレッジ効果 (leverage effect) を捉えるパラメータを表す. リスク中立測度 Q の下で, (4.25), (4.26) 式は,

$$\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} = r - d_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \epsilon_t, \tag{4.27}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\sigma_{t-1}^2(z_{t-1}-\gamma-\lambda)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \tag{4.28}$$

となる. ここでは EMS でシミュレートされた GARCH オプション価格と市場価格との平均 2 乗誤差を最小化 (MMSE: Minimizing the Mean Squared Error) することによりパラメータの推定を行っている. Duan / Zhang [2001] は, GARCH オプションは B-S モデルと比べてパフォーマンスが優れているという結果を得ている.

Bauwens / Lubrano [2002] は, MCMC の手法を利用したベイズ推定法を GARCH, GJR モデルと以下のような STR (Smooth Transition GARCH) モデルを用いてオプション価格付けに適用している.

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2(1-f_t) + \alpha_2\epsilon_{t-1}^2 f_t + \beta_1\sigma_{t-1}^2 \tag{4.29}$$

$$f_t = 1 - \exp\left(-\gamma(\epsilon - c)^2\right) \tag{4.30}$$

ここで, c は非対称を捉える閾値 (threshold) を表し, γ は飽和 (saturation) を表す. ここでは, Brussels index を用いてオプションの実証研究を行っている. 推定量として, 古典的な統計手法である ML と GGS を用いたベイズ推定との比較を行っている. オプションの推定値は, OTM と ATM では若干差異があるが, ITM では STR モデルを除いて殆ど差異が無いという結果を得ている. また, ベイズ推定で得られるオプション価格は, B-S モデルと比較すると, 全体的にはほとんど変わらないという結果を得ている.

三井 / 渡部 [2004] は, MCMC の手法を用いたベイズ推定法を適用して GARCH, GJR, EGARCH モデルを用いて実証分析を行っいる. そこでは, Tierney [1994] により提案された Acceptance-Rejection / Metropolis-Hastings (A-R/M-H) アルゴリズム[23] を用いて (4.14) 式と同様にしてオプション価格を評価している. そこでは, オプション価格付けに関しては GJR モデルが GARCH, EGARCH モデルと比較して優れているという結果を得ている. また, 日経 225 オプション価格の

表 4: 局所リスク中立性による GARCH オプションを用いた実証研究

著者	原資産	データ期間*		ボラティリティ過程	推定法
三井 [2000]	日経 225	1995.1-1997.12	日次	GARCH	QML
Duan/Zhang [2001]	Hang Seng index	1997.1-1998.1	日次	NGARCH	MMSE
Bauwens/Lubrano [2002]	Brussels index	1996.1-1996.3	日次	GARCH, GJR, STR	ML, Bayes
三井/渡部 [2004]	日経 225	1995.1-1997.12	日次	GARCH, GJR, EGARCH	Bayes

* データ期間はオプション・データの期間を表す.

実証結果より, Duan [1995] のモデルで評価したオプション価格は, 伝統的なリスク中立性を仮定したモデルで評価された価格と大きな差異はないということを明らかにしている. しかし, Duan [1995] の収益率の過程 (4.15) 式は尺度構成不変 (scaling invariant) とはならない. したがって, 実証研究を行う際には収益率 $\ln(S_t/S_{t-1})$ を % にした場合としない場合では結果が異なることに注意する必要がある (詳しくは, 三井 [2001, 第 5 章] 参照).

Hafner / Herwartz [2001] は, Duan [1995] のモデルに対して, 収益率過程が AR(1) モデルの過程に従い, ボラティリティの変動が TGARCH (Threshold GARCH) [24] モデルに従うという以下のような AR(1)-TGARCH(1,1) モデルでの定式化を提案している.

$$
\begin{aligned}
R_t(=\frac{S_t}{S_{t-1}}-1) &= \mu_t-\lambda_t\sigma_t+aR_{t-1}+\sigma_t z_t, \quad z_t\sim i.i.d.N(0,1) && (4.31)\\
\sigma_t^2 &= \omega+\Big((\alpha+\alpha^- D_{t-1}^-)z_{t-1}^2+\beta\Big)\sigma_{t-1}^2 && (4.32)
\end{aligned}
$$

ここでは, z_{t-1} が負のときには 1, それ以外のときには 0 であるダミー変数 D^- を用いることにより, ボラティリティの非対称性を捉えるように定式化している. また, z_t が t 分布に従うときの LRNVR の拡張を行っている. 確率測度 P の下で z_t の分布が

$$
z_t \sim i.i.d.t_\nu(0,1) \qquad (4.33)
$$

に従うとする. ここで, $t_\nu(0,1)$ は自由度 ν の標準化された $Student-t$ 分布である. このとき z_t は以下のような標準正規確率変数に変換することができる.

$$
\Psi_\nu(z_t) = \Phi^{-1}[G_\nu(z_t)] \qquad (4.34)
$$

ここで, $G_\nu(\cdot)$ は分散を 1 に標準化した自由度 ν の $Student-t$ 分布である. 確率測度 Q の下では, z_t を t 分布としたときの (4.31) 式は,

$$
R_t = \mu_t-\lambda_t\sigma_t+aR_{t-1}+\sigma_t\Psi_\nu^{-1}(Z_t-\lambda_t), \quad Z_t\sim i.i.d.N(0,1) \qquad (4.35)
$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \left\{(\alpha + \alpha^- D_{t-1}^{*-})[\Psi_\nu^{-1}(Z_{t-1} - \lambda_{t-1})]^2 + \beta\right\}\sigma_{t-1}^2 \tag{4.36}$$

$$z_t = \Psi_\nu^{-1}(Z_t - \lambda_t) \tag{4.37}$$

となる．ここで, λ_t は

$$E^Q[\Psi_\nu^{-1}(Z_t - \lambda_t)|\Omega_{t-1}] = \frac{r - \mu_t}{\sigma_t} \tag{4.38}$$

に対する解である[25]．D_{t-1}^{*-} は $Z_{t-1} - \lambda_{t-1}$ が負のときには 1, それ以外のときには 0 であるダミー変数である．オプション価格の評価を行う際には, (3.7) 式の Hull / White [1987] モデルを利用している．数値実験では, TGARCH オプションは B-S モデルと比較して, OTM と ITM オプションで高めの価格を与え, ATM オプションでは低めの価格を与えるという結果を得ている．また, 収益率の過程が AR(1) の場合には, AR(0) と比較して FITM と FOTM オプションで高めの価格を与え, ATM オプションでは低めの価格を与えるという結果を得ている．しかしながら, オプション市場での実証研究は, ここでは行われていない．

