

October 2012

原資産の収益率の分布に歪みがある場合のオプション評価
—混合正規 EGARCH モデルによる分析—

里吉 清隆 ・ 三井 秀俊

Research Institute of Economic Science

College of Economics, Nihon University

原資産の収益率の分布に歪みがある場合のオプション評価 混合正規 EGARCH モデルによる分析

里吉清隆* · 三井秀俊†

2012年10月

要約

本研究の目的は、収益率の分布の歪みを考慮した時系列モデルが、日経 225 オプション価格の評価に関してどの程度有効であるかを検証することにある。Black-Scholes モデルでは、原資産の収益率は正規分布に従うと仮定しているが、実際の日経平均株価の収益率の分布は、正規分布に比べて裾が厚く、左右非対称であることが知られている。また、ボラティリティの非対称性も観察されている。そこで、分布の裾の厚さと歪み、さらにボラティリティの非対称性を同時に表現できる新たなモデルとして、混合正規分布と Exponential GARCH (EGARCH) モデルを組み合わせた混合正規 EGARCH モデルを提案する。日経 225 オプション価格について分析を行った結果、混合正規 EGARCH モデルによるオプションの評価法は、コール・オプションに対して極めて優れていることが明らかとなった。

1 はじめに

Black and Scholes (1973) によって導出された Black-Scholes モデル (以下、BS モデル) では、原資産のボラティリティは時間を通じて一定であり、収益率は正規分布に従うとしている。しかしながら現実の市場においては、資産価格のボラティリティは市場の状況に応じて大きく変動しており、収益率の分布は正規分布に比べて裾が厚く、左右非対称であることが知られている。また、株価指数については、価格が上昇した翌日のボラティリティよりも下落した翌日のボラティリティの方が高くなる傾向がある。このような現象はボラティリティの非対称性、またはレバレッジ効果と呼ばれている。

ボラティリティの時系列的変動を捉える代表的なモデルとしては、Engle (1982) の ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) モデルと、それを拡張した Bollerslev (1986) の GARCH (generalized ARCH) モデルがある。これらの ARCH 型モデルはファイナンスの実証研究において数多く利用されており、オプション価格に関する実証研究としては、Engle and Mustafa (1992), Noh *et al.* (1994), Saez (1997), Sabbatini and Linton (1998), Bauwens and Lubrano (1998), Duan and Zhang (2001), Bauwens and Lubrano (2002), Christoffersen and Jacobs (2004) があ

*東洋大学経営学部: 〒 112-8606 東京都文京区白山 5-28-20 (E-mail: satoyoshi@toyo.jp).

†日本大学経済学部: 〒 101-8360 東京都千代田区三崎町 1-3-2 (E-mail: mitsui.hidetoshi@nihon-u.ac.jp).

る。また、ARCH 型モデルを利用した日経 225 オプションに関する実証研究としては、森保 (1999)、三井 (2000)、三井・渡部 (2003)、渡部 (2003)、竹内 (野木森)・渡部 (2008)、Watanabe and Ubukata (2009)、Satoyoshi and Mitsui (2011) がある。これらの先行研究のいくつかは、レバレッジ効果を含めてオプションの評価を行っているが、分布の歪みについては考慮していない。

Haas *et al.* (2004) と Alexander and Lazar (2006) は、収益率の分布の裾の厚さと左右非対称性を捉えるために、混合正規分布と GARCH モデルを組み合わせた混合正規 GARCH モデルを考案した。混合正規分布は、混合分布を構成する各正規分布の平均を異なる値にすることによって、全体として左右非対称の歪んだ分布になる。異なる分散の値で裾の厚さも表現することができ、確率密度関数が比較的単純であることから、ファイナンスの実証研究においてしばしば用いられてきた。Badescu *et al.* (2008) は、原資産価格の収益率が混合正規 GARCH モデルに従うときのオプション価格を導出し、S&P500 オプションについて実証分析を行っている。ここではレバレッジ効果も考慮に入れて、GARCH モデルを Engle and Ng (1993) の非対称 GARCH モデルに置き換えている。また、Alexander and Lazar (2009) では、レバレッジ効果を捉えるために、Engle and Ng (1993) の非対称 GARCH モデルだけでなく、Glosten *et al.* (1993) の GJR モデルも採用し、混合正規 GARCH モデルによるオプション価格の分析を行っている¹。これらの 2 つの研究のどちらにおいても、レバレッジ効果を含めて分析する重要性を示しているが、Nelson (1991) の Exponential GARCH (EGARCH) モデルについては調べていない。里吉・三井 (2011) では、日経 225 オプションについて分析を行ったところ、コール・オプションについては GARCH モデルよりも EGARCH モデルのほうが圧倒的にパフォーマンスが優れているという結果を示している。したがって、GARCH モデルをベースとした非対称 GARCH モデルや GJR モデルよりも、EGARCH モデルのほうがオプションの評価について適切である可能性が高いと考えられる。

