

# ある債務不履行リスクモデル

中 村 正 彰

## 1. 債務不履行リスクのモデル

次の常微分方程式系を考察する.

$$\begin{cases} u'(t) = -au(t) + av(t)w(t) \\ v'(t) = -\beta v(t) + \beta w(t)u(t) \\ w'(t) = -\gamma w(t) + \gamma u(t)v(t) \end{cases} \quad (1)$$

と

$$\begin{cases} u'(t) = -au(t) + av(t)w(t) \\ v'(t) = -\beta v(t) + \beta w(t)u(t) \\ w'(t) = -\gamma w(t) - \gamma u(t)v(t) \end{cases} \quad (2)$$

ここで,  $a, \beta, \gamma$  は正定数.

未知関数  $u, v, w$  は各三社の最初の債務不履行時間に由来し, これらの非線形モデルは債務不行リスクに関連する方程式系と考えることができる.

## 2. 債務不履行リスクの方程式の導出

基本的なモデルは R. A. Jarrow と F. Yu [2] (参照 [3]) の 2 会社間の方程式に由来するが, 我々は 3 つの会社間の関係に拡張した.

Jarrow -Yu のモデルに付いて簡単に紹介しておく.  $\lambda_t^{A,B}$  は債務不履行会社 A と B の債務不履行強度を表すとすると

$$\lambda_t^A = a_1 + a_2 1_{\{t \geq \tau^B\}}, \quad \lambda_t^B = b_1 + b_2 1_{\{t \geq \tau^A\}}, \quad (3)$$

ここで  $a_1, a_2, b_1, b_2$  は正定数.

のように与えられ,  $\tau^{A,B}$  はそれぞれの最初のジャンプ時間を表し,  $1_{\{\cdot\}}$  は特性関数.

$F(t) := P(\tau^A \leq t), G(t) := P(\tau^B \leq t)$  をそれぞれ  $\tau^A$  と  $\tau^B$  の周辺分布関数とすると.

$$\begin{aligned} 1 - F(t) &= E \left[ \exp \left( - \int_0^t (a_1 + a_2 1_{\{s \geq \tau^B\}}) ds \right) \right] \\ &= e^{-(a_1 + a_2)t} \left( 1 + a_2 \int_0^t e^{a_2 s} (1 - G(s)) ds \right), \end{aligned}$$

となる.

上の式を  $t$  で微分すると

$$\frac{d}{dt} (1 - F(t)) = -(a_1 + a_2)(1 - F(t)) + a_2 e^{-a_1 t} (1 - G(t)). \quad (4)$$

が導かれ,  $G(t)$  に対しても同様に,

$$\frac{d}{dt} (1 - G(t)) = -(b_1 + b_2)(1 - G(t)) + b_2 e^{-b_1 t} (1 - F(t)). \quad (5)$$

となる.

Jarrow と Yu [3] は (4) (5) に対して解

$$F(t) = G(t) = 1 - \exp \left( -(a+b)t + \frac{b}{a} (1 - e^{-at}) \right)$$

を与えた.

今, Jarrow と Yu のモデルを A, B, C の三つの債

務履行会社に拡張したいが、下記のような単純な拡張をしても、それぞれの独立性が予想されないことと非常に複雑な関係と言う事実により、モデルは上手く機能しない。

$$\begin{aligned}\lambda_t^A &= a_1 + a_2 1_{\{t \geq \tau^B\}} + a_3 1_{\{t \geq \tau^C\}}, \\ \lambda_t^B &= b_1 + b_2 1_{\{t \geq \tau^A\}} + b_3 1_{\{t \geq \tau^C\}}, \\ \lambda_t^C &= c_1 + c_2 1_{\{t \geq \tau^A\}} + c_3 1_{\{t \geq \tau^B\}},\end{aligned}$$

ここで  $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )、は定数、 $\lambda_t^{A,B,C}$  は債務不履行強度、 $\tau^{A,B,C}$  は最初のジャンプとする。そこで

$$\begin{aligned}U(t; c) &= 1 + c \int_0^t e^{cs} (1 - F(s)) ds \\ &= e^{ct} (1 - F(t)) + \int_0^t e^{cs} dF(s) \quad (6) \\ V(t; c) &= e^{ct} (1 - G(t)) + \int_0^t e^{cs} dG(s),\end{aligned}$$