また, Duan [1995] のモデルをアメリカン・オプションの価格付けに応用する研究も行われている．Ritchken / Trevor [1999] は NGARCH モデルを用いてラティス法を利用した数値実験を行っている．Duan / Simonato [2001] は, GARCH, GJR, EGACH モデルに対して Markov chain Approximation の方法を利用することを提案している．

4.4 GARCH オプションの閉じた解

Heston / Nandi [2000] は以下のような Engle / Ng [1993] の NGARCH と VGARCH に類似した以下のような離散時間 GARCH モデルに対して閉じた解を与えた．

$$\log(S_t) = \log(S_{t-\Delta}) + r^* + \lambda\sigma_t^2 + \sigma_t z_t \tag{4.39}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j\Delta}^2 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\left(z_{t-i\Delta} - \gamma_j\sigma_{t-i\Delta}\right)^2 \tag{4.40}$$

ここで, Δ は時間間隔 (time interval), r^* は時間間隔 Δ に対する連続時間安全資産利子率を表す．

Nelson / Foster [1994] に従うと (4.39), (4.40) 式での GARCH(1,1) モデルは連続時間ウィナー過程 (2.1), (3.11) 式に収束する (証明は Heston / Nandi [2000] Appendix B 参照)．そこで, 3.2 項での Heston [1993] の閉じた解を利用すると, ヨーロピアン・コール・オプションは以下のように評価できる．

$$\begin{aligned} C_t^{GH} &= e^{-r^*(T-t)}\hat{E}\left[Max(S_T - K, 0)\right] \\ &= \frac{1}{2}S_T + \frac{e^{-r^*(T-t)}}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{K^{-i\phi}f^*(i\phi+1)}{i\phi}\right]d\phi \end{aligned}$$

表 5: GARCH オプションの閉じた解を用いた実証研究

著者	原資産	データ期間*		ボラティリティ過程	推定法
Heston/Nandi [2000]	S&P500 index	1992-1994	日次	NGARCH, VGARCH の類似モデル	ML

* データ期間はオプション・データの期間を表す.

$$-Ke^{-r^*(T-t)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{K^{-i\phi}f^*(i\phi)}{i\phi}\right]d\phi\right) \tag{4.41}$$

ここで, $\hat{E}$ はリスク中立的な分布の下での期待値, $f^*(\phi)$ はリスク中立性の下での資産収益過程に対する積率母関数を表す (詳しくは, Heston / Nandi [2000] Appendix A 参照). 実証研究では GARCH (1,1) モデルを用い, パラメータの推定を行う際には ML 法を利用している (表 5 参照). S&P500 index オプションを用いた実証研究では, GARCH モデルは B-S モデルよりも優れており, 特に長期のオプションで顕著であるという結果を得ている. また, 離散時間 GARCH モデルの近似解としては, エッジワース級数展開 (Edgeworth series expansion) を利用した Duan / Gauthier / Simonato [1999] の研究があるが, そこでは実証研究は行っていない.

5 今後の展望

本論文は, 代表的なボラティリティ変動モデルである SV モデルと ARCH 型モデルとを用いたオプション価格付け理論について実証研究を主眼としてサーベイを行ったものである. オプション価格付け理論では, ボラティリティ変動モデルだけでなく, 確率金利モデル (SI: Stochastic Interest-rate) を用いた研究も盛んに行われている. SV オプションの発展としては, Baksi / Cao / Chen [1997] の研究[26] のような SV モデルと確率金利過程を合わせた SVSI (Stochastic Volatility and Stochastic Interest-rate) モデル, ジャンプ過程を組み込んで定式化した SVJ (Stochastic Volatility random Jump) モデル, これらのモデルを全て使用した SVSI-J (Stochastic Volatility and Stochastic Interest-rate random Jump) モデルを実証研究に用いることである. こうしたモデルを用いた実証研究が今後多数行われることが望まれる.

ARCH 型オプションではモデルの拡張が容易なため様々なモデルが考案されており, どのモデルがオプション価格評価に適しているかといった研究が望まれる. Duan [1995] の局所リスク中立性のモデルを基にした研究に関しては, 収益率の過程でのリスク・プレミアム項 $\lambda\sigma_t$ について他の異なる形で定式化を行うことや Hafner / Herwartz [2001] のように撹乱項 z_t の t 分布への拡張を用いた実証研究などが考えられる.

全般的には, 通常 SV / ARCH 型モデルを推定する際には, ML, QML, MM, GMM, MCMC などの推定法が用いられるが, これら推定法の効率性の比較[27] を行なうことも必要である. また, SV オプションと ARCH 型 オプションは別々に研究されることが多いが, どちらのモデルがより現実的にオプション価格評価に優れているかといった研究が今後望まれる.

注

[1]満期日 (権利消滅日) にのみ権利行使可能なオプションをヨーロピアン・オプション (European option) と呼び, 満期日以前にいつでも権利行使可能なオプションをアメリカン・オプション (American option) と呼ぶ.

[2]通貨オプションに関して基礎から応用まで網羅している解説書として, DeRosa [2000] が挙げられる.

[3]オプション理論を含めたデリバティブの価格付け理論の入門書としては Wilmott [1998], Hull [2000], オプション価格付け理論に焦点を絞った入門書としては Wilmott / Dewynne / Howison [1993], Wilmott / Howison / Dewynne [1995], ファイナンスの実証研究で用いられる計量分析の手法については Hamilton [1994], Campbell / Lo / Mackinlay [1997], Mills [1999], Gourieroux / Jasiak [2001], Tsay [2002] 参照. また, ファイナンス理論で頻繁に使用される解析論, 確率論, 測度論などの基礎概念については Lamberton / Lapeyre [1996], Pliska [1997], Neftci [2000] を参照.

[4]ボラティリティは資産収益率の分散あるいは標準偏差により定義され, ファイナンス理論では危険資産 (株式など将来の収益が不確定な資産) のリスクの指標として用いられる.

