Cournot 均衡の動学的性質：成長率による調整過程

吉田博之*
日本大学経済学部

Abstract

本稿では，Cournot 均衡の動学的性質について検討する．その際に，成長ルールによる調整過程を想定して，複占の市場均衡の安定性について考察する．最初に，Liapunov の安定性定理を用いることによって，Cournot 均衡の大域的安定性を証明する．次に，生産決定に関するタイムラグを明示的に考慮した調整過程モデルにおいて，カオスが発生することを数値計算で確認する．

*yoshida@eco.nihon-u.ac.jp

1　はじめに

Cournot (1838) の複占モデルは，ミクロ経済学で最も重要かつ有名な話題の 1 つであり，学部レベルのテキストにも必ず登場する．Cournot は，複占市場の戦略的依存関係を明確に数学的モデルとして初めて構築した．出版当初は正当な評価を得ることができなかったようであるが，Nash 均衡との関連性を含めて，現代では多くの経済学者によってさまざまな観点から Cournot モデルは拡張され，その含意が論じられている[1].

例えば，Theocharis (1960) が Cournot 動学に関する不安定性に関する論文を発表するや否や，Fisher (1961)，McManus and Quandt (1961)，Hahn (1962)，および McManus (1962) などによって Cournot の安定性に関する論争が巻き起こった．このような反応の理由は，均衡点の不安定性を忌避する傾向が経済学的思考の根底にあったからだと考えられる．企業の生産量が収束せずに発散してしまうという理論的帰結には経済学的な有用性が存在しないという暗黙の了解がその当時にあったことは否定できないであろう．

このような潮流とは一線を画して，新たな知見を提供したのが Rand (1978), Puu (1991), Kopel (1996) などの研究である．彼らは，カオス理論を利用することで，均衡点は不安定であるが，発散することなしに不規則な挙動を示す動学過程についての研究の出発点を築いた．彼らは離散動学体系において，非線型の最適反応関数をもとにカオス動学の導出に成功している．この後，多くの研究者がこの拡張モデルを発表していることは言うまでもない．

本稿では Cournot モデルを連続動学体系（微分方程式体系）を用いて考察する．本稿の主な目的は，線型の反応関数のもとで，Cournot の調整過程にカオス動学が発生し得ることを示すことにある．先ほど述べたように， Rand，Puu，Kopel などの結果に触発されて， 離散動学体系におけるカオスを報告した論文の集積には膨大なものがある．しかしながら，連続動学体系を用いてカオスの発生について論証した論文は筆者の知る限り存在しない．この点に本稿の貢献があると思われる．

本稿の構成は以下のようになる．第 2 節では，複占モデルの基本モデルを提示する．この際には，Cournot 動学過程の大域的安定性について解析的な証明を与える．第 3 節では，第 2 節の基本モデルにタイムラグを導入した時間遅れ微分方程式体系を提示し，その動学的性質について数値計算による検討を加える．第 4 節は結論をまとめる．

[1]Okuguchi （1976）は Cournot モデルの包括的な研究書である．

2　基本的枠組み

まず，最初に基本モデルの提示を行なう．企業 1 と企業 2 が同質財を生産していることを想定する．企業 1 の生産量を x_1，企業 2 の生産量を x_2 とする．さらに，需要関数を線型とし，

$$p = a - b(x_1 + x_2),\ a > 0, b > 0, \tag{1}$$

と特定化する．ただし，財の価格を p とする．

企業 i の費用関数を $C_i(x_i) = c_i x_i (c_i > 0)$ と特定化すれば，企業の利潤 π_i は以下のように定義される（$i = 1, 2$）．

$$\pi_1 = [a - b(x_1 + x_2)]x_1 - c_1 x_1, \tag{2}$$

$$\pi_2 = [a - b(x_1 + x_2)]x_2 - c_2 x_2. \tag{3}$$

各企業は相手企業の生産量を所与として，利潤最大化を行なう．このとき，利潤最大化のための 1 階条件はそれぞれ

$$a - b(x_1 + x_2) - bx_1 - c_1 = 0, \tag{4}$$

$$a - b(x_1 + x_2) - bx_2 - c_2 = 0. \tag{5}$$

と書ける．企業 1 の利潤最大化条件を整理することによって

$$x_1 = R_1(x_2) = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{a - c_1}{2b} \tag{6}$$

を得る．これを企業 1 の最適反応関数と呼ぶ．企業 2 の生産量を所与にして，企業 1 が利潤最適化を達成するように生産量を決定するのである．この場合，企業 2 が生産量を 1 単位増加させれば，それに応じて企業 1 が利潤を最大化するために生産量を 1/2 単位減少させることを企業 1 の最適反応関数が示している．

同様に，企業 2 の利潤最大化条件を整理することによって企業 2 の最適反応関数を導出が可能であり，以下のように表現される．

$$x_2 = R_2(x_1) = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{a - c_2}{2b}. \tag{7}$$