本論文では、Haas *et al.* (2004) と Alexander and Lazar (2006) の混合正規 GARCH モデルをベースとして、ボラティリティの変動を EGARCH モデルにした混合正規 EGARCH モデルを提案し、日経 225 オプション価格の評価を行う。日経 225 オプションのようなヨーロッパン・オプションの価格は、投資家のリスク中立性を仮定すると、モンテカルロ・シミュレーションによって簡単に計算することができる。混合正規 EGARCH モデルにおいてリスク中立性を仮定し、混合正規分布の特徴である左右非対称性と裾の厚さを保証するには、混合正規分布を構成する要素を 4 つにして、更にパラメータに制約を置くなどの若干の工夫が必要となる。しかし、このような仮定においても、モデルの最尤推定とシミュレーションによるオプション価格の計算は問題なく行うことができる。

実証分析の結果、混合正規 EGARCH モデルによるオプションの評価は、コール・オプションに対して極めて優れており、特に、very-deep-out-of-the-money と deep-out-of-the-money で顕著であることが明らかとなった。一方、プット・オプションでは、混合正規 EGARCH モデルの有効性は必ずしも示されなかった。また、1 年ごとの結果では、コール・オプションでの混合分布によるモデルのパフォーマンスは優れているが、プット・オプションでは BS モデルの有効性が高く、コール・オプションとは対照的な結果となった。

¹Christoffersen *et al.* (2006) は、収益率の分布の左右非対称性を表現するために逆ガウス (Inverse Gaussian) 分布を用いている。ボラティリティの変動とレバレッジ効果も含めた逆ガウス GARCH モデルを提案し、S&P500 オプションに関してモデルの有効性を示している。

本論文の以下の構成は次の通りである．第 2 節では，混合正規 EGARCH モデルとリスク中立性を仮定した場合の収益率の定式化について解説し，本研究で比較するモデルについて述べる．第 3 節では，モンテカルロ・シミュレーションによるヨーロッパ・オプションの評価法を説明する．実証分析の結果は第 4 節にまとめた．第 5 節は結論である．

2 分析モデル

2.1 混合正規 EGARCH モデル

確率変数 X が K 個の正規分布から構成される混合正規分布に従うとき，その確率密度関数は，

$$f(x) = \sum_{i=1}^K p_i \phi(x; \mu_i, \sigma_i^2) \quad (1)$$

と与えられる．ただし，加重値 p_i は $p_i \in (0, 1)$ ， $i = 1, 2, \dots, K$ ， $\sum_{i=1}^K p_i = 1$ であり，各成分 $\phi(x; \mu_i, \sigma_i^2)$ は，

$$\phi(x; \mu_i, \sigma_i^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left[-\frac{(x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right] \quad (2)$$

である．このことを，本論文では，

$$X \sim \text{NM}(p_1, \dots, p_K; \mu_1, \dots, \mu_K; \sigma_1^2, \dots, \sigma_K^2)$$