[5]B-S モデルを利用した場合の通貨オプション価格は以下のように評価することができる.

$$
\begin{aligned}
C_t^{(BS,\ \text{通貨})} &= S_t e^{-r_f(T-t)} N(d_3) - K e^{-r_d(T-t)} N(d_4) \\
P_t^{(BS,\ \text{通貨})} &= -S_t e^{-r_f(T-t)} N(-d_3) + K e^{-r_d(T-t)} N(-d_4) \\
d_3 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r_d - r_f + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
d_4 &= d_3 - \sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}
$$

ここで, r_d は国内の安全資産利子率, r_f は相手国の安全資産利子率を表す. 詳しくは, Garman / Kohlhagen [1983] 参照.

[6]現実には金利も変動している. 代表的な確率金利モデルとしては, Vasicek [1977], Brennan / Schwartz [1980], Cox / Ingersoll / Ross [1985b], Heath / Jarrow / Morton [1992] 参照. Kim [2002] は, 日経 225 オプション価格にこれら確率金利モデルを用いて実証研究を行っている. 確率金利モデルに関して詳しくは, 木島 [1999] 参照. また, その他の問題を扱った研究として岩田 [1997] 参照.

[7]$C(Y,t)$ は結果的に偏微分方程式,

$$
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} C_{Y_iY_j}(CovY_i, Y_j) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} C_{Y_i}(\mu_i - \lambda_i) + C_t - rC = 0,
$$

$C_{Y_iY_j} = \partial^2 C/\partial Y_i \partial Y_j, C_{Y_i} = \partial C/\partial Y_i, C_t = \partial C/\partial t$, Y は状態変数のベクトル, μ_i は Y_i の瞬間的な平均, λ_i は状態変数のリスク・プレミアム, と表現される. 詳しくは, Cox / Ingersoll / Ross [1985a] 参照.

[8]X, Y, Z を確率変数とするとき条件付密度関数は以下の関係式を満たす.

$$
p(X|Y) = \int g(X|Z)h(Z|Y)dZ
$$

これを用いると

$$
P(S_T|\sigma_t^2) = \int g(S_T|V)h(V|\sigma_t^2)dV
$$

となる.

[9] ユークリッド空間上の確率測度のフーリエ変換 (fourier transform) のこと. したがって, 対応する確率測度に関する情報は全て持っている. このことから, 確率変数の独立性の検証や確率の評価をすることができる.

[10] $\Phi_j(x, \sigma^2, T; \ln[K])$ を特性関数 $f_j(x, \sigma^2, T; \phi)$ への変換（フーリエ変換）は

$$
f_j(x, \sigma^2, T; \phi) = \int e^{i\phi x}\Phi_j(x, \sigma^2, T; \ln[K])dx
$$

で表すことができる. 初期条件は

$$
f_j(x, \sigma^2, T; \phi) = e^{i\phi x}
$$

に変換される. また, $f_j(x, \sigma^2, T; \phi)$ は $\Phi_j(x, \sigma^2, T; \ln[K])$ と同じ拡散方程式を満たす.

[11] このようなフーリエの逆変換を利用した研究としては Bates [1996], Scott [1997], Baksi / Cao / Chen [1997] がある.

[12] u_t と η_t の分布が $Corr(u_t, \eta_t) = \rho$ の 2 変量正規分布に従うと仮定し, 無相関の 2 つの方程式として攪乱項を対応させせると, 結局, (3.24), (3.24) 式の線形状態空間モデルは,

$$
\begin{aligned}
y_t &= M + y_t + \xi_t \\
h_{t+1} &= \alpha + (\beta - 0.2242\rho\sigma_\eta s_t)h_t + \rho\sigma_\eta s_t(0.7979 + 0.2242y_t) + \eta_t^+
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{c} \xi_t \\ \eta_t^+ \end{array}\right)\Bigg| s_t \sim i.i.d.N\left(\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} V & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2(1-0.8846\rho^2) \end{array}\right]\right), t = 1, \cdots, T
$$

と特定化される．ここで, $M = -1.2704$, $V = \pi^2/2$ とする．

[13] カルマンフィルターを利用した QML に関して詳しくは, Hamilton [1994, Chapter13], 渡部 [2000, 第 3 章]

[14] 詳しくは, Tanner [1996], Shephard [1996, Section1.3], Kim / Shephard / Chib [1998], Mahieu / Schotman [1998] の Appendix 参照.

[15] ここでは, 対数ボラティリティの推定結果を実際のボラティリティ$\sigma_t^2 = \exp(h_t/2)$ に変換するため以下の 2 つの方法を用いている．Kalman smoother に対してボラティリティの推定値は対数正規分布の特性を用いて以下のように計算することができる.

$$\hat{\sigma^2}_{t|T} = \tilde{\psi} \exp\left(\hat{h}_{t|T} + \frac{1}{2}P_{t|T}\right)$$

ここで, $\tilde{\psi}$ は $\tilde{\psi}^2 E[e^{h_t}]$ が収益率の無条件標本分散に等しくなるように選択する．$\hat{h}_{t|T}$ と $P_{t|T}$ は, それぞれすべての標本が与えられたときの条件付平均と条件付分散を表す．また, Simulation smoother に対してボラティリティの推定値は以下のように計算することができる.

$$\hat{\sigma^2}_{t|T} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\hat{\sigma}_{t|T}^{2(j)}$$

ここで, $\hat{\sigma}_{t|T}^{2(j)}$ は mixture indicator を条件とする Kalman smoother である.

[16] 一般的には, ボラティリティσ_t^2 は GARCH (p,q) モデルとして以下のように表される.

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^2$$

ここで, $p \geq 0,\ q \geq 0,\ \alpha_i \geq 0\ (i = 1,\cdots,q),\ \beta_j \geq 0\ (j = 1,\cdots,p),\ \sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{j=1}^{p}\beta_j < 1$ である．GARCH (p,q) モデルの次数選択は, AIC (Akaike's Information Criterion) や SIC (Schwart's Information Criterion) の情報量基準に基づいて選択すればよい.

[17] 詳しくは, French / Roll [1986], Nelson [1991] 参照.