を導入して考える。ここで  $c \in R$  はパラメータ。関数  $U$  と  $V$  はそれぞれ  $F$  と  $G$  それぞれに関係する積分と考えられ、関数  $m_G(c) = \int_0^\infty e^{cs} dG(s)$  と  $m_G(c) = \int_0^\infty e^{cs} dG(s)$  の不完全積分と考えられる。そのとき方程式 (4) (5) は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} U(t; a_1) &= a_1 e^{-a_2 t} V(t; a_2) \\ \frac{d}{dt} V(t; b_1) &= b_1 e^{-b_2 t} U(t; b_2).\end{aligned} \quad (7)$$

となる。

今、三つの未知関数での拡張した非線形モデルを紹介したい。

$$\begin{aligned}F(t) &:= P(t \leq \tau_A), \quad G(t) := P(t \leq \tau_B), \\ H(t) &:= P(t \leq \tau_C)\end{aligned} \quad (8)$$

はそれぞれ企業  $A, B, C$  の最初の債務不履行時間  $\tau_A, \tau_B, \tau_C$  の周辺分布関数とする

(7) の  $U(t; c), V(t; c)$  に加え、次の  $W$  を導入する。

$$W(t; c) = e^{ct} (1 - H(t)) + \int_0^t e^{cs} dH(s) \quad (c \in R)$$

おそらく (7) の最も簡単な非線形の拡張は次の方程式となる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} U(t; a_1) &= a_1 e^{-a_2 t - a_3 t} V(t; a_2) W(t; a_3) \\ \frac{d}{dt} V(t; b_1) &= b_1 e^{-b_2 t - b_3 t} W(t; b_2) U(t; b_3) \quad (9) \\ \frac{d}{dt} W(t; c_1) &= \pm c_1 e^{-c_2 t - c_3 t} U(t; c_2) V(t; c_3).\end{aligned}$$

ここで  $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は正の定数。

このような少し複雑な方法に頼る一つの理由はもし両方の基本的なプロセスが独立な場合、しばしば用いられるが

$(1 - F(t))(1 - G(t))$  のような簡単な乗算はこの場合は適切ではないことによる。

(9) の方程式はある一社の時間発展が他の二社により影響されることを述べている。

$$\begin{aligned}a_1 = b_3 = c_2 &:= a, \quad a_2 = b_1 = c_3 := b, \\ a_3 = b_2 = c_1 &:= c,\end{aligned}$$

$$U(t) := U(t; a_1), \quad V(t) := V(t; b_1), \quad W(t) := W(t; c_1)$$

とすると簡単な計算によって、次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}U'(t) &= a e^{-(b+c)t} V(t) W(t) \\ V'(t) &= b e^{-(c+a)t} W(t) U(t) \\ W'(t) &= \pm c e^{-(a+b)t} U(t) V(t).\end{aligned}$$

更に次のように関数  $u, v, w$  を導入する。

$$\begin{aligned}u(t) &:= U_* U(t) e^{-(a+2^{-1}(b+c))t}, \\ v(t) &:= V_* V(t) e^{-(b+2^{-1}(c+a))t},\end{aligned}$$

$$w(t) := W_* W(t) e^{-(c+2^{-1}(a+b))t},$$

すると  $U_*, V_*, W_*$  は

$$aU_* = \left(a + \frac{b+c}{2}\right) V_* W_*,$$

$$bV_* = \left(b + \frac{c+a}{2}\right) W_* U_*,$$

$$cW_* = \left(c + \frac{a+b}{2}\right) U_* V_*,$$

を満たす.

$$a := a + \frac{b+c}{2}, \beta := b + \frac{c+a}{2}, \gamma := c + \frac{a+b}{2}$$

とおけば方程式 (1), (2) を得る.

## 注意 2

(4), (5) の方程式は容易に解くことができる.