と表すことにする．NM は normal mixture の略である．

本論文では，混合正規分布を構成する各正規分布のボラティリティは，レバレッジ効果を表現するために EGARCH モデルに従って変動すると仮定する．このモデルは，Haas *et al.* (2004)，Alexander and Lazar (2006) の混合正規 GARCH モデルを拡張したものであり，以下では混合正規 EGARCH モデルと呼ぶことにする．原資産価格の収益率を R_t とすると，混合正規 EGARCH モデルは，

$$R_t | I_{t-1} \sim \text{NM}(p_1, \dots, p_K; \mu_1, \dots, \mu_K; \sigma_{1t}^2, \dots, \sigma_{Kt}^2), \quad (3)$$

$$\ln \sigma_{it}^2 = \omega_i + \beta_i \ln \sigma_{i,t-1}^2 + \theta z_{i,t-1} + \gamma (|z_{i,t-1}| - E(|z_{t-1}|)), \quad (4)$$

$$z_{i,t-1} = [R_{t-1} - E(R_{t-1} | I_{t-2})] / \sigma_{i,t-1}, \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (5)$$

と表される²． I_{t-1} は $t-1$ 時点までの情報集合であり， $I_{t-1} = \{R_{t-1}, R_{t-2}, \dots\}$ である．(4) 式の $E(|z_{t-1}|)$ は $\sqrt{2/\pi}$ になる．(4)，(5) 式より， i 成分の t 時点のボラティリティ σ_{it}^2 の値は，同じ i 成分で 1 期前の $\sigma_{i,t-1}^2$ と，予測誤差 $R_{t-1} - E(R_{t-1} | I_{t-2})$ を $\sigma_{i,t-1}$ で標準化した $z_{i,t-1}$ に依存して決まることになる．1 期前の全てのボラティリティは $\sigma_{1,t-1}^2, \sigma_{2,t-1}^2, \dots, \sigma_{K,t-1}^2$ であり， t 時点のボラティリティがそれらの全てに依存するようなモデルにすることも可能ではある．しかし，Haas *et al.* (2004) によると，そのようなボラティリティの交差的な依存関係を含めたモデルにしても対

²モデルの最尤推定において収束を容易にするために，(4) 式の θ と γ は固定とした．

表 1: 混合正規 EGARCH モデルの平均とボラティリティ

成分	確率	μ_i	σ_{it}^2
1	p_1	μ_a	σ_{at}^2
2	p_2	μ_a	σ_{bt}^2
3	p_3	μ_b	σ_{at}^2
4	p_4	μ_b	σ_{bt}^2

数尤度は大して高まらないという結果を得ている．よって，ここでは t 時点と同じ i 成分の $\sigma_{i,t-1}^2$ のみを，1 期前のボラティリティとしてモデルに含めることにする³．

本論文では，各 t 時点において平均 μ_i とボラティリティ σ_{it}^2 は 2 つの値をとることにする．また，2.2 節で詳しく述べるように，投資家はリスク中立的であると仮定する．このとき，期待収益率は無リスク資産の収益率に等しくなり，加重値，つまり各正規分布の確率はその条件を満たす値となる．ボラティリティ σ_{it}^2 も各時点で 2 つの値のどちらかをとることになるが，その確率はリスク中立性の仮定を満たす確率と同じである必要はない．そこで，まず混合正規分布を構成する正規分布の数は 2 つではなく 4 つ，つまり，(3) 式において $K = 4$ とする．次に， μ_i, ω_i, β_i について

$$\mu_1 = \mu_2, \quad \mu_3 = \mu_4, \quad \omega_1 = \omega_3, \quad \omega_2 = \omega_4, \quad \beta_1 = \beta_3, \quad \beta_2 = \beta_4$$

と制約を置くことにする． σ_{it}^2 は ω_i と β_i の制約から，

$$\sigma_{1t}^2 = \sigma_{3t}^2, \quad \sigma_{2t}^2 = \sigma_{4t}^2$$

となる．ここで，これらのパラメータを $\mu_a \equiv \mu_1, \mu_2, \mu_b \equiv \mu_3, \mu_4, \omega_a \equiv \omega_1, \omega_3, \omega_b \equiv \omega_2, \omega_4, \beta_a \equiv \beta_1, \beta_3, \beta_b \equiv \beta_2, \beta_4, \sigma_{at}^2 \equiv \sigma_{1t}^2, \sigma_{3t}^2, \sigma_{bt}^2 \equiv \sigma_{2t}^2, \sigma_{4t}^2$ と定義し直すと，表 1 のように平均とボラティリティが定まる．平均は $p_1 + p_2$ の確率で $\mu_a, p_3 + p_4$ の確率で μ_b ，ボラティリティは $p_1 + p_3$ の確率で $\sigma_{at}^2, p_2 + p_4$ の確率で σ_{bt}^2 となる．このことから，リスク中立性によって期待収益率と無リスク資産が等しいという制約を置いても，それとは関係なくボラティリティの値が決まることになる．また，期待収益率と分散はそれぞれ