両企業の最適反応関数の交点，つまり,（6）と（7）を同時に満たす値

$$x_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b},\ x_2^* = \frac{a + c_1 - 2c_2}{3b}$$

は Cournot-Nash（CN）均衡と呼ばれる．この均衡点のもとでは両企業ともに生産量を変更させる誘引を持たない．なお，我々のモデルでは，CN 均衡が一意であることに注意し

よう．さらに，CN 均衡の正値性を保証するために，$a - 2c_1 + c_2 > 0$ と $a + c_1 - 2c_2 > 0$ が成立することを仮定する．

次に，本稿で大きな意味を持つ調整過程について定義してみよう．ここでは，??? などで標準的に採用されている調整ルールを用いる．自分の最適反応生産量と現実の生産量を比較して，その差が正であれば生産量を増加させ，逆に，その差が負であれば生産量を減少させるとする．多くの文献では，その差に比例して生産の増分を決定するというルールが採用されているが，本稿では，その差に比例して生産の変化率（成長率）を決定するというルールを採用する．つまり，次のような調整ルールを想定する．

$$\frac{\dot{x}_1}{x_1} = \gamma_1(R_1(x_2) - x_1),\ \gamma_1 > 0, \tag{8a}$$

$$\frac{\dot{x}_2}{x_2} = \gamma_2(R_2(x_1) - x_2),\ \gamma_2 > 0 \tag{8b}$$

このような調整ルールの経済学的利点は任意の時間において財の生産量が正であり続けるということにある．これについて補題としてまとめておく．

補題 1 初期値 $(x_1(0), x_2(0)) \in R^2_{++}$ を考える．このとき，任意の $t(>0)$ に対して $(x_1(t), x_2(t)) \in R^2_{++}$ が成立する．

証明：初期値問題 $(x_1(0), x_2(0)) \in R^2_{++}$ を考える．ある時点 t_1 において，$x_1(t_1) \leq 0$ になったとしよう．これは，時点 $t_0(0 < t_0 \leq t_1)$ において解軌道が x_2 軸と交差したことを意味する．しかしながら，x_2 軸は $(0, x_2')$（$x_2\prime$ は任意の正値）を初期値とする解軌道であるので，このようなことは起こりえない（解の一意性）．したがって，背理法により，初期値が $(x_1(0), x_2(0)) \in R^2_{++}$ であれば，任意の時点に対して，$x_1(t) > 0$ が成立する．

また，ある時点 t_1 において，$x_2(t_1) \leq 0$ になることを仮定しても，同様の論法でこの仮定が解の一意性と矛盾することが証明できる．以上により，補題が証明された．(証明終)

では，NC 均衡の大域的安定について考察しよう．我々は Liapunov の安定性定理を用いて，NC 均衡が大域的に漸近安定であることを証明することを試みる[2]．なお，Liapunov の安定性定理の詳細については，本稿の末尾にある Appendix を参照のこと．最適反応関数を考慮することにより，我々は以下の微分方程式体系を得る．

$$\dot{x}_1 = \gamma_1(-x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{a - c_1}{2b})x_1, \tag{9a}$$

$$\dot{x}_2 = \gamma_2(-\frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{a - c_2}{2b})x_2. \tag{9b}$$

[2]経済学における動学分析では，均衡点における Jacobi 行列を求めることによって安定性を確認することが多い．しかしながら，これは均衡点における局所的な安定性のみを検討していることに注意しなければならない．本稿では大域的安定性を証明するので，Jacobi 行列による局所的安定性分析は省略する

この微分方程式体系について以下の定理を得る．

定理 1 NC 均衡は R^2_{++} において大域的に漸近安定である．

証明：次の関数を導入する．

$$V(x_1,x_2)=(x_1-x_1^*)^2+(x_2-x_2^*)^2+(x_1-x_1^*)(x_2-x_2^*) \tag{10}$$

まず，この関数について，

$$V(x_1,x_2)=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_1^*)+\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2-x_2^*)\right]^2+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_1^*)-\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2-x_2^*)\right]^2 \tag{11}$$

と変形できることに注意しよう．これにより，$V(x_1^*,x_2^*)=0$ かつ $(x_1,x_2)\neq(x_1^*,x_2^*)$ のとき $V(x)>0$ であることが確認できる（これは，2 次形式に関する議論の援用である．この点については，例えば，Hoy, Livernois, McKenna, Rees, and Stengos (2001, Chapter 10.3) を参照されたい）．

次に,（10）を時間 t で微分すると，

$$\dot{V}=\dot{x}_1[2(x_1-x_1^*)+(x_2-x_2^*)]+\dot{x}_2[(x_1-x_1^*)+2(x_2-x_2^*)] \tag{12}$$

である．これに対して（9）を考慮すると，CN 均衡点以外の R^2_{++} において

$$\dot{V}=-\frac{2(\dot{x}_1)^2}{\gamma_1x_1}-\frac{2(\dot{x}_2)^2}{\gamma_2x_2}<0 \tag{13}$$