確かに係数行列が非特異であることと

$F(0) = G(0) = 0$  を考慮すれば

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 - F(t) \\ 1 - G(t) \end{pmatrix} \\ &= \exp t \begin{pmatrix} -(a_1 + a_2) & a_2 e^{-a_1 t} \\ b_2 e^{-b_1 t} & -(b_1 + b_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - F(0) \\ 1 - G(0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} (A+B)e^{\lambda_+ t} - (B+a_2 b_2)e^{-(a_1+b_1)t} & e^{\lambda_- t} \\ (C-a_2 b_2)e^{-(a_1+b_1)t} & e^{\lambda_+ t} + (A-C)e^{\lambda_- t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} E &:= a_1 + a_2 - b_1 - b_2 \\ &\quad - \sqrt{(a_1 + a_2 - b_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_2 e^{-(a_1+b_1)t}}, \end{aligned}$$

および

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \{ -(a_1 + a_2 + b_1 + b_2)$$

$$\pm \sqrt{(a_1 + a_2 - b_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_2 e^{-(a_1+b_1)t}} \},$$

$$A := -\frac{E}{4}, \quad B := \frac{a_2 e^{-a_1 t}}{2} E, \quad C := \frac{b_2 e^{-b_1 t}}{2} E,$$

$$D := \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 + a_2 - b_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_2 e^{-(a_1+b_1)t}} E,$$

$$a_{11} := A e^{\lambda_+ t} - a_2 b_2 e^{-(a_1+b_1)t} e^{\lambda_- t},$$

$$a_{12} := B (e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}),$$

$$a_{21} := C (e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}),$$

$$a_{22} := -a_2 b_2 e^{-(a_1+b_1)t} e^{\lambda_+ t} + A e^{\lambda_- t}.$$

とする.

(4), (5) のその他の性質については [4] の研究を参照.

また, この後に出てくる三つの債務履行会社の拡張について [5] を参照.

これらの系に対して次の理論的な結果を得た.

## 3. 債務不履行リスクモデルの解析

### 定理 1

(A) 方程式系 (1) について十分小さな任意の初期値  $(u_0, v_0, w_0)$  に対して, 解  $(u(t; u_0), v(t; v_0), w(t; w_0))$  は原点に指数関数的に収束する.

一方, 十分大きな初期値に対する解は全て有限時間で爆発する.

(爆発するとは有限時間で解が無限大に発散することを言う)

そして解  $(u(t), v(t), w(t))$  が  $t \rightarrow T$  で爆発するとき,

$$\lim_{t \rightarrow T} \sqrt{\beta \gamma} (T-t) u(t) =: u_*,$$

$$\lim_{t \rightarrow T} \sqrt{\gamma \alpha} (T-t) v(t) =: v_*,$$

$$\lim_{t \rightarrow T} \sqrt{\alpha \beta} (T-t) w(t) =: w_*,$$

$$u_*^2 = v_*^2 = w_*^2 = u_* v_* w_* = 1$$

成立する.

さらに  $x(t), y(t), z(t)$  を

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{u_*(1+x(t))}{\sqrt{\beta\gamma}(T-t)}, \\ v(t) &= \frac{v_*(1+y(t))}{\sqrt{\gamma a}(T-t)}, \\ w(t) &= \frac{w_*(1+z(t))}{\sqrt{a\beta}(T-t)} \end{aligned}$$

により定義すれば、次の極限が得られる。

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T} \frac{x(t)}{(\beta + \gamma - a)(T-t)} &= \lim_{t \rightarrow T} \frac{y(t)}{(\gamma + a - \beta)(T-t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow T} \frac{z(t)}{(a + \beta - \gamma)(T-t)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**(証明の方針 1).**

方程式系 (1) の平衡点  $(u_*, v_*, w_*)$  は  $(0,0,0)$ ,  $(1,1,1)$ ,  $(1,-1,-1)$ ,  $(-1,1,-1)$ ,  $(-1,-1,1)$  原点は不変であることは容易にわかる。また上の定理の安定性については平衡点における  $(u_*, v_*, w_*)$  の線形化方程式の係数行列

$$\begin{pmatrix} -a & aw_* & av_* \\ \beta w_* & -\beta & \beta u_* \\ \gamma v_* & \gamma u_* & -\gamma \end{pmatrix}$$

