# 市場占有率に関する数学モデルについて

大　澤　秀　雄


## 概要

この論文では，市場おいて競合するメーカーや製品に対する占有率に関して確率的なモデル化を行い，解析する試みを行う．この定式化により，待ち行列ネットワーク理論で周知の結果が応用できることを指摘し，数学モデルによる市場占有率に関する新たなアプローチを試みる．


## 1．はじめに

マーケティング論において，基本的な課題である市場占有率について考察する．ここで考える市場占有率とは，市場において競合する製品あるいはメーカー（以下では，対象品と記す）が複数ある場合，その市場規模全体に対して注目する対象品が占める割合のことである．市場規模を，本論文では現にいずれかの対象品を選択している消費者全体の数で考える．それに対する，注目対象品を選択している消費者数の割合が市場占有率である．従来，市場占有率は綿密な統計調査に基づいて推測されてきた．この論文では，市場占有率に対する数学モデルを考察することを目的とする．

市場占有率は消費者の選択行動の推移で変動する．ある時点で他の対象品にのり換えたり，対象品の使用をやめたりする行動である．このような消費者の選択行動を捉え，注目対象品を選択している消費者数の時間的変動を，確率過程としてモデル化する．それをもとに市場占有率に関する考察を行う．

本論文の構成は次の通りである．第 2 節では対象品に対する選択遷移行動をモデル化する．それに続き，第 3 節ではこれに対する時間的な変動を確率過程としてモデル化する．このモデルは待ち行列理論で周知の待ち行列ネットワークモデルである，マルコフ型ルーチンを有する Jackson Network として定式化されたものである．そこで，待ち行列論で得られた結果を応用し，このモデルの定常分布が積形式で得られることを示す．それをもとに，第 4 節では市場占有率モデルについて考察する．

## 2．選択遷移行動のモデル化

この節では，市場占有率モデルを構築する．$K$ 種の対象品を

$$\boldsymbol{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_K\}$$

と表し，これらが競合する市場を考える．

このモデルの状態を連続時の確率過程で表現するために，次の変数を導入する．

$X_i(t)$：時刻 $t$ において $A_i$ を選択している消費者数，$i = 1, 2, \cdots, K$,

$N(t) = \sum_{i=1}^{K} X_i(t)$：時刻 $t$ において対象品を選択している消費者全体数（市場規模）

このとき，$A_i$ に対する市場占有率が次のように定義される：

$$R_i(t) = \frac{X_i(t)}{N(t)}, \quad N(t) \neq 0 \text{ の場合,}$$

$R_i(t) = 0$,　$N(t) = 0$ の場合,　$i = 1, 2, \cdots, K$.

消費者の対象物に対する選択の遷移を考える．まず，任意の時点で $A$ のいずれをも選択していなかった消費者の行動を次のように考える．

$\lambda_0$ ：$A$ のいずれかに対する需要を起こす率,

$P_{0i}$ ：その選択が $A_i$ である確率, $i = 1, 2, \cdots, K$,

ここで，$\sum_{i=1}^{K} p_{0i} = 1$である．

また，任意の時点で $A$ のいずれかを選択している消費者の行動は次で規定される．

$\mu_i$ ：$A_i$ を選択していた消費者がそれを選択行動を起こす率,

$P_{ij}$ ：その選択が $A_j$ である確率，ここで, $i, j = 1, 2, \cdots, K$.

さらに,

$P_{i0}$ ：$A$ のいずれをも選択しない確率, $i = 1, 2, \cdots, K$,

とし,

$$\sum_{j=0}^{K} p_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, K,$$

であるとする．なお，ここで定義された推移確率はすべて時刻に無関係（斉時性）に決まるものとする．

## 3．選択遷移の確率過程

前節の条件のもとに

$\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \cdots, X_K(t))$,　$t \geq 0$,

とすれば，確率過程 $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{X}(t), t \geq 0\}$は斉時マルコフ過程であり，状態空間は

$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \cdots, n_K)\,;\, n_i \geq 0\}$

である．次のベクトルを定義する：

$e_i$ ：第 $i$ 成分のみ 1 で他の成分はすべて 0,

$e_{ij}$ ：第 $i$ 成分が $-1$, 第 $j$ 成分が 1 であり，その他の成分は 0,

ここで, $i, j = 1, 2, \cdots, K$, $i \neq j$ であり，$e_{ii} = 0$, ただし，$\boldsymbol{0}$ はすべての成分が 0 である零ベクトルとする．

このとき，$\boldsymbol{X}$ の推移率は次式で与えられる．

$q(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} + \boldsymbol{e}_i) = \lambda_0 p_{0i}$,

$q(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} + \boldsymbol{e}_{ij}) = n_i \mu_i p_{ij}$,　$n_i > 0$,

$q(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_i) = n_i \mu_i p_{i0}$,　$n_i > 0$,

ここで, $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \cdots, n_K)$,　$i, j = 1, 2, \cdots, K$.

このモデルは待ち行列理論において知られている，マルコフ型ルーチンを有するオープン型待ち行列ネットワークモデル（a Jackson open network）であり，各ノードが M/M/∞の待ち行列ネットワークに相当する．そこで得られている周知の結果を応用できる（[1], [2], [3]）.