が成立することが分かる（補題 1 により，すべての t に対して $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の正値性が保証されていることに注意せよ）．したがって，関数 V は Liapunov 関数であり，CN 均衡点は R^2_{++} において大域的に漸近安定であることが証明された.（証明終）

3 時間遅れのある調整過程

我々は，前節で複占市場における調整過程を取り上げ，経済的に有意味な範囲（R^2_{++}）で任意の初期値に対して，CN 均衡が大域的に安定であることを示した．本節では，時間遅れの存在する調整過程において CN 均衡の動学的性質がいかに変容するかについて考察を深めたい．現実の経済において，企業の生産に関する時間的なラグが多く存在している．例えば，企業の生産に関する意思決定のラグや相手企業の生産量を認知するラグなどがある．これを考慮して以下のような調整過程を考える[3].

[3]すでに，Howroyd and Russell (1984) と Russell, Richard, and Howroyd (1986) が，Cournot の動学的調整過程において，時間遅れを導入した分析を行なっている．彼らの分析と本稿の分析上の大きな違いとして，彼

$$\frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} = \gamma_1(R_1(x_2(t-r_1)) - x_1(t-s_1)),\ \gamma_1 > 0, \tag{14a}$$

$$\frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)} = \gamma_2(R_1(x_1(t-r_2) - x_2(t-s_2)),\ \gamma_2 > 0 \tag{14b}$$

ここで，r_i はライバル企業の生産量に関する企業 i のタイムラグであり，s_i は自企業の生産量に関する企業 i のタイムラグである．

では，動学体系（14）に関する分析に移ろう．この体系は時間遅れ微分方程式体系もしくは差分–微分方程式と呼ばれるものである．経済学に限らず，物理学や生物学でも，時間遅れ微分方程式の重要性は古くから認識されているにも関わらず，数学的な困難さゆえに定性的な議論が十分に確立されていない．したがって，この節では，数値計算による分析結果を提示する．

数値計算を実行する上で，次のように数値パラメーターを特定化する．

$$a = 3, b = 1, c_1 = c_2 = 1, \alpha_2 = 2, s_1 = 1.1, r_1 = 1.8, s_2 = 0.8, r_2 = 1.8$$

このとき，NC 均衡は $x_* = y_* = 2/3$ である．

まず，$\alpha_1 = 1.1$ として，数値計算を行なった．この場合，図 1 に示されるように，CN 均衡は安定的であり，時計回りに CN 均衡点へと収束していく．なお，視認性を向上させるために，(x_1, x_2) 平面ではなく，自然対数で変換した $(\ln x_1, \ln x_2)$ 平面でグラフを描写していることに注意されたい．

次に，α_1 の値を小刻みに変化させることに伴なう動学的性質の変化についてみよう．一連の結果が図 2–6 に示される．各図には 2 種類のグラフを提示している．各図の上部に企業 1 の生産量 x_1 の時系列データ，そしてその下部に $(\ln x_1, \ln x_2)$ 平面における解軌道を描いている[4]．

図 2 では，$\alpha_1 = 2$ とした．図 2 上部の x_1 の時系列データに着目すると，x_1 について 1 つの山と 1 つのの谷が存在する．この意味で，1 周期のサイクルが存在している．また，図 2 下部においては，ねじれたリミットサイクルが観察される．そして，α_1 の値を $\alpha_1 = 2.6$ まで増加させると，図 3 を得る．図 3 上部には，2 つの山と 2 つの谷を有する 2 周期解を確認することができる．つまり，調整速度 α_1 の上昇により「分岐」が発生し，x_1 の周期が倍加しているのである．このことは，図 3 下部の $(\ln x_1, \ln x_2)$ 平面における解軌道を観察することでも理解できる．

らのモデルでは，調整ルールとして増分ルールが採用されているのに対し，我々のモデルでは，成長率ルールが用いられているが挙げられる．彼らの分析対象は線型動学であるが，我々の分析対象は成長ルールの想定によって非線型動学体系となっている．

[4] $(\ln x_1, \ln x_2)$ 平面にグラフを作図するに当たり，移行過程の解軌道は取り除き，最終的な解軌道のみをプロットしている．

さらに，α_1 の値を $\alpha_1 = 2.74$ にまで増加させると，4 周期解が発生（図 4）し，これよりも大きな値 $\alpha_1 = 2.78$ では，8 周期解が出現（図 5）している．最後に，$\alpha_1 = 2.87$ に設定すると，カオスが観察される．決定論的な動学体系において，CN 均衡点に収束することなく，不規則で非対称的な生産量の変動を見ることができる．