$$E(R_t | I_{t-1}) = (p_1 + p_2)\mu_a + (p_3 + p_4)\mu_b, \quad (6)$$

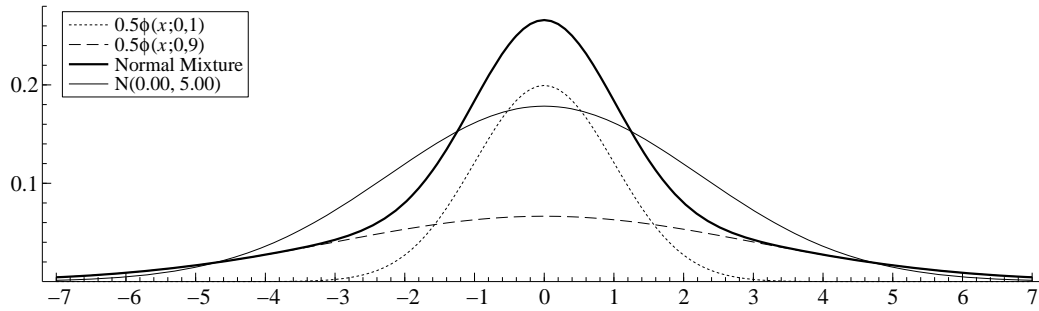
$$V(R_t | I_{t-1}) = (p_1 + p_3)\sigma_{at}^2 + (p_2 + p_4)\sigma_{bt}^2 + (p_1 + p_2)\mu_a^2 + (p_3 + p_4)\mu_b^2 - \{(p_1 + p_2)\mu_a + (p_3 + p_4)\mu_b\}^2 \quad (7)$$

となる．

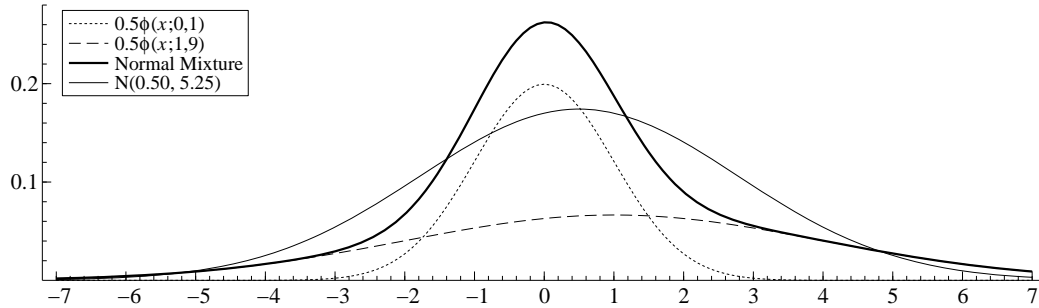
図 1 では，各成分の確率と平均，分散の値を変えることによって，混合正規分布の密度関数がどのような形状になるかを示している．図の上段 (a) の太線は，加重値は同じ 0.5 で，分散が異なる 2 つの正規分布 $N(0, 1), N(0, 9)$ から構成される混合正規分布のグラフである．この分布の平均は 0，分散は 5 であり，同じ平均と分散を持つ正規分布（細線）と比較すると，混合正規分布は正規

³Alexander and Lazar (2006) の混合正規 GARCH モデルも同様の理由で，ボラティリティの変動における交差的な依存関係を無視している．