[18] (i) GARCH モデル:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^2$$

(ii) EGARCH モデル (Exponential GARCH):

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{j=1}^{p}\beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\left[\gamma z_{t-i} + \zeta\left(|z_{t-i}| - E(|z_{t-i}|)\right)\right]$$

(iii) PNPGARCH (Partial Non-Parametric GARCH) モデル:

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \sum_{i=0}^{4}\alpha_{\{1,i\}}P_{it-1}(\epsilon_{t-1} - i\sigma^*) + \sum_{i=0}^{4}\alpha_{\{2,i\}}N_{it-1}(\epsilon_{t-1} + i\sigma^*)$$

$$P_{it} = \begin{cases} 1 & \epsilon_t > i\sigma^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},\quad N_{it} = \begin{cases} 1 & \epsilon_t < -i\sigma^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

P_{it} は $\epsilon_t > i\sigma^*$ のときには 1, それ以外のときには 0, N_{it} は $\epsilon_t < -i\sigma^*$ のときには 1, それ以外のときには 0 であるダミー変数である．σ^* は無条件の標準偏差を表す.

(iv) NGARCH(Nonlinear Asymmetric GARCH) モデル:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\left(\epsilon_{t-i} + \gamma\sigma_{t-i}\right)^2$$

(v) GJR(Glosten / Jagannathan / Runkle [1993]) モデル:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q}\left(\alpha_i\epsilon_{t-i}^2 + \gamma_i D_{t-i}^-\epsilon_{t-i}^2\right)$$

$$D_{t-1}^- = \begin{cases} 1 & \epsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

D_{t-i}^- は ϵ_{t-i} が負のときには 1, それ以外のときには 0 であるダミー変数である.

(vi) AGARCH(Asymmetric GARCH) モデル:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\left(\epsilon_{t-i} + \gamma\right)^2$$

(vii) VGARCH モデル:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \left(\epsilon_{t-i}/\sigma_{t-i} + \gamma\right)^2$$

ここで, $\omega, \alpha_i, \alpha_{\{1,i\}}, \alpha_{\{2,i\}}, \beta_i, \gamma_i, \zeta$ は定数パラメータとする.

[19] GGS は, 以下のアルゴリズムにより与えられる.

1. $f(\theta_j|\theta_1, \cdots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \cdots, \theta_p, data)$ の値を n 個の点 $\theta_{j1}, \cdots, \theta_{jn}$ で計算を行い, その値を $w_1, \cdots, w_n$ とする.
2. $w_1, \cdots, w_n$ を用いて, $f(\theta_j|\theta_1, \cdots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \cdots, \theta_p, data)$ の分布関数の近似を計算する.
3. 区間 $[0, 1]$ の一様分布から一様乱数を発生させ, 2. で得られた分布関数の近似を用いてサンプリングを行う.

条件付分布からサンプリングを行うことが困難な場合には, n 個の適当な格子点を利用し分布関数を他の関数で近似すれば良い. 詳しくは, Tanner [1996, Section 6.4], Bauwens / Lubrano [1998, Appendix], Bauwens / Lubrano / Richard [1999, Section 3.4] 参照.

[20] Importance Sampling に関して詳しくは, Tanner [1996, Chapter 3], Robert / Casella [1999, Section 3.3] 参照.

[21] これに対して, Kallen / Taqqu [1998] は連続時間 GARCH オプション価格付けモデルについて説明している. しかし, Duan [1995] と Kallen / Taqq [1998] のヘッジングの公式は異なっている. 詳しくは, Garcia / Renault [1998] 参照.

[22]「ほとんど確実に」(almost surely) を表す.

[23] 詳しくは, Tierney [1994], Chib / Greenberg [1995], 渡部 [2000, 第 3 章] 参照.

[24] 但し, Zakoian [1994] の TGARCH とは若干異なることに注意.

[25] Hafner / Herwartz [2001] の論文では, (4.36) 式は

$$\sigma_t^2 = \omega + \left\{(\alpha + \alpha^- D_{t-1}^{*-})(Z_{t-1} - \lambda_{t-1})^2 + \beta\right\} \sigma_{t-1}^2$$

となっているが, 誤りと考えられる. 詳しくは, Duan [1999] 参照.

[26] ここでは, 原資産価格のジャンプと金利の変動を同時に組み入れたモデルを用いて S&P500 オプション市場で実証研究を行っている. Baksi / Cao / Chen [1997] の実証結果を纏めると以下のようになる.

1. SI モデルと SVSI-J モデルは各々B-S モデルと SVJ モデルのパフォーマンスを改善することはない.
2. 定式化の誤り (misspecification) は, BS, SV, SVSI, SVJ モデルの中では SVJ が最も小さく B-S モデルが最も大きい.
3. プライシング・エラー (pricing error) は, B-S モデルが最も大きく, 次に SV モデルが大きい. 最も小さいのは SVJ モデルである.
4. ボラティリティσ^2 の変動だけでも B-S モデルのプライシング・エラーを 25 % から 60 % 改善することができる.
5. ジャンプ過程は短期のオプションのパフォーマンスを改善し, 金利 r の変動は長期のオプションのパフォーマンスを改善する.

[27] これらの推定法に関してはモンテカルロ・シミュレーションによる推定値の効率性の比較が行なわれているものもある. Ruiz [1994] は GMM と QML を比較し GMM よりも QML は効率的であるとしている. それに対して, Jacquier / Polson / Rossi [1994], Andersen / Sørensen [1997] らは, 現実に近いパラメーターを選択すると GMM の方が効率的なケースもあるとしている. また, Jacquier / Polson / Rossi [1994] は MCMC に基づくベイズ推定法と GMM や QML を比較し, MCMC が最も効率性が高いと結論づけている.