これらの結果から，周期倍加分岐が発生し，最終的にはカオス（いわゆるストレンジ・アトラクター）が発生していることを確認できる．これはカオスに到る道筋として典型的に見られる現象である．経済学含意として，調整速度が速くなればなるほど，生産量の変動の幅が大きくなると同時に解の挙動が複雑になっていくことが挙げられる．利潤最大化を保証する最適反応生産量に速く適応しようとすればするほど，企業の思惑とは別に CN 均衡は実現せず，大きな生産量の変動をもたらすのである．

4　結論

本稿では，Cournot 複占モデルの調整過程について安定性分析を行なった．時間遅れがない場合には，Liapunov の安定性定理を用いることによって CN 均衡の大域的漸近安定性について解析的に証明を行なった．

さらに，動学的調整過程に時間遅れが生じる場合には，数値パラメーターの値により，周期倍加分岐が発生し，最終的にはカオス（ストレンジ・アトラクター）が発生することが数値計算によって確かめられた．

最後に，今後の研究の方向について言及しておこう．本稿のモデルは，線型の需要関数と線型の費用関数という特定の仮定のもとで分析が行なわれた．これらの想定を一般化する必要があると思われる．この点については将来の課題としたい．

Appendix A：リアプノフの安定性定理

この Appendix では，Liapunov の安定性定理を提示する．この定理の詳細については，例えば， Guckenheimer and Holmes (1983) や Hirsch and Smale (1974) を参照されたい．

リアプノフの安定性定理

n 次元 1 階微分方程式体系を考える．

$$\dot{x} = f(x),\ x \in R^n$$

x_* をその均衡点とする．また，

さらに，$V\colon U \to \mathbf{R}$ を x_* の近傍 $U \subset W$ において定義された C^1 関数であり，

(a) $V(x_*) = 0$ かつ $x \neq x_*$ ならば，$V(x) > 0$.

(b) $U - \{x_*\}$ 上において $\dot{V} \leq 0$.

を満たすとする．このとき，x_* は安定である．さらに，もし，

(c) $U - \{x_*\}$ 上において $\dot{V} < 0$

となるならば，x_* は漸近安定である．

なお，上記の定理の条件を満たす関数 V を Liapunov 関数と呼ぶ．

References

1. Cournot, A. (1838) *Recherches sur les Principles Mathematiques de la Theory des Richesses*, Paris: Hachette （中山 伊知郎訳（1982）『富の理論の数学的原理に関する研究』日本経済評論社）

2. Fisher, F.M. (1961) The stability of the Cournot oligopoly solution: The effects of speeds of adjustment and increasing marginal costs, *Review of Economic Studies*, 28, pp. 125–135

3. Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1983) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, New York: Springer

4. Hahn (1962) The stability of the Cournot oligopoly solution, *Review of Economic Studies*, 29, pp. 329–333

5. Hirsch, M.W. and Smale, S. (1974) *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, San Diego: Academic Press

6. Howroyd, T.D. and A.M. Russell (1984) Cournot oligopoly models with time delays, *Journal of Mathematical Economics*, 13, pp. 97–103

7. Kopel, M. (1996) Simple and complex adjustment dynamics in Cournot duopoly, *Chaos, Solitons and Fractals*, 7, pp. 2031–2048

8. McManus, M. and Quandt, R.E. (1961) Comments on the stability of the Cournot oligopoly solution, *Review of Economic Studies*, 28, pp. 136–139

9. McManus, M (1962) Dynamic Cournot-type oligopoly models – A correction, *Review of Economic Studies*, 29, pp. 337–339

10. Hoy, M., Livernois, J., McKenna, C. , Rees, R., and Stengos, A. (2001) *Mathematics for Economics*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press

11. Okuguchi, K. （1976） *Expectations and Stability in Oligopoly Models*, Berlin: Springer

12. Puu, T. (1991) Chaos in duopoly pricing, *Chaos, Solitons and Fractals*, 1, pp. 573–581

13. Rand, D. (1978) Exotic phenomena in games and duopoly models, *Journal of Mathematical Economics*, 5, pp. 173–184

14. Russell, A. M., Rickard, J.A., and Howroyd, T.D. (1986) The Effects of delays on the stability and rate of convergence to equilibrium of oligopolies, *Economic Record*, 62, pp. 194–198

15. Theocharis, R.D. (1960) On the stability of the Cournot solution of the oligopoly problem, Review of Economic Studies, 27, pp. 133–134