(a) 各成分の平均が同じケース



(b) 各成分の平均が異なるケース



(c) 双峰分布のケース

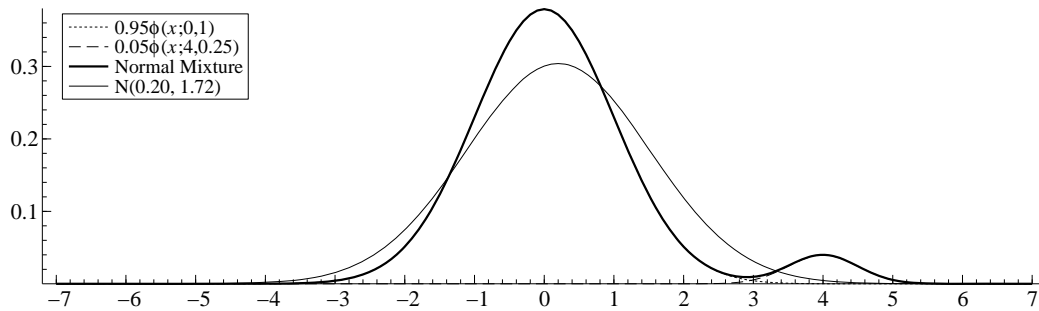


図 1: 混合正規分布

分布よりも裾の厚い分布になっている。図の中段 (b) の太線は、加重値は同じで、分散だけでなく平均も異なる正規分布、 $N(0, 1)$ と $N(1, 9)$ から構成される混合正規分布であり、平均は 0.5、分散は 5.25 となる。上段 (a) とは違って左の裾より右の裾のほうが厚く、左右対称でない歪んだ分布になっている。つまり、平均を異なる値にすることによって、混合正規分布は分布の裾の厚さだけでなく、分布の歪みも表現できる。図の下段 (c) では、第 2 成分の平均は 4 であり、第 1 成分の平均 0 から大きく離れているため、混合正規分布は山が 2 つの双峰分布になっている。以上の 3 つの例から、混合正規分布は分布の裾の厚さや歪み、さらに、双峰的な分布を表現できることが分かる。本研究の混合正規 EGARCH モデルは、各成分の平均と分散の両方が変化するモデルであるため、図で示されたような原資産の収益率の分布に対応してオプションの評価を行うことができる。

ところで、分布の裾の厚さを捉える際に、正規分布よりも裾の厚い t 分布を用いることがある。

そこで、裾の厚さを混合正規分布では十分に捉えることができない可能性を考慮して、 t 分布を成分とした混合 t 分布によるモデルについても分析を行うことにする。 ν を自由度として、成分が 4 つの混合 t 分布を

$$R_t|I_{t-1} \sim tM(p_1, \dots, p_4; \mu_1, \dots, \mu_4; \sigma_{1t}^2, \dots, \sigma_{4t}^2; \nu)$$

と表すことにする。 tM は t mixture の略である。ここでは、混合 t 分布を構成する各 t 分布の分散が σ_{it}^2 ($i = 1, \dots, 4$) となるように、各 t 分布は基準化されている。各 t 分布のボラティリティは EGARCH モデルに従うので、このモデルを混合 t -EGARCH モデルと呼ぶことにする。このときの (4) 式の $E(|z_{t-1}|)$ は、 $[2\sqrt{\nu-2}\Gamma((\nu+1)/2)] / [(\nu-1)\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi}]$ となる。

2.2 投資家のリスク中立性と収益率の定式化

t 時点のオプションの原資産価格を S_t とする。本研究では、 t 時点の原資産価格の収益率 R_t を

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \quad (8)$$

と定義する。また、投資家はリスク中立的であると仮定する⁴。リスク中立的な世界では投資家はリスク・プレミアムを要求しないので、 t 時点の無リスク資産の利子率を r_t とすると、 $t-1$ 時点までの情報 I_{t-1} が与えられたもとでの t 時点の原資産の期待収益率 $E(R_t|I_{t-1})$ は r_t と等しくなる。よって、リスク中立性と (6) 式より、

$$(p_1 + p_2)\mu_a + (p_3 + p_4)\mu_b = r_t$$

が成立する。この式を変形すると、

$$\mu_{bt} = \frac{r_t - (p_1 + p_2)\mu_a}{p_3 + p_4} \quad (9)$$

となるが、観測期間における利子率 r_t の変動を考慮して、 μ_b は μ_{bt} に置き換えている。したがって本論文では、投資家のリスク中立性の仮定を満たすために、混合正規分布の平均について (9) 式の制約を置くことになる。また、(5) 式は、