**Remark 3.1**　入力間隔時間およびサービス時間がそれぞれパラメータ $\alpha$ および $\beta$ の指数分布である待ち行列 M/M/∞において，その系内人数過程 $\{Q(t)\}$ の定常分布は

$$\mathrm{P}[Q(t) = n] = e^{-a} \frac{a^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \quad a = \frac{\alpha}{\beta},$$

で与えられる（パラメータ $a$ のポアソン分布）.

選択遷移確率に対して，$\lambda_i = \lambda_0 p_{0i}$, $(i = 1, 2, \cdots, K)$, とおき，方程式

$$x_j = \lambda_i + \sum_{i=1}^{K} x_i p_{ij}, \quad j = 1, 2, \cdots, K,$$

を考える．ここで,

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_K)$,　$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_K)$

$$\boldsymbol{P}' = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1K} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2K} \\ & \cdots & \cdots & \\ p_{K1} & p_{K2} & \cdots & p_{KK} \end{pmatrix}$$ とすれば,

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}'$, 即ち $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}') = \boldsymbol{\lambda}$,

ただし，$\boldsymbol{I}$ は $K$ 次の単位行列,

である．この方程式の解を

$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_K) = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}')^{-1}$,

として，さらに次のパラメータを定義する．

$$\rho_i = \frac{\gamma_i}{\mu_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, K,$$

$$\rho = \sum_{i=1}^{K} \rho_i.$$

このとき，次の結果が知られている（[2], [3]）.

**Remark 3.2**　斉時マルコフ過程 $\boldsymbol{X}$ は次式の積形

式で与えられる定常分布をもつ．

$$\pi(\boldsymbol{n}) = \prod_{i=1}^{K} e^{-\rho_i}\frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!} = e^{-\rho}\prod_{i=1}^{K}\frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!}, \quad \boldsymbol{n} \in \mathcal{S}.$$

## 4．市場占有率モデル

前節の結果を応用して，定常状態であるという条件のもとに市場占有率

$\boldsymbol{R}(t) = (R_1(t), R_2(t), \cdots, R_K(t))$,

に対する確率過程 $\mathcal{R} = \{\boldsymbol{R}(t),\ t \geq 0\}$ について考察する．この過程の状態空間 $\mathcal{S}_R$ を次のように分割する．まず，$\mathcal{S}_R(0) = \{\boldsymbol{0}\}$ とし，$\ell = 1, 2, \cdots$ に対して，

$$\mathcal{S}_R(\ell) = \left\{ \boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_K);\ \sum_{i=1}^{K} r_i = 1 \right.$$
$$\left. \text{かつ } r_i \text{ は分母を } \ell \text{ とする有理数} \right\}$$

とすると

$$\mathcal{S}_R = \bigcup_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{S}_R(\ell)$$

である．この表記のもとに，Remark 3.2 およびポアソン分布の再生性を用いて次を得る．

**Lemma 4.1**　定常状態にある過程 $\boldsymbol{X}$ に対して，市場規模 $N(t)$ の確率分布はパラメータ $\rho$ のポアソン分布である：

$$\mathrm{P}[N(t) = \ell] = e^{-\rho}\frac{\rho^{\ell}}{\ell!}, \quad \ell = 0, 1, \cdots.$$

**Proposition 4.2**　過程 $\mathcal{R}$ は定常状態において，$N(t) = \ell$ の条件のもとに，次の条件付確率に従う．

$$\mathrm{P}[\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{r} | N(t) = \ell] = \frac{1}{G(\ell)}\prod_{i=1}^{K}\frac{\rho_i^{r_i \ell}}{(r_i \ell)!},$$

$\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_K) \in \mathcal{S}_R(\ell)$,

ここで，$\ell = 0, 1, \cdots$，に対し $G(\ell) = \dfrac{\rho^{\ell}}{\ell!}$.

**Remark 4.3**　Lemma 4.1 により，定常状態において市場規模の平均は $\mathrm{E}[N(t)] = \rho$ である．そのうち $A_i$ を選択している規模の平均は Remark 3.2 により $\mathrm{E}[X_i(t)] = \rho_i$ である．従って，$A_i$ の市場占有率の平均は次式で与えられる．

$$\mathrm{E}[R_i(t)] = \frac{\rho_i}{\rho}, \quad i = 1, 2, \cdots, K.$$

選択遷移の行動に大きな変化がなければ，$A_i$ に対する市場占有率はこの程度に収束していくと考えられる．

## 5．コメント

この論文は，待ち行列ネットワーク理論で周知のシステムが市場占有の行動分析としてモデル化可能であり，その結果を応用できることを示唆している．この考え方は，閉鎖型の市場占有率の行動分析，占有率をコストや消費量で表現する分析モデルへの応用にも発展されるものと考えられ，今後取り組むべき課題となる．


### 謝辞

本研究は日本大学経済学部経済研究所のプロジェクト研究の一環として遂行されたものである．著者は，この場を借りて当研究所の支援に対して感謝の意を表したい．


### 参考文献


［1］紀一誠（2002）待ち行列ネットワーク（経営科学のニューフロンティア 13）朝倉書店.

［2］Gelenbe, E. and Pujolle, G.（1987）*Introduction to Queueing Networks*, translated by Nelson, J. C. C., Wiley.

［3］Walrand, J.（1988）*An Introduction to Queueing Networks*, Prentice Hall.