付録 A: 表記法

$C(\cdot)$	:	コール・オプション価格
C_t^{AN}	:	Amin / Ng [1993] によるヨーロピアン・コール・オプション価格
C_t^{BS}	:	Black / Scholes [1973] モデルによるヨーロピアン・コール・オプション価格
C_t^{GH}	:	GARCH オプションによるヨーロピアン・コール・オプション価格
C_t^{EMS}	:	経験的マルチンゲール・シミュレーション (EMS) によるヨーロピアン・コール・オプション価格
C_t^{HW}	:	Hull / White [1987] によるヨーロピアン・コール・オプション価格
C_t^{MCMC}	:	マルコフ連鎖モンテカルロ法によるヨーロピアン・コール・オプション価格
$\hat{C}_t^{BS}$	:	Black / Scholes [1973] モデルの数値解によるコール・オプション価格の推定値
$\hat{C}_t^{CV}$	:	制御変数法 (CV) によるコール・オプション価格の推定値
$\hat{C}_t^{SV}$	:	SV オプションの数値解によるコール・オプション価格の推定値
c	:	非対称を捉える閾値 (threshold)
D^-	:	z_{t-1} が負のときには 1, それ以外のときには 0 であるダミー変数
D_{t-1}^{*-}	:	$Z_{t-1} - \lambda_{t-1}$ が負のときには 1, それ以外のときには 0 であるダミー変数
D_{t-i}^-	:	ϵ_{t-i} が負のときには 1, それ以外のときには 0 であるダミー変数
d_t	:	配当利回り (dividend yield)
dt	:	時間の微小変化
dz	:	ウィナー過程
$E[\cdot]$	:	期待値
$E^Q(\cdot)$	:	確率測度 Q の下での期待値
$\hat{E}$	:	リスク中立的な分布の下での期待値
F_t	:	先物価格
$f(\cdot)$	:	確率密度関数
$f^*(\phi)$	:	リスク中立性の下での資産収益過程に対する積率母関数
$f_j(x, \sigma^2, T; \phi)$	:	特性関数
$G_\nu(\cdot)$	:	分散を 1 に標準化した自由度 ν の $Student - t$ 分布
$\hat{h}_{t\|T}$	:	すべての標本が与えられたときの条件付平均
K	:	権利行使価格
$K\Phi(t,T)\Phi_2$	:	権利行使価格支払いの現在価値
$Loss(\cdot)$	:	損失関数 (loss function)
N	:	シミュレーションの回数
$N(\cdot)$	:	標準正規分布の分布関数
N_{it}	:	$\epsilon_t < -i\sigma^*$ のときには 1, それ以外のときには 0 であるダミー変数
n_t	:	$(t-1)$ 営業日と t 営業日との間の「休業日数+1」
P_t^{BS}	:	B-S モデルによるヨーロピアン・プット・オプション価格
$P_{t\|T}$	:	すべての標本が与えられたときの条件付分散
P_{it}	:	$\epsilon_t > i\sigma^*$ のときには 1, それ以外のときには 0 となるダミー変数
$p(X\|Y)$	:	Y を条件としたときの X の条件付密度関数

R_t	:	原資産収益率
$Re[\cdot]$	:	複素数の整数部分 (real part)
r	:	安全資産利子率
r^*	:	時間間隔 Δ に対する連続時間安全資産利子率
r_d	:	国内の安全資産利子率
r_f	:	相手国の安全資産利子率
S	:	原資産価格 (連続時間)
S_t	:	原資産価格 (離散時間)
$S\Phi_1$	:	最適な権利行使による原資産の現在価値
$Skew(\cdot)$	:	歪度
s_t	:	R_t が正（負）ならばの値は 1（-1）となり R_t の符号を示す
T	:	権利行使日 (満期日)
t	:	現在時点
$t_\nu(0,1)$	:	自由度 ν の標準化された $Student-t$ 分布
V	:	ボラティリティの平均
$Var(\cdot)$	:	分散
$Var^Q(\cdot)$	:	確率測度 Q の下での分散
z_t	:	$i.i.d.$ の標準正規分布
α	:	ARCH 型モデルの過去の 2 乗の撹乱項のパラメータ
β	:	ARCH 型モデルの過去のボラティリティのパラメータ
γ	:	レバレッジ効果 (leverage effect) を捉えるパラメータ
Δ	:	時間間隔 (time interval)
δ	:	t 営業日でのボラティリティのスピード
ϵ_t	:	平均 0, ボラティリティσ_t^2 となる確率変数
θ	:	パラメータ集合
θ^*	:	長期的な平均回帰
κ	:	長期的な平均回帰への調整速度
λ	:	一定の単位リスク・プレミアム
$\lambda\sigma^2$	:	ボラティリティに関するリスク・プレミアム
μ	:	ドリフト項
ν	:	自由度
ρ	:	原資産収益率 R とボラティリティ σ^2 との相関
σ	:	標準偏差
σ^2	:	ボラティリティ
σ^*	:	無条件の標準偏差
$\hat{\sigma}_{t\|T}^{2(j)}$	:	mixture indicator を条件とする Kalman smoother
Φ_j $(j=1,2)$	:	ITM オプションで権利行使される条件付確率
ψ	:	スケール・パラメータ (scale parameter)
Ω_{t-1}	:	時点 $t-1$ を含む $t-1$ 時点までの利用可能な情報集合
ω	:	ARCH 型モデルの定数項

付録: 略語一覧

AGARCH	:	Asymmetric GARCH
AIC	:	Akaike's Information Criterion
a.s.	:	almost surely
AR	:	Autoregressive
ARCH	:	Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
A-R / M-H	:	Acceptance-Rejection / Metropolis-Hastings
AT&T	:	American Telephone and Telegraph Company
ATM	:	at-the-money
BHHH	:	Brendt-Hall-Hall-Hausman
B-S	:	Black-Scholes
CRSP	:	Center for Research in Security Prices at the University of Chicago
DEC	:	Digital Equipment Corporation
DITM	:	deep-in-the-money
DOTM	:	deep-out-of-the-money
EGARCH	:	Exponential GARCH
EGARCH-M	:	EGARCH in-the-mean
EMQMC	:	Empirical Martingale Quasi-Monte Carlo
EMS	:	Empirical Martingale Simulation
FITM	:	far-in-the-money
FOTM	:	far-out-of-the-money
GARCH	:	Generalized-ARCH
GARCH-M	:	GARCH in-the-mean
GGS	:	Griddy Gibbs Sampler
GJR	:	Glosten Jagannathan Runkle
GJR-M	:	GJR in-the-mean
GMM	:	Generalized Method of Moments
GSMM	:	Generalized Simulation Minimization Method
HSI	:	Hang Seng index
IBM	:	International Business Machines
i.i.d.	:	independently and identically distributed
IT&T	:	International Telephone and Telegraph Corporation
ITM	:	in-the-money
LRNVR	:	Locally Risk-Neutral Valuation Relationship
MCMC	:	Markov-chain Monte Carlo
MGF	:	moment generating function