$$z_{i,t-1} = (R_{t-1} - r_{t-1}) / \sigma_{i,t-1}, \quad i = a, b$$

となる。

モデルのパラメータ推定には最尤法を用いた。尤度関数を L とすると、混合正規 EGARCH モデルの尤度関数は、

$$L = \sum_{t=1}^T [p_1 \phi(R_t; \mu_a, \sigma_{at}^2) + p_2 \phi(R_t; \mu_a, \sigma_{bt}^2) + p_3 \phi(R_t; \mu_{bt}, \sigma_{at}^2) + p_4 \phi(R_t; \mu_{bt}, \sigma_{bt}^2)]$$

⁴金融工学理論では、収益率を連続複利方式で $R_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$ と定義することが一般的である。しかしながら、本論文のように収益率が t 分布に従うと、投資家のリスク中立性を仮定することが困難になってしまう。詳しくは渡部 (2003) を参照のこと。

となる．ただし，

$$\phi(R_t; \mu_i, \sigma_{jt}^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{jt}^2}} \exp \left[-\frac{(R_t - \mu_i)^2}{2\sigma_{jt}^2} \right], \quad i = a, bt, \quad j = a, b$$

である．混合 t -EGARCH モデルのときは，

$$\phi(R_t; \mu_i, \sigma_{jt}^2) = \frac{\Gamma[(\nu + 1)/2]}{\pi^{1/2}\Gamma(\nu/2)} \left[1 + \frac{(R_t - \mu_i)^2}{\sigma_{jt}^2(\nu - 2)} \right]^{-\frac{\nu+1}{2}} (\sigma_{jt}^2)^{-\frac{1}{2}} (\nu - 2)^{-\frac{1}{2}}, \quad i = a, bt, \quad j = a, b$$

となる．

2.3 本研究で比較するモデル

実証分析では，混合正規 EGARCH モデル，ならびに混合 t -EGARCH モデルの有用性を調べるため，定式化の異なる以下のモデルについてもオプション価格の評価を行うことにする．まず，平均は μ_1, μ_2 の 2 つの値をとるが，ボラティリティについては各時点で 1 つの値だけのモデルは，

$$\begin{aligned} R_t | I_{t-1} &\sim \text{NM}(p_1, p_2; \mu_1, \mu_{2t}; \sigma_t^2), \\ \ln \sigma_t^2 &= \omega + \beta \ln \sigma_{t-1}^2 + \theta z_{t-1} + \gamma (|z_{t-1}| - E[|z_{t-1}|]), \\ z_{t-1} &= (R_{t-1} - r_{t-1}) / \sigma_{t-1}, \\ \mu_{2t} &= (r_t - \mu_1 p_1) / p_2 \end{aligned}$$

となる．ここでは分布の歪みは表現されているが，ボラティリティの変動は通常の EGARCH モデルと同じになっている．以下では，このモデルを NM(m) モデル， t 分布では $t\text{M}(m)$ モデルとする．

平均が固定で，ボラティリティが 2 つの値になるモデルは，

$$\begin{aligned} R_t | I_{t-1} &\sim \text{NM}(p_1, p_2; \mu_t; \sigma_{1t}^2, \sigma_{2t}^2), \\ \ln \sigma_{it}^2 &= \omega_i + \beta_i \ln \sigma_{i,t-1}^2 + \theta z_{i,t-1} + \gamma (|z_{i,t-1}| - E[|z_{i,t-1}|]), \\ z_{i,t-1} &= (R_{t-1} - r_{t-1}) / \sigma_{i,t-1}, \quad i = 1, 2, \\ \mu_t &= r_t \end{aligned}$$

である．分布は左右対称であり，2.1 節の図 1(a) に相当する．このモデルを NM(v) モデル， t 分布では $t\text{M}(v)$ モデルとする．