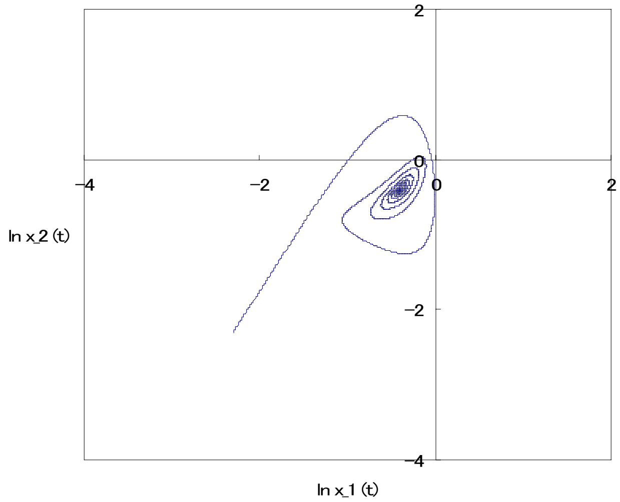


図 1．CN 均衡への収束（時計回り）：　$\alpha_1 = 1.1$

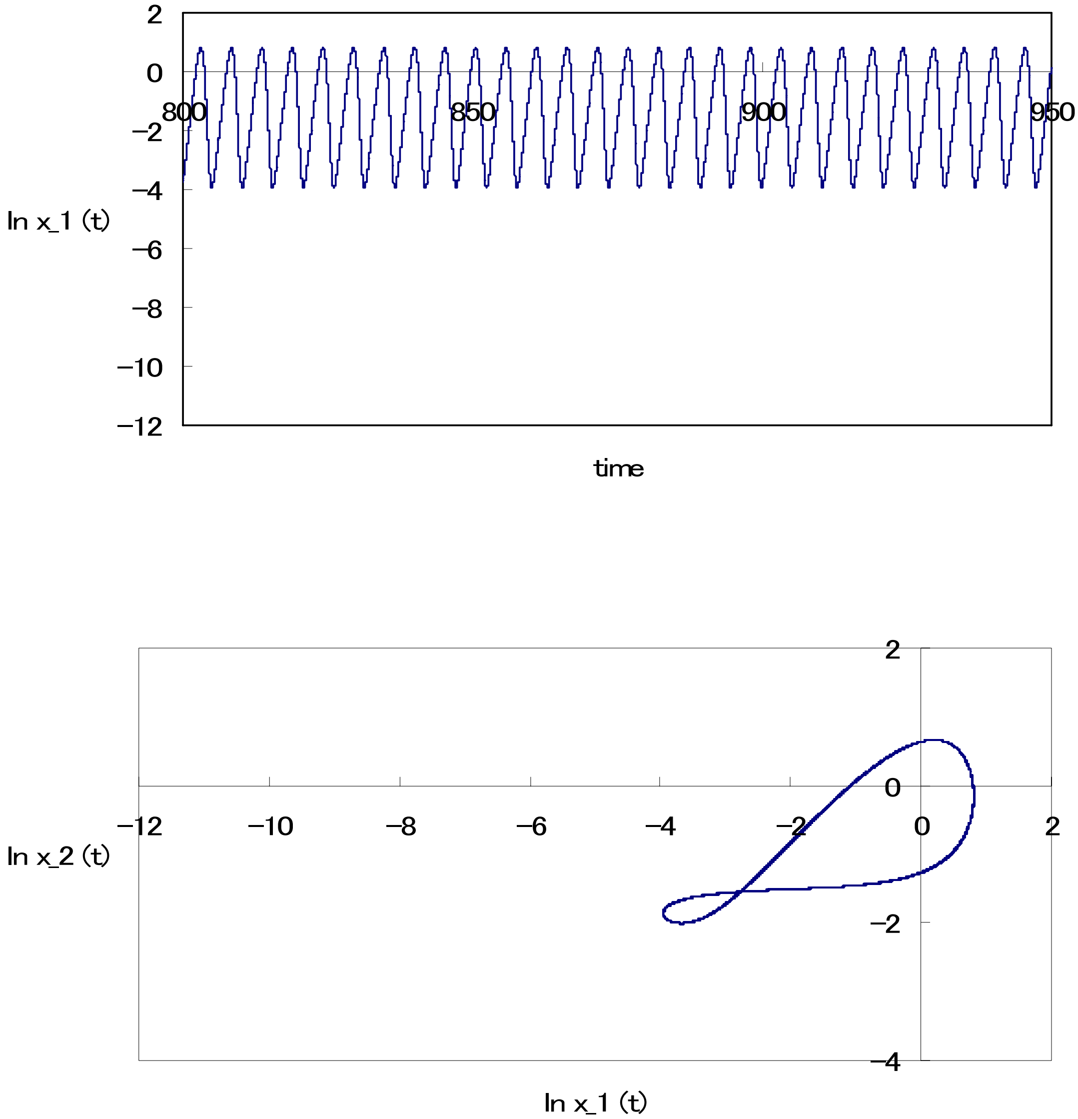
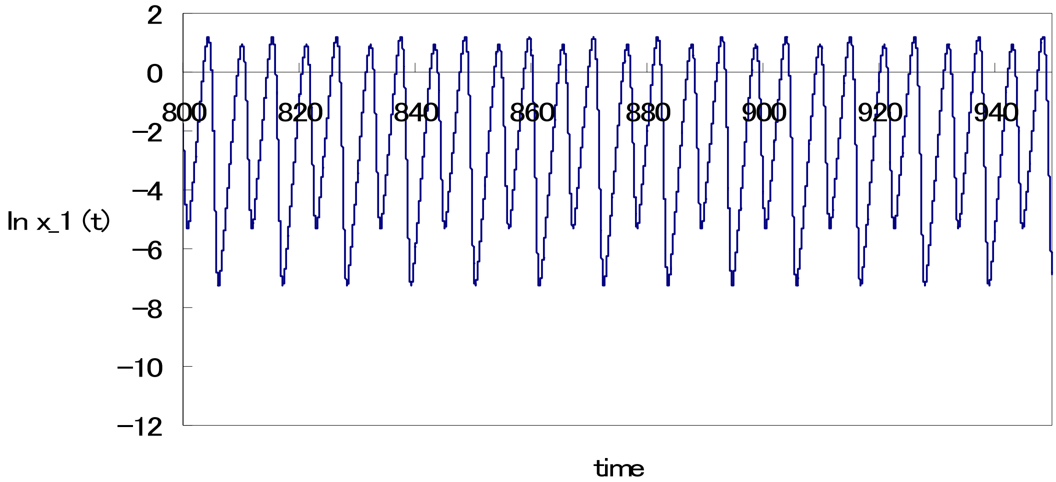