により明確に確かめられる。

実際にどの平衡点でも固有方程式は

$$\lambda^3 + (a + \beta + \gamma)\lambda^2 - 4a\beta\gamma = 0$$

となり、これは一つの正根と二つの負根をもつ。原点に収束する解の存在を容易に確認することができる。

**証明の方針 2.**

(i)  $\varepsilon > 0$  を

$$\delta = : \min\{a, \beta, \gamma\} - \frac{a + \beta + \gamma}{3} \varepsilon > 0,$$

のように十分小さくとり領域  $D$  を次のように定める。

$$D : am = \{(u, v, w) \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq \varepsilon^2\}$$

$D$ 内から出発する解は全て原点に指数関数的に収束する。

**証明**

$u(t), v(t), w(t)$  をそれぞれ一番目、二番目、三番目の方程式にかけてそれぞれの項を足し合わせると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u(t)^2 + v(t)^2 + w(t)^2) &= -au(t)^2 - \beta v(t)^2 - \gamma w(t)^2 \\ &\quad + (a + \beta + \gamma)u(t)v(t)w(t) \\ &\leq -\min\{a, \beta, \gamma\}(u(t)^2 + v(t)^2 + w(t)^2) \\ &\quad + \frac{a + \beta + \gamma}{3}(u(t)^3 + v(t)^3 + w(t)^3) \\ &\leq -\delta(u(t)^2 + v(t)^2 + w(t)^2). \end{aligned}$$

最後の不等式から

$$u(t)^2 + v(t)^2 + w(t)^2 \leq e^{-2\delta t}(u(0)^2 + v(0)^2 + w(0)^2),$$

を満たし、 $(u, v, w) \in D$  についての仮定から命題が従う。

**(証明終)**

次に有限時間で爆発する解の存在についての証明は次の命題で示す。

ここで  $u(t), v(t), w(t)$  が全て正の場合について考える。

$u(t), v(t), w(t)$  の二つが負になる他のケースがあるが、省略しても差し支えない。

**命題 2**

初期値  $(u_0, v_0, w_0)$  が

$$u_0 \gg \frac{\max\{a, \beta, \gamma\}}{\sqrt{\beta\gamma}}$$

$$v_0 \gg \frac{\max\{a, \beta, \gamma\}}{\sqrt{\gamma a}}$$

$$w_0 \gg \frac{\max\{a, \beta, \gamma\}}{\sqrt{a\beta}}$$

を満たす解は全て有限時間でブローアップする.

(証明)

$a \geq \beta \geq \gamma$  と仮定する.

一番目と二番目の方程式にそれぞれ  $\beta u(t)$ ,  $av(t)$  をかけ, 一番目から二番目の方程式を引くと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\beta u(t)^2 - av(t)^2) &= -a\beta u(t)^2 + \beta av(t)^2 \\ &\leq -a(\beta u(t)^2 - av(t)^2). \end{aligned} \quad (10)$$

よって,

$$\beta u(t)^2 - av(t)^2 \leq e^{-2at} (\beta u(0)^2 - av(0)^2).$$

もし  $\beta u(t)^2 \geq av(t)^2$  ならば, 十分小さな  $\varepsilon > 0$  と十分大なる  $t$  に対して  $\sqrt{av}(t) \geq \sqrt{\beta}u(t) - \varepsilon/2$  一方  $\beta u(t)^2 \geq av(t)^2$  ならば  $\sqrt{av}(t) \geq \sqrt{\beta}u(t)$  どちらの場合にも次の評価を得る.

$$\sqrt{av}(t) \geq \sqrt{\beta}u(t) - \varepsilon/2.$$

同様にして, 十分小さな  $\varepsilon > 0$  にたいして

$$\begin{aligned} \gamma u(t)^2 - aw(t)^2 &\leq e^{-2at} (\gamma u(0)^2 - aw(0)^2), \\ \sqrt{aw}(t) &\geq \sqrt{\gamma}u(t) - \varepsilon/2, \end{aligned}$$

$$u'(t) \geq -au(t) + (\sqrt{\beta\gamma} - \varepsilon)u(t)^2 > 0,$$

これらの評価を組み合わせると次の評価を得ることができる.

$$u'(t) \geq -(a + \varepsilon)u(t) + \sqrt{\beta\gamma}u(t)^2 > 0,$$

これから次の評価が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + \varepsilon} \left( \log \left| \frac{\sqrt{\beta\gamma}u(t) - a - \varepsilon}{u(t)} \right| \right. \\ \left. - \log \left| \frac{\sqrt{\beta\gamma}u(0) - a - \varepsilon}{u(0)} \right| \right) \geq t. \end{aligned}$$

したがって  $u$  の最大存在時間が有限であるとの評価が得られ,  $v$  と  $u$  の最大存在時間も有限となる.