通常の EGARCH モデルは，

$$\begin{aligned} R_t | I_{t-1} &\sim \text{N}(\mu_t, \sigma_t^2), \\ \ln \sigma_t^2 &= \omega + \beta \ln \sigma_{t-1}^2 + \theta z_{t-1} + \gamma (|z_{t-1}| - E[|z_{t-1}|]), \\ z_{t-1} &= (R_{t-1} - r_{t-1}) / \sigma_{t-1}, \\ \mu_t &= r_t \end{aligned}$$

である．このモデルを N-EGARCH モデル， t 分布では t -EGARCH モデルとする．さらに BS モデルも含めて，オプション評価の比較を行うこととする．

3 オプション価格の導出方法

3.1 リスク中立性の下でのオプション価格

投資家がリスク中立的な場合，ヨーロピアン・オプションの価格は，満期におけるオプション価格の期待値を無リスク資産の利子率 r で割り引いた割引現在価値となる． T を評価日， $T + \tau$ を満期日， C_T を権利行使価格 K のコール・オプションの T 時点の価格， P_T をプット・オプションの価格とすると， C_T と P_T は

$$C_T = (1 + r)^{-\tau} E [\max (S_{T+\tau} - K, 0)], \quad (10)$$

$$P_T = (1 + r)^{-\tau} E [\max (K - S_{T+\tau}, 0)] \quad (11)$$

と表される⁵．ここで， $S_{T+\tau}$ はオプションの満期の原資産価格である．混合正規 EGARCH モデルの場合，右辺の期待値を解析的に求めることができないので，モンテカルロ・シミュレーションによって評価する．シミュレーションを n 回行い， n 個の満期の原資産価格 $S_{T+\tau}$ が得られたとして，これらを $(S_{T+\tau}^{(1)}, S_{T+\tau}^{(2)}, \dots, S_{T+\tau}^{(n)})$ とする．ただし， $S_{T+\tau}^{(i)}$ は i 回目のパスの発生によって得られた満期の原資産価格である． n が十分に大きいとき，大数の法則より (10)，(11) 式はそれぞれ以下の式によって評価することができる．

$$C_T \approx (1 + r)^{-\tau} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max (S_{T+\tau}^{(i)} - K, 0), \quad (12)$$

$$P_T \approx (1 + r)^{-\tau} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max (K - S_{T+\tau}^{(i)}, 0). \quad (13)$$

3.2 モンテカルロ・シミュレーションの手順

モンテカルロ・シミュレーションによるオプション価格の計算手順は以下の通りである．ここでは混合正規 EGARCH モデルについて説明する．

- [1] 標本 $\{R_1, R_2, \dots, R_T\}$ を使って，混合正規 EGARCH モデルの未知パラメータを最尤推定する．
- [2] 互いに独立な標準正規分布から正規乱数 $\{z_{T+1}^{(i)}, z_{T+2}^{(i)}, \dots, z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ を生成する．
- [3] 互いに独立な標準一様分布から一様乱数 $\{u_{T+1}^{(i)}, u_{T+2}^{(i)}, \dots, u_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ を生成する．
- [4] 手順 [1] で推定されたパラメータの値，手順 [2] の正規乱数，手順 [3] の一様乱数から， $T + 1$ 時点から $T + \tau$ 時点までの収益率， $\{R_{T+1}^{(i)}, R_{T+2}^{(i)}, \dots, R_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ を計算する．
- [5] 次の式を使ってオプションの満期 $T + \tau$ 時点における原資産価格 $(S_{T+\tau}^{(1)}, S_{T+\tau}^{(2)}, \dots, S_{T+\tau}^{(n)})$ を求める．

$$S_{T+\tau}^{(i)} = S_T \prod_{s=1}^{\tau} (1 + R_{T+s}^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

⁵オプション価格を評価する T 時点においては， T 時点から $T + 1$ 時点にかけての安全資産の利子率 r_{T+1} は既知であるが，その先の利子率は分からない．したがって， T 時点から満期である $T + \tau$ 時点までの利子率は一定であると仮定し， $r = r_{T+1}, r_{T+2}, \dots, r_{T+\tau}$ において現在価値を計算することになる．