図 2. 1 周期解：　$\alpha_1 = 2.0$



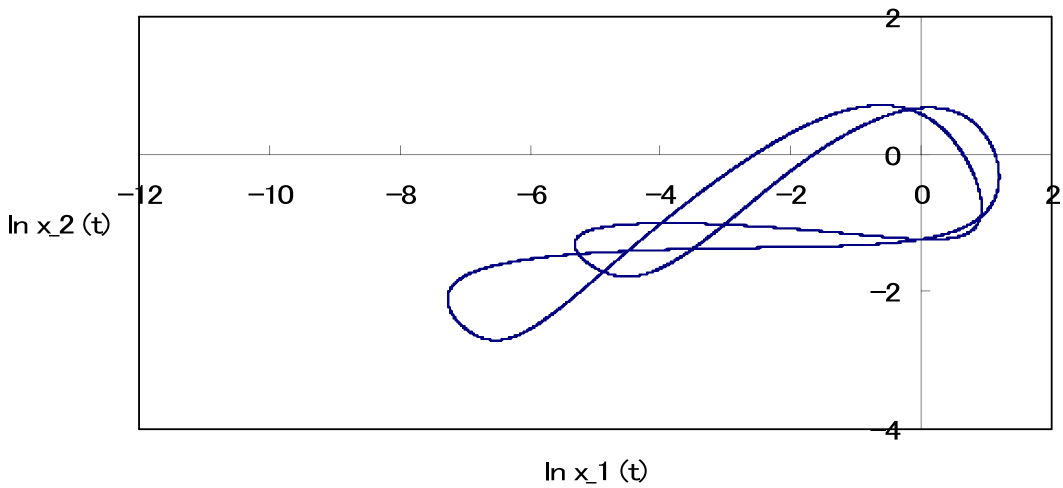


図 3．2 周期解： $\alpha_1 = 2.6$