M-H	:	Metropolis-Hastings
ML	:	Maximum Likelihood method
MM	:	Method of Moments
MMS	:	Moment Matching Simulation
MMSE	:	Minimizing the Mean Squared Error
NGARCH	:	Nonlinear Asymmetric GARCH
NTM	:	near-the-money
OTM	:	out-of-the-money
PNPGARCH	:	Partial Non-Parametric GARCH
QML	:	Quasi-Maximum Likelihood estimation
S&P500	:	Standard and Poor's 500
SI	:	Stochastic Interest-rate
SIC	:	Schwart's Information Criterion
SIEM	:	Simulated Estimation and Maximization
SMI	:	Swiss Market index
SMM	:	Simulation Minimization Method
SSE	:	Sum of Squared pricing Error
SV	:	Stochastic Volatility
SVJ	:	Stochastic Volatility random Jump
SVSI	:	Stochastic Volatility and Stochastic Interest-rate
SVSI-J	:	Stochastic Volatility and Stochastic Interest-rate random Jump
TGARCH	:	Threshold GARCH

参考文献

[1] 岩田暁一編 [1997],『先物・オプション市場の計量分析』, 慶応義塾大学出版会.

[2] 大村敬一 [1988], 『オプション 理論と応用』, 東洋経済新報社.

[3] 大森裕浩 [2001], 「マルコフ連鎖モンテカルロ法の最近の展開」,『日本統計学会誌』, 第 31 巻, 第 3 号, pp.305-344.

[4] 木島正明 [1999], 『期間構造モデルと金利デリバティブ』(シリーズ < 現代金融工学 > 3), 朝倉書店.

[5] 三井秀俊 [1998], 「日経 225 株価指数とオプション価格の確率的分散変動モデルによる分析」, 日本証券経済研究所『ファイナンス研究』, No.24, pp.23-40.

[6] 三井秀俊 [2000], 「日経 225 オプション価格の GARCH モデルによる分析」, MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』, No.7, pp.57-73.

[7] 三井秀俊 [2001], 「ボラティリティ変動モデルによるオプション価格付けの実証研究 — 日経 225 オプション市場 —」, 博士学位論文, 東京都立大学.

[8] 三井秀俊・渡部敏明 [2003], 「ベイズ推定法による GARCH オプション価格付けモデルの分析」, 日本統計学会『日本統計学会誌』, 掲載予定.

[9] 森平爽一郎・小島裕 [1997], 『コンピュテーショナル・ファイナンス』(ファイナンス講座 4), 朝倉書店.

[10] 森保洋 [1999], 「ARCH モデルによる日経 225 オプション評価」, 『現代経済学研究』, 第 7 号, pp.143-159.

[11] 湯前祥二・鈴木輝好 [2000], 『モンテカルロ法の金融工学への応用』(シリーズ < 現代金融工学 > 6), 朝倉書店.

[12] 和合肇 [1998], 「ベイズ計量経済分析における最近の発展」,『日本統計学会誌』, 第 28 巻, 第 3 号, pp.253-305.

[13] 渡部敏明 [2000], 『ボラティリティ変動モデル』(シリーズ < 現代金融工学 > 4), 朝倉書店.

[14] Amin, K. I. and V. K. Ng [1993], "Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility," *Journal of Finance,* 48, pp.881-910.

[15] Andersen, T. G. and B. E. Sørensen [1997], "GMM and QML Asymptotic Standard Deviations in Stochastic Volatility Models: Comments on Ruiz [1994]," *Journal of Econometrics,* 76, pp.397-403.

[16] Bakshi, G., C. Cao and Z. Chen [1997], "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models, " *Journal of Finance,* 52, pp.2003-2049.

[17] Ball, C. and A. Roma [1994], "Stochastic Volatility Option Pricing," *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 29, pp.589-607.

[18] Barraquand, J. [1995], "Numerical Valuation of High Dimentional Multivariate European Securities," *Management Science*, 41, pp.1882-1891.

[19] Bates, D. S. [1996], "Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Process Implicit in Deutsche Mark Options , " *Review of Financial Studies,* 9, pp.69-107.

[20] Bauwens, L. and M. Lubrano, eds. [1995], "Bayesian and Classical Econometric Modeling of Time Series," *Journal of Econometrics,* 69, pp.1-365.

[21] Bauwens, L. and M. Lubrano [1998], "Bayesian Inference on GARCH Models Using the Gibbs Sampler," *Econometrics Journal,* 1, pp.C23-C46.

[22] Bauwens, L. and M. Lubrano [2002], "Bayesian Option Pricing Using Asymmetric GARCH Models," *Journal of Empirical Finance,* 9, pp.321-342.

[23] Bauwens, L., M. Lubrano and J. -F. Richard [1999], *Bayesian Inference in Dynamic Econometric Models,* Oxford University Press.

[24] Black, F. and M. Scholes [1973], "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy,* 81, pp.637-654.

[25] Bollerslev, T. [1986], "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics,* 31, pp.307-327.

[26] Bollerslev, T. , R. Y. Chou and K. F. Kroner [1992], "ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence," *Journal of Econometrics,* 52, pp.5-59.

[27] Bollerslev, T. , R. F. Engle and D. B. Nelson [1994], "ARCH Models," in R. F. Engle and D. McFadden, eds., *Handbook of Econometrics,* Vol.4, pp.2959-3038, Amsterdam: North-Holland.

[28] Boyle, P. [1977], "Options: A Monte Carlo Approach," *Journal of Financial Economics,* 4, pp.323-338.

[29] Boyle, P., M. Broadie and P. Glasserman [1997], "Monte Carlo Methods for Security Pricing," *Journal of Economic Dynamics and Control,* 21, pp.1267-1321.

[30] Brennan, M. J. and E. S. Schwartz [1980], "Analyzing Convertible Bonds," *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 15, pp.907-929.

[31] Broadie, M. and P. Glasserman [1996], "Estimating Security Price Derivatives Using Simulation," *Management Science,* 42, pp.269-285.

[32] Campbell, J. Y., A. W. Lo and A. C. Mackinlay [1997], *The Econometrics of Financial Markets,* Princeton University Press; 祝迫得夫・大橋和彦・中村信弘・本多俊毅・和田賢治訳 [2003],『ファイナンスのための計量分析』, 共立出版.