爆発する解のより詳しく分析をする.

次の定理を証明する.

### 定理 3

(1) の解  $(u(t), v(t), w(t))$  は  $t \rightarrow T$  で破綻する. すなわち  $\lim_{t \rightarrow T} (|u(t)| + |v(t)| + |w(t)|) = \infty$  として,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T} \sqrt{\beta\gamma}(T-t)u(t) &=: u_*, \\ \lim_{t \rightarrow T} \sqrt{\gamma a}(T-t)v(t) &=: v_*, \\ \lim_{t \rightarrow T} \sqrt{a\beta}(T-t)w(t) &=: w_*, \end{aligned}$$

また,  $u_*^2 = v_*^2 = w_*^2 = u_* v_* w_* = 1$  を得る.

更に次のように  $x(t), y(t)$ , と  $z(t)$  を定める.

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{u_*(1+x(t))}{\sqrt{\beta\gamma}(T-t)}, \quad v(t) = \frac{v_*(1+y(t))}{\sqrt{\gamma a}(T-t)}, \\ w(t) &= \frac{w_*(1+z(t))}{\sqrt{a\beta}(T-t)}, \end{aligned}$$

すると

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T} \frac{x(t)}{(\beta + \gamma - a)(T-t)} &= \lim_{t \rightarrow T} \frac{y(t)}{(\gamma + a - \beta)(T-t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow T} \frac{z(t)}{(a + \beta - \gamma)(T-t)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

となる.

**{注意}**

特に  $a = \beta = \gamma = 1$  とすると,  $u(t) \equiv v(t) \equiv w(t)$  となる.

そして, 単一の方程式  $u'(t) = -u(t) + u(t)^2$  となり,  $u(t) = 1/(1 - e^{-(T-t)})$  となる.

上の定理はこの解が典型的な爆発のパターンであることを表している.

**(証明)**

3段階に分けて証明する。

**(段階1)**

$u(t), v(t), w(t)$  が同時に、単調に爆発することを示す。同時爆発は前の命題で示して性質から容易に示される。すなわち、ある定数  $M$  に対して、

$$|\beta u(t)^2 - \alpha v(t)^2| + |\gamma v(t)^2 - \beta w(t)^2| + |\alpha w(t)^2 - \gamma u(t)^2| \leq M < \infty,$$

だからである。

次に、 $u(t), v(t), w(t)$  が単調に爆発することを示そう。

$u(t)$  が爆発しないならば、 $u'(t_n) = 0$  かつ  $u(t_n) \rightarrow +\infty$  または  $u(t_n) \rightarrow -\infty$  となるような  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots \rightarrow T$  が存在する。

正の場合を考えよう。

(10) から、 $n \rightarrow -\infty$  として  $v(t_n)v'(t_n) = O(1)$  とできる、

$$-\beta v(t_n)^2 + \beta u(t_n)v(t_n)w(t_n) = O(1)$$

特に、

$$\begin{aligned} -v(t_n) + w(t_n)u(t_n) &= O(1), \\ 0 = u'(t_n) &= -\alpha u(t_n) + \alpha v(t_n)w(t_n) \end{aligned}$$

であることを考えると、

$$O(1) = -v(t_n) + w(t_n)u(t_n) = -v(t_n) + v(t_n)w(t_n)^2.$$

となる。

したがって  $w(t_n)^2 = O(1) (n \rightarrow \infty)$  となり矛盾する。

したがって、 $u(t)$  は単調に爆発する。

同様に  $v(t), w(t)$  も単調に爆発する。

**(段階2)**

$u(t) \rightarrow +\infty (t \rightarrow T)$  の場合を考えよう。

十分小さな  $\varepsilon > 0$  に対して  $t_\varepsilon < t < T$  で

$$\begin{aligned} u'(t) = -\alpha u(t) + \sqrt{\beta\gamma}(u(t) + O(1))^2 &\geq \frac{\sqrt{\beta\gamma}}{1 + \varepsilon} u(t)^2, \\ u'(t) &\leq \frac{\sqrt{\beta\gamma}}{1 - \varepsilon} u(t)^2 \end{aligned}$$