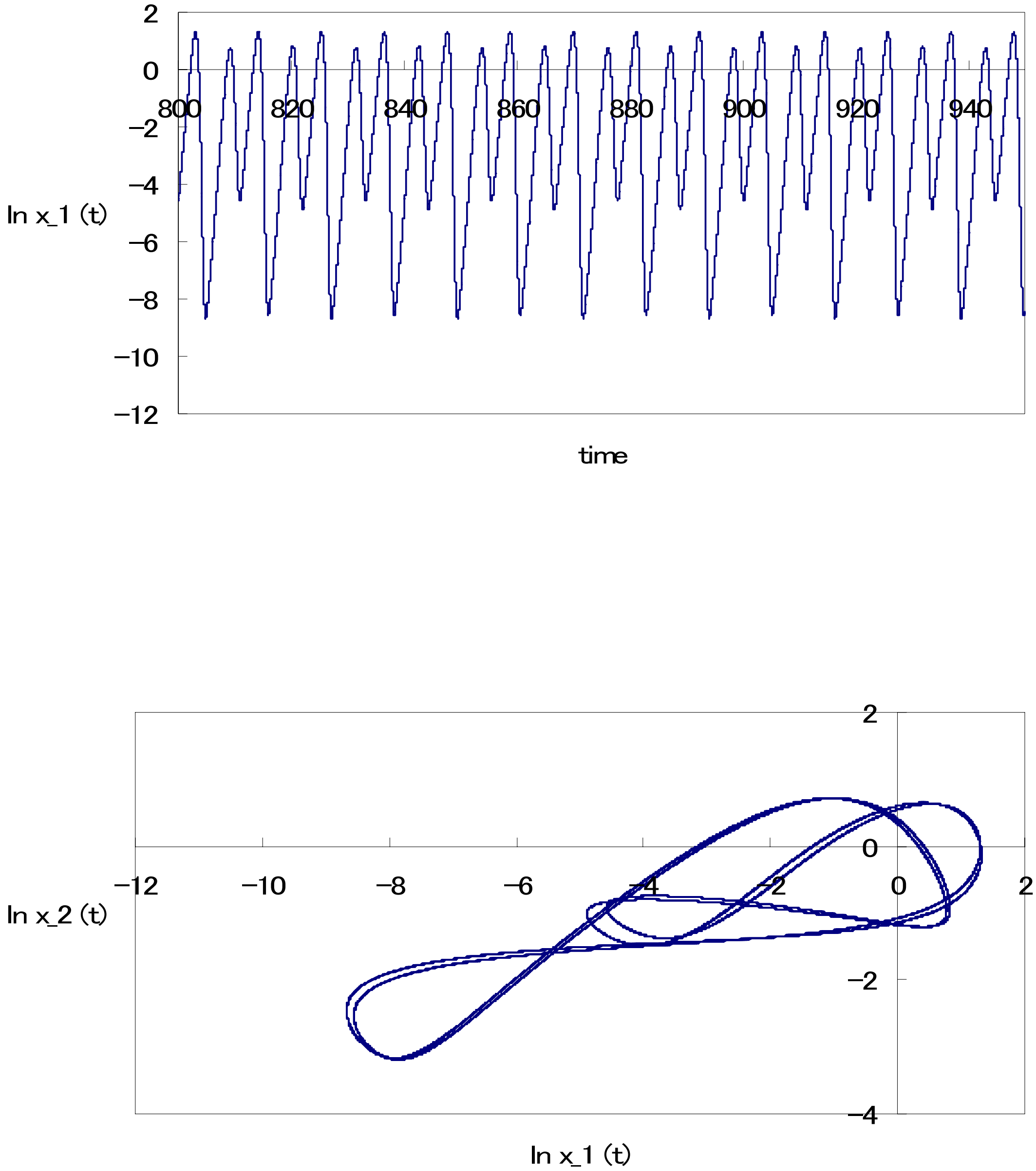


図 4．4 周期解：　$\alpha_1 = 2.74$

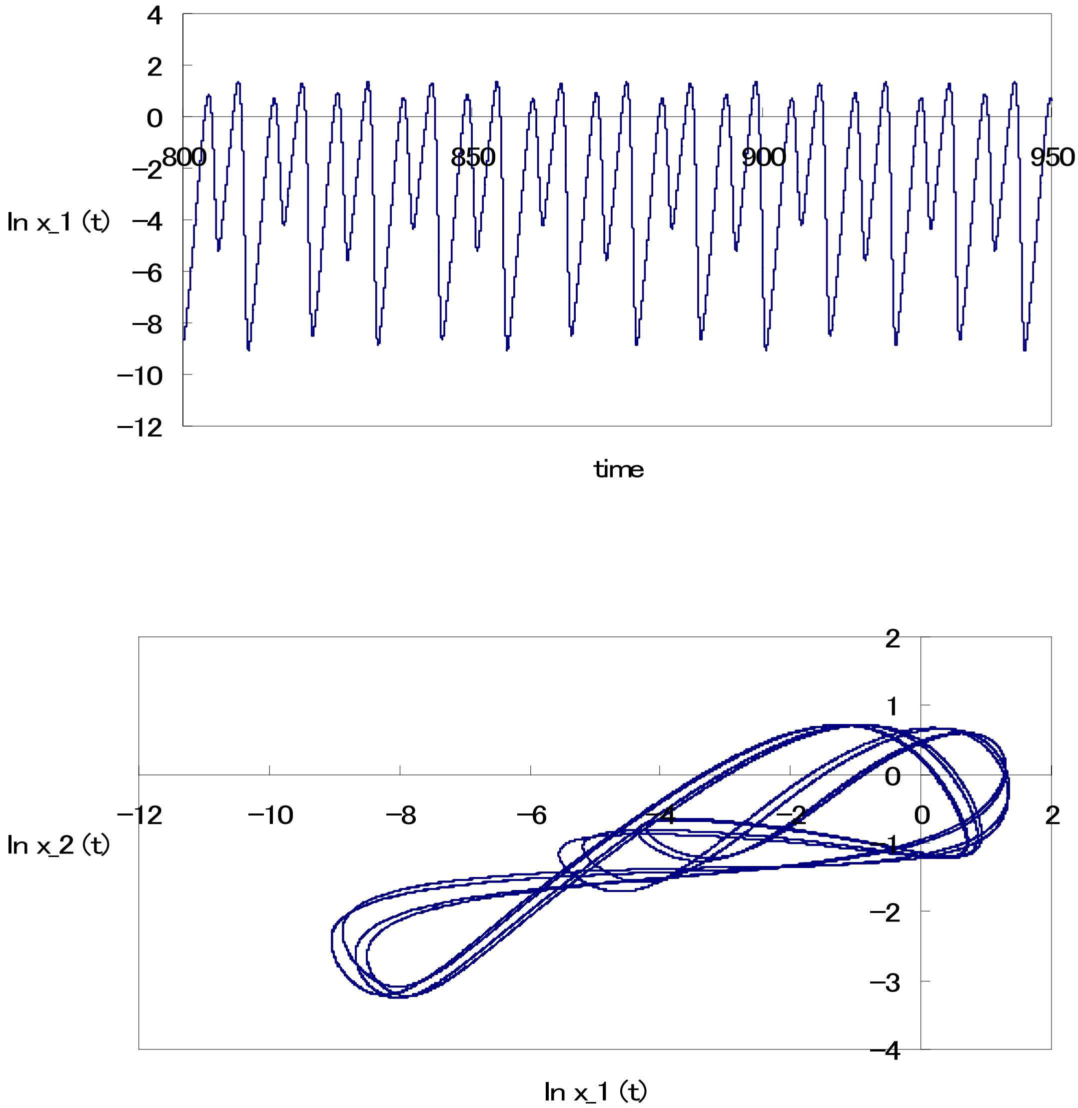
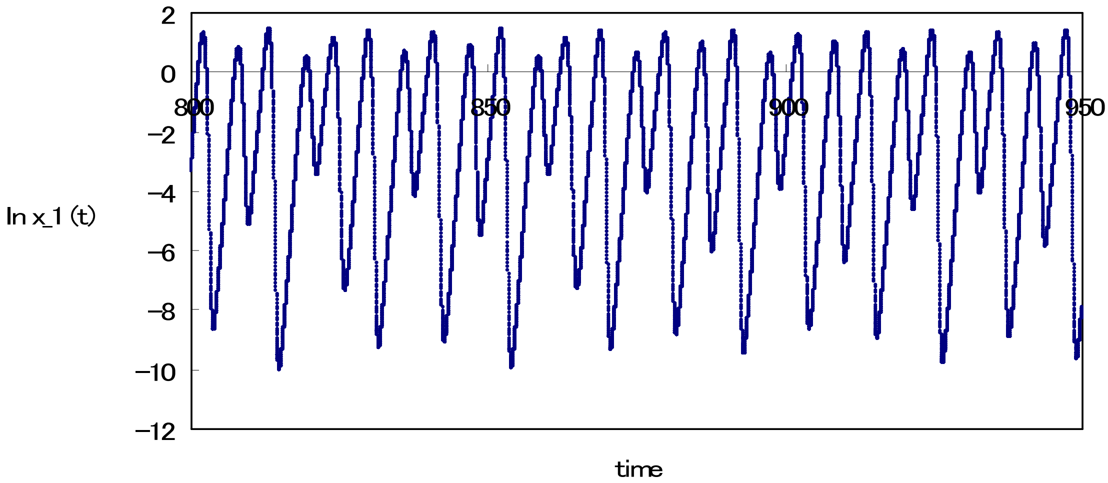