[33] Chen, M. -H., Q. -M. Shao and J. G. Ibrahim [2000], *Monte Carlo Methods in Bayesian Computation,* Springer-Verlag.

[34] Chesney, M. and L. O. Scott [1989], "Pricing European Options: A Comparison of the Modified Black-Schole's Model and a Random Variance Models," *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 24, pp.267-284.

[35] Chib, S. [2001], "Markov Chain Monte Carlo Methods: Computation and Inference," in J. J. Heckman and E. Leamer eds., *Handbook of Econometrics,* Vol.5, pp.3569-3649, Amsterdam: North-Holland.

[36] Chib, S. and E. Greenberg [1995], "Understanding the Metropolis - Hasting Algorithm," *American Statistician,* 49, pp.327-335.

[37] Cox, J. C. and S. A. Ross [1976], "The Valuations of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics,* 3, pp.145-166.

[38] Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross [1985a], "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices," *Econometrica,* 53, pp.363-384.

[39] Cox, J. C., J. Ingersoll and S. A. Ross [1985b], "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica,* 53, pp.385-408.

[40] DeRosa, D. F. [2000], *Options on Foreign Exchange,* John Wiley & Sons; 森谷博之・及川茂訳 [2000],『外国為替のオプション』, 東洋経済新報社.

[41] Duan, J. -C. [1995], "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance,* 5, pp.13-32.

[42] Duan, J.-C. [1999], "Conditionally Fat-Tailed Distributions and the Volatility Smile in Options," Working Paper, Hong Kong University of Science and Technology.

[43] Duan, J. -C. and H. Zhang [2001], "Pricing Hang Seng Index Options around the Asian Financial Crisis - A GARCH Approach," *Journal of Banking & Finance,* 25, pp.1989-2014.

[44] Duan, J. -C. and J. -G. Simonato [1998], "Empirical Martingale Simulation for Asset Prices," *Management Science,* 44, pp.1218-1233.

[45] Duan, J. -C. and J. -G. Simonato [2001], "American Option Pricing under GARCH by a Markov Chain Approximation," *Journal of Economic Dynamics and Control,* 25, pp.1689-1718.

[46] Duan, J. -C. , G. Gauthier and J. -G. Simonato [1999], "An Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing Model," *Journal of Computational Finance,* 4, pp.75-116.

[47] Duan, J. -C. , G. Gauthier and J. -G. Simonato [2001], "Asymptotic Distribution of the EMS Option Price Estimator," *Management Science,* 48, pp.1122-1132.

[48] Engle, R. F. [1982], "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica,* 50, pp.987-1007.

[49] Engle, R. F. and T. Bollerslev [1986], "Modelling the Persisitence of Conditional Variances," *Econometric Reviews,* 5, pp.1-50, pp.81-87.

[50] Engle, R. F. and C. Mustafa [1992], "Implied ARCH Models from Options Prices," *Journal of Econometrics,* 52, pp.289-311.

[51] Engle, R. F. , D. M. Lilien and R. P. Robins [1987], "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model," *Econometrica,* 55, pp.391-407.

[52] Engle, R. F. and V. Ng [1993], "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility , " *Journal of Finance,* 43, pp.1749-1778.

[53] Foster, D. and D. Nelson [1994], "Asymptotic Filtering Theory for Univariate ARCH Models," *Econometrica,* 62, pp.1-41.

[54] Fouque, J. -P., G. Papanicolaou and K. R. Sircar [2000], *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility,* Cambridge University Press.

[55] Franses, P. H. and D. van Dijk [2000], *Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance,* Cambridge University Press.

[56] French, K. R. and R. Roll [1986], "Stock Return Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders," *Journal of Financial Economics,* 17, pp.5-26.

[57] Garcia, R. and É. Renault [1998], "A Note on Hedging in ARCH and Stochastic Volatility Option Pricing Models," *Mathematical Finance,* 8, pp.153-161.

[58] Garman, M. B. and S. V. Kohlhagen [1983], "Foreign Currency Option Values," *Journal of International Money and Finance,* 2, pp.231-237.

[59] Ghysels, E., A. C. Harvey and E. Renault [1996], "Stochastic Volatility," in G. S. Maddala and C. R. Rao, eds., *Handbook of Statistics,*Vol.14: Statisitical Methods in Finance, pp.119-191, Amsterdam: North-Holland.

[60] Gilks, W. R., S. Richardson and D. J. Spiegelhalter [1996], *Markov Chain Monte Carlo in Practice,* Chapman & Hall.

[61] Glosten, L. R., R. Jagannathan and D. Runkle [1993], "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks," *Journal of Finance,* 48, pp.1779-1801.

[62] Gourieroux, C and J. Jasiak [2001], *Financial Econometrics,* Princeton University Press.

[63] Hafner, C. M. and H. Herwartz [2001], "Option Pricing under Linear Autoregressive Dynamics, Heteroskedasticity, and Conditional Leptokurtosis," *Journal of Empirical Finance,* 8, pp.1-34.

[64] Hamilton, J. D. [1994], *Time Series Analysis,* Princeton University Press.

[65] Harvey, A. C., E. Ruiz and N. G. Shephard [1994], "Multivariate Stochastic Variance Models," *Review of Economic Studies,* 61, pp.247-264.

[66] Harvey, A. C. and N. G. Shephard [1996], "Estimation of An Asymmetric Stochastic Volatility Model for Asset Returns," *Journal of Business & Economic Statistics,* 14, pp.429-434.

[67] Heath, D., R. Jarrow and A. Morton [1992], "Bond Pricing and Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica,* 60, pp.77-105.

[68] Heston, S. L. [1993], "A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options," *Review of Financial Studies,* 6, pp.327-343.

[69] Heston, S. L. and S. Nandi [2000], "A Closed-Form GARCH Option Valuation Model," *Review of Financial Studies,* 13, pp.585-625.

[70] Higgins, M. L. and A. K. Bera [1992], "A Class of Nonlinear ARCH Models," *International Economic Review,* 33, pp.137-158.

[71] Hull, J. C. [2000], *Options, Futures, & Other Derivatives*, 4th ed., Prentice-Hall; 東京三菱銀行商品開発部訳 [2001],『フィナンシャルエンジニアリング』(第 4 版), 金融財政事情研究会.