となるような  $t_\varepsilon < T$  をとると。

$$1 - \varepsilon \leq |\sqrt{\beta\gamma}(T - t)u(t)| \leq 1 + \varepsilon$$

$|\sqrt{\gamma\alpha}(T - t)v(t)|$  と  $|\sqrt{\alpha\beta}(T - t)w(t)|$  についても同様にできる。

**(段階3)**

$(u_*, v_*, w_*)$  を  $u_*^2 = v_*^2 = w_*^2 = u_* v_* w_* = 1$  とする。次の変数  $x, y, z$  を導入する。

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{u_*(1 + x(\tau))}{\sqrt{\beta\gamma}(T - t)}, \\ v(t) &= \frac{v_*(1 + y(\tau))}{\sqrt{\gamma\alpha}(T - t)}, \\ w(t) &= \frac{w_*(1 + z(\tau))}{\sqrt{\alpha\beta}(T - t)}, \\ \tau &= -\log(T - t) \end{aligned}$$

$(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) (\tau \rightarrow \infty)$  の漸近挙動を調べる。

$$\begin{aligned} x'(\tau) &= -x(\tau) + y(\tau) + z(\tau) \\ &\quad - \alpha(1 + x(\tau))e^{-\tau} + y(\tau)z(\tau) \\ y'(\tau) &= x(\tau) - y(\tau) + z(\tau) \\ &\quad - \beta(1 + y(\tau))e^{-\tau} + z(\tau)x(\tau) \\ z'(\tau) &= x(\tau) + y(\tau) - z(\tau) \\ &\quad - \gamma(1 + z(\tau))e^{-\tau} + x(\tau)y(\tau). \end{aligned} \tag{11}$$

(11) において  $\tau \leq \tau_\varepsilon$  で

$$|x(\tau)| \leq \varepsilon, \quad |y(\tau)| \leq \varepsilon, \quad |z(\tau)| \leq \varepsilon$$

となるような  $\tau_\varepsilon$  が存在する。

すなわち

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} z(\tau) = 0.$$

例えば、(11) の一行目から二行目を引くと

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(x(\tau) - y(\tau)) &= -(2 + z(\tau))(x(\tau) - y(\tau)) \\ &\quad - (\alpha(1 + x(\tau)) - \beta(1 + y(\tau)))e^{-\tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (x(\tau) + ae^{-\tau} - y(\tau) - \beta e^{-\tau})^2 \\ = -(2 + z(\tau))(x(\tau) + ae^{-\tau} - y(\tau) - \beta e^{-\tau})^2 \\ - e^{-\tau} (a(x(\tau) - z(\tau)) - \beta(y(\tau) - z(\tau))) \cdot \\ \cdot (x(\tau) + ae^{-\tau} - y(\tau) - \beta e^{-\tau}). \end{aligned}$$

となる.

したがって任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $\tau \geq \tau_1 \geq \tau_\varepsilon$  で

$$\begin{aligned} (x(\tau) + ae^{-\tau} - y(\tau) - \beta e^{-\tau})^2 \\ \leq e^{-2(2-\varepsilon)(\tau-\tau_1)} (x(\tau_1) + ae^{-\tau_1} - y(\tau_1) - \beta e^{-\tau_1})^2 \\ + \frac{o(1)}{\varepsilon(1-\varepsilon)} e^{-\tau}, \\ y(\tau) = x(\tau) + (a - \beta)e^{-\tau} + o(e^{-\tau}), \end{aligned}$$

となるような  $\tau_\varepsilon$  が対応する.