図 5．8 周期解： $\alpha_1 = 2.78$



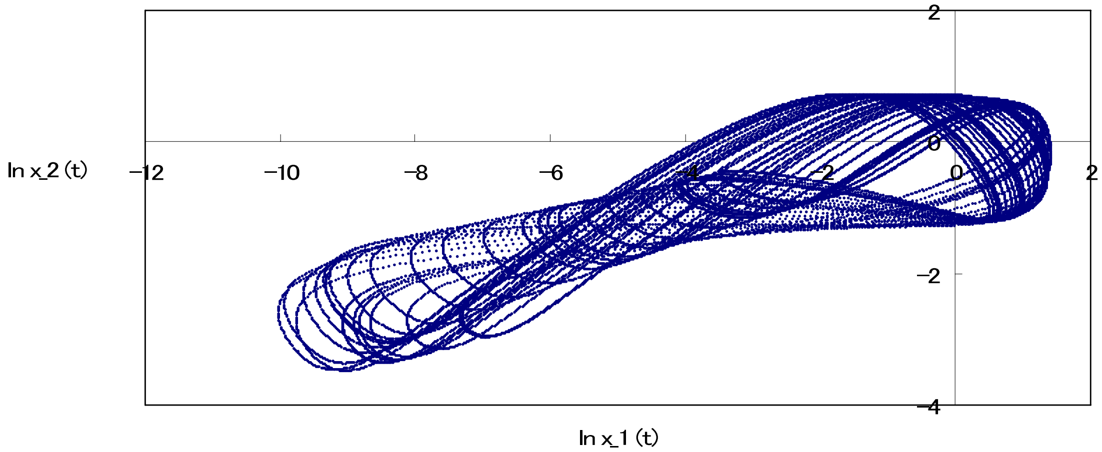


図 6. カオス解： $\alpha_1 = 2.87$