[72] Hull, J. and A. White [1987], "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance,* 42, pp.281-300.

[73] Hull, J. and A. White [1988a], "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing,"*Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 23, pp.237-251.

[74] Hull, J. and A. White [1988b], "An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility,"*Advances in Futures and Options Research,* 3, pp.29-61.

[75] Jacquier, E., N. G. Polson and P. E. Rossi [1994], "Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models [with Comments]," *Journal of Business & Economic Statistics,* 12, pp.371-389.

[76] Jäckel, P. [2002], *Monte Carlo Methods in Finance,* John Wiley & Sons.

[77] Jiang, G. J. [2002], "Stochastic Volatility and Option Pricing," in J. Knight and S. Stachell, eds., *Forecasting Volatility in the Financial Markets,* 2nd ed., Butterworth-Heinemann.

[78] Johnson, H. and D. Shanno [1987], "Option Pricing when the Variance is Changing," *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 22, pp.143-151.

[79] Kallen, J. and M. Taqqu [1998], "Option Pricing in ARCH-Type Models," *Mathematical Finance,* 8, pp.13-26.

[80] Kim, S., N. Shephard and S. Chib [1998], "Stochastic Volatility: Optimal Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models " *Review of Economic Studies,* 65, pp.361-393.

[81] Kim, Y. -J. [2002], "Option Pricing under Stochastic Interest Rates: An Empirical Investigation," *Asia-Pacific Financial Markets,* 9, pp.23-44.

[82] Lamberton, D. and B. Lapeyre [1996], *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance,* Chapman & Hall; 森平爽一郎監修, 青木信隆・岩村伸一・大多和亨・中川秀敏訳 [2000],『ファイナンスへの確率解析』, 朝倉書店.

[83] Mahieu, R. J. and P. C. Schotman [1998], "An Empirical Application of Stochastic Volatility models," *Journal of Applied Econometrics,* 13, pp.333-360.

[84] Mele, A. and F. Fornari [2000], *Stochastic Volatility in Financial Markets: Crossing the bridge to continuous time*, Kluwer Academic.

[85] Melino, A. and S. M. Turnbull [1990], "The Pricing of Foreign Currency Options with Stochastic Volatility," *Journal of Econometrics*, 45, pp.239-265.

[86] Merton, R. C. [1973], "The Theory of Rational Option Pricing ," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, pp.141-183.

[87] Mills, T. C. [1999], *The Econometric Modelling of Financial Time Series*, 2nd ed., Cambridge University Press.

[88] Neftci, S. N. [2000], *An Introduction to the Mathematics of Derivatives*, 2nd ed., Academic Press; 投資工学研究会訳 [2001],『ファイナンスへの数学』(第 2 版), 朝倉書店.

[89] Nelson, D. B. [1991], "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59, pp.347-370.

[90] Noh, J., R. F. Engle and A. Kane [1994], "Forecasting Volatility and Option Pricing of the S&P500 Index," *Journal of Derivatives*, pp.17-30.

[91] Palm, F. C. [1996], "GARCH Models of Volatility," in G. S. Maddala and C. R. Rao, eds., *Handbook of Statistics*, Vol.14: Statistical Methods in Finance, pp.209-240, Amsterdam: North-Holland.

[92] Pliska S. R. [1997], *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*, Blackwell; 木島正明監訳, 東京海上火災保険財務企画部運用企画グループ訳 [2001],『数理ファイナンス入門 ー離散時間モデルー』, 共立出版.

[93] Ritchken, P. and R. Trevor [1999], "Pricing Options under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Processes," *Journal of Finance*, 54, pp.377-402.

[94] Robert, C. P. and G. Casella [1999], *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer-Verlag.

[95] Rubinstein, M. [1976], "The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options," *Bell Journal of Economic Management Science*, 7, pp.407-425.

[96] Sabbatini, M. and O. Linton [1998], "A GARCH Model of the Implied Volatility of the Swiss Market Index from Option Prices," *International Journal of Forecasting* , 14, pp.199-213.

[97] Saez, M. [1997], "Option Pricing under Stochastic Volatility and Interest Rate in the Spanish Case," *Applied Financial Economics*, 7, pp.379-394.

[98] Scott, L. O. [1987], "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an Application," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, pp.419-438.

[99] Scott, L. O. [1997], "Pricing Stock Options in a Jump-Diffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rates: Applications of Fourier Inversion Methods," *Mathematical Finance*, 7, pp.413-426.

[100] Shephard, N. [1996], "Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility," in D. R. Cox, D. V. Hinkley and O. E. Barndorff-Nielsen, eds., *Time Series Models in Econometrics, Finance and other Fields,* Chapman & Hall.

[101] Stein, E. M. and C. J. Stein [1991], "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach," *Review of Financial Studies,* 4, pp.727-752.

[102] Tanner, M. A. [1996] *Tools for Statistical Inference: Methods for the Exploration of Posterior Distributions and Likelihood Functions,* 3rd ed., Springer-Verlag.

[103] Tavella, D. [2002], *Quantitative Methods in Derivatives Pricing,* John Wiley & Sons.

[104] Taylor, S. J. [1994], "Modeling Stochastic Volatility: A Review and Comparative Study," *Mathematical Finance,* 4, pp.183-204.

[105] Tierney, L. [1994], "Markov Chains for Exploring Posterior Distributions [with discussion]," *Annals of Statistics,* 21, pp.1701-1762.

[106] Tsay, R. S. [2002], *Analysis of Financial Time Series,* John Wiley & Sons.

[107] Vasicek, O. [1977], "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics,* 5, pp.177-188.

[108] Wiggins, J. B. [1987], "Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates," *Journal of Financial Economics,* 19, pp.351-372.

[109] Wilmott, P. [1998], *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering,* John Wiley & Sons.

[110] Wilmott, P., J. Dewynne and S. Howison [1993], *Option Pricing: Mathematical Models and Computation,* Oxford Financial Press.

[111] Wilmott, P., S. Howison and J. Dewynne [1995], *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction,* Cambridge University Press; 伊藤幹夫・戸瀬信之訳 [2002], 『デリバティブの数学入門』, 共立出版.

[112] Zakoian, J. M. [1994], "Threshold Heteroskedastic Models," *Journal of Economic Dynamics and Control,* 18, pp.931-955.