同様に,  $\tau \geq \tau_\varepsilon$  に対し,

$$z(\tau) = x(\tau) + (a - \beta)e^{-\tau} + o(e^{-\tau}), \quad (12)$$

(11) に戻り

$$x'(\tau) = x(\tau) - (\beta + \gamma - a)(1 + x(\tau))e^{-\tau} + x(\tau)^2 + o(e^{-\tau}),$$

従って  $\tau \geq \tau_\varepsilon$  に対して

$$\begin{aligned} \left( x(\tau) - \frac{\beta + \gamma - a}{2} e^{-\tau} \right)' \\ = \left( x(\tau) - \frac{\beta + \gamma - a}{2} e^{-\tau} \right)^2 \\ + \left( x(\tau) - \frac{\beta + \gamma - a}{2} e^{-\tau} \right) + o(e^{-\tau}), \end{aligned}$$

$x(\tau) - 2^{-1}(\beta + \gamma - a)e^{-\tau} \rightarrow 0$  ( $\tau \rightarrow \infty$ ) から, すべての  $\varepsilon > 0$  に対し,

$$x(\tau) - \frac{\beta + \gamma - a}{2} e^{-\tau} + o(e^{-\tau}) \rightarrow 0 \quad (\tau \rightarrow \infty)$$

従って (14) を考慮して

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{e^\tau x(\tau)}{\beta + \gamma - a} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{e^\tau y(\tau)}{\gamma + a - \beta} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{e^\tau z(\tau)}{a + \beta - \gamma} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

が成り立つ.

(証明終)

方程式 (2) に関して, 次のことを示しておく.

#### 命題 4

任意の初期値  $(u_0, v_0, w_0)$  に対して, (2) の解  $(u(t), v(t), w(t))$  は

$$\begin{aligned} u(t)^2 + v(t)^2 + \frac{a + \beta}{\gamma} w(t)^2 \\ \leq e^{-2\min\{a, \beta, \gamma\}t} \left( u_0^2 + v_0^2 + \frac{a + \beta}{\gamma} w_0^2 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

を満たす.

(証明)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( u(t)^2 + v(t)^2 + \frac{a + \beta}{\gamma} w(t)^2 \right)^2 \\ = au(t)^2 - \beta v(t)^2 - (a + \beta)w(t)^2 \\ \leq -\min\{a, \beta, \gamma\} \left( u(t)^2 + v(t)^2 + \frac{a + \beta}{\gamma} w(t)^2 \right)^2, \end{aligned}$$

を計算すると, (13) の不等式が成り立つ.

(証明終)

## 4. 数値シミュレーション

以上の解析的な結果を数値的に示すために以下の条件で数値シミュレーションを行った. (文献 [1], [4], [5] 参照)

特に爆発時間の計算は単純な計算では良い結果を得られないので, 多倍長計算を行なった.

1. 100桁の多倍長
2. 四次のルンゲクッタ法を使用
3.  $a = 4.0, \beta = 3.0, \gamma = 2.0$  として計算
4. コンピュータは OS: Winsows XP CPU: Intel Celeron D プロセッサ-326 を使った

**計算 1.**

$\varepsilon > 0$  を

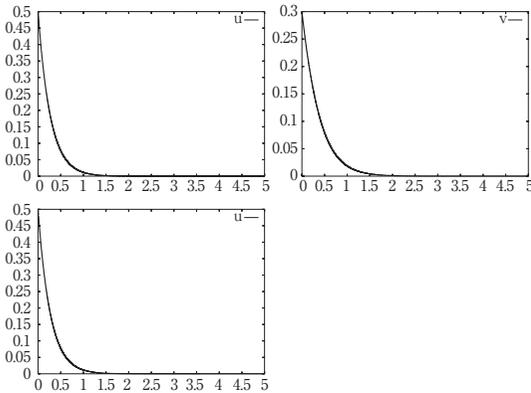
$$\min\{a, \beta, \gamma\} - \frac{a + \beta + \gamma}{3} \varepsilon > 0,$$

のように十分小さくとると領域

$$D := \{(u, v, w) \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq \varepsilon^2 = 4/9\}$$

内から始まる解は全て原点に指数関数的に収束する。

次の図は十分小さな初期値  $u, v, w$  が原点に収束する動きを表したものである。横軸は時間を表す。



**計算 2.**

次の図は十分大きな初期値

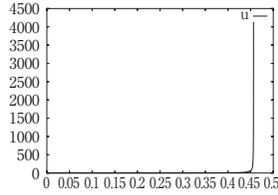
$$u_0 = \frac{\max\{a, \beta, \gamma\}}{\sqrt{\beta\gamma}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

$$v_0 = \frac{\max\{a, \beta, \gamma\}}{\sqrt{\gamma a}} = \frac{4}{\sqrt{8}}$$

$$w_0 = \frac{\max\{a, \beta, \gamma\}}{\sqrt{a\beta}} = \frac{4}{\sqrt{12}}$$

に対し、 $u$  がブローアップする動きを表したものである。 $v, w$  も同じ時間  $T$  で同じ挙動を示す。横

軸は時間を表す。

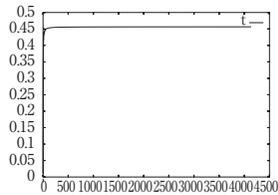


このように  $T$  に近づくときブローアップすることが分かる。 $t, u$  を数値でみると

- 0.45659695106724  $7.787758304 \times 10^{12}$
  - 0.45659695106725  $9.623373317 \times 10^{12}$
  - 0.45659695106726  $1.259072310 \times 10^{13}$
  - 0.45659695106727  $1.820022196 \times 10^{13}$
  - 0.45659695106728  $3.275116972 \times 10^{13}$
  - 0.45659695106729  $1.379006839 \times 10^{14}$
  - 0.45659695106730  $2.710734727 \times 10^{19}$
  - 0.45659695106731  $2.371515449 \times 10^{102}$
  - 0.45659695106732  $2.792791492 \times 10^{1429}$
  - 0.45659695106733  $3.821548572 \times 10^{22662}$
- とブローアップしているのがわかる。

**計算 3.**

計算 2 の図を縦軸を時間に、横軸を  $u$  の値にとった図である。



**計算 4.**

次の図は

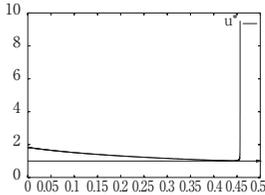
$$\lim_{t \rightarrow T} \sqrt{\beta\gamma}(T-t)u(t) =: u_*,$$

$$\lim_{t \rightarrow T} \sqrt{\gamma a}(T-t)v(t) =: v_*,$$

$$\lim_{t \rightarrow T} \sqrt{a\beta}(T-t)w(t) =: w_*,$$

$$u_*^2 = v_*^2 = w_*^2 = u_* v_* w_* = 1$$

となる  $u_*$  の挙動を数値的に求めたものであり、 $v_*, w_*$  も同じ挙動をしめす。

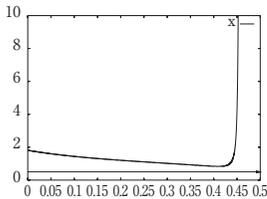


### 計算 5.

次の図は

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T} \frac{x(t)}{(\beta + \gamma - a)(T - t)} &= \lim_{t \rightarrow T} \frac{y(t)}{(\gamma + a - \beta)(T - t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow T} \frac{z(t)}{(a + \beta - \gamma)(T - t)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

を数値的に求めたものである。



### (結論)

1. 計算 1 で見られるように小さな初期値に対して得られる解の非常に早い 0 への収束が捉えら

れている。

2. 大きな初期値に対する爆発が計算 2 によって捉えられている。

3. 計算 2, 3 に見られるように爆発時間の計算は多倍長計算を用いても容易には得られない。

4.  $u_*, v_*, w_*$  の計算も同様である。

5. 漸近的な挙動に伴う数値を高精度に求める方法の開発が必要であり、次の課題である。

## 5. 参考文献

- [1] N. Ishimura and M. A. Nakamura: System of nonlinear ODEs of default risk model, preprint.
- [2] N. Ishimura and M. Nakamura, Blow-up behavior of a system of nonlinear ODEs. Journal of research institute of Science and Technology, College of Science and Technology, Nihon University, No.130, pp.1-8. 2013.3.
- [3] M. Inoue, N. Ishimura and M. Nakamura: Numerical Study on the Systems of Nonlinear Ordinary Differential Equations for Default Risk Model, the Proceedings of the 17th International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management, 1066-1069.
- [4] S. Kusuoka: A remark on default risk models, *Advances in Mathematical Economics*, 1 (1999), 69-82.
- [5] R. A. Jarrow and F. Yu: Counterparty risk and the pricing of defaultable securities, *J. Finance*, 56 (2001), 1765-1799.