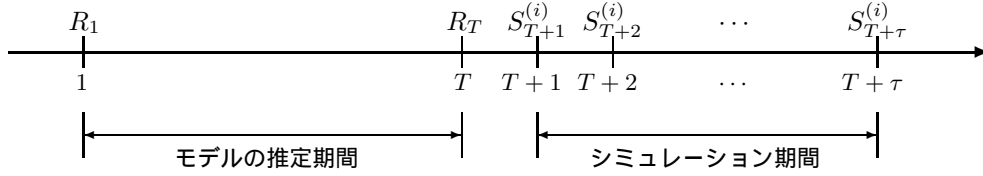


図 2: モデルの推定とシミュレーションの期間

[6] 次の式からコール・オプションの価格 C_T , プット・オプションの価格 P_T をそれぞれ計算する.

$$C_T \approx (1+r)^{-\tau} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max(S_{T+\tau}^{(i)} - K, 0), \quad (15)$$

$$P_T \approx (1+r)^{-\tau} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max(K - S_{T+\tau}^{(i)}, 0). \quad (16)$$

図 2 は, モデルのパラメータの推定期間とシミュレーションの期間を図示したものである. 本研究ではモンテカルロ・シミュレーションの回数を $n = 200,000$ とした. また, 計算される C_T, P_T の分散を小さくするため, 渡部 (2003), 竹内 (野木森)・渡部 (2008) と同様に, 代表的な分散減少法である負相関法と制御変量法を併せて用いた⁶.

4 実証結果

4.1 データ

本論文では, ヨーロピアン・オプションである日経 225 オプションのコールとプットの両方について実証分析を行った. 期間は 2005 年 6 月限から 2010 年 1 月限までの 56 限月であり, 満期から 30 日前 ($\tau = 30$) の終値を分析対象とした. コールとプットの標本サイズは, それぞれ 741, 816 となった⁷. 原資産は日経平均株価であり, また, 無リスク資産としては CD (譲渡性預金) を用いることにした⁸. オプションの評価日が満期の 1 ヶ月前であることから, CD も同じ 1 ヶ月物にして, 売り気配と買い気配の中間値を無リスク資産の利子率としている.

混合正規 EGARCH モデルなどのボラティリティ変動モデルのパラメータの推定には, 満期の 30 日前から更に 3,500 日前までの日経平均株価の終値を使用した⁹. 例えば, 最初の限月である 2005 年 6 月限の場合, オプションの評価日は満期から 30 日前の 2005 年 5 月 11 日, その 3,500 日前は 1991 年 2 月 25 日になる. (8) 式から日次収益率を計算すると, 標本期間は 1991 年 2 月 26 日から 2005 年 5 月 11 日までとなり (標本の大きさは $T = 3,500$), この期間の日次収益率を用いてモデルのパラメータの推定を行なうことになる. その推定されたパラメータを所与として, 3.2 節で説明したモンテカルロ・シミュレーションの手順に従いオプション価格を求める. 次の限月以降も

⁶詳しくは, Satoyoshi and Mitsui (2011) の Appendix B を参照のこと.

⁷日経 225 オプションの終値と日経平均株価の終値とが異時点で値付けされている可能性があるが, 本研究では考慮しなかった. また, 基本的な仮定として, 取引費用, 税金, 配当は存在せず, オプションの証拠金は不要とした.

⁸日経平均株価と CD のデータは, 日経 NEEDS-FinancialQUEST を利用した.

⁹パラメータの推定には, プログラミング言語である OxMetrics 5.00 (<http://www.oxmetrics.net/>) を利用している.

表 2: 日経平均株価の日次収益率 (%) の基本統計量

標本サイズ	平均	標準偏差	歪度	尖度
3500	-0.014	1.461	0.180	5.208
	(0.025)		(0.041)	(0.083)

(注) データは最初の限月 (2005 年 6 月限) の標本期間である 1991 年 2 月 26 日から 2005 年 5 月 11 日まで。括弧内の数値は標準誤差を表す。標本サイズを N 、標準偏差を $\hat{\sigma}$ とすると、平均、歪度、尖度の標準誤差はそれぞれ、 $\hat{\sigma}/\sqrt{N}$ 、 $\sqrt{6/N}$ 、 $\sqrt{24/N}$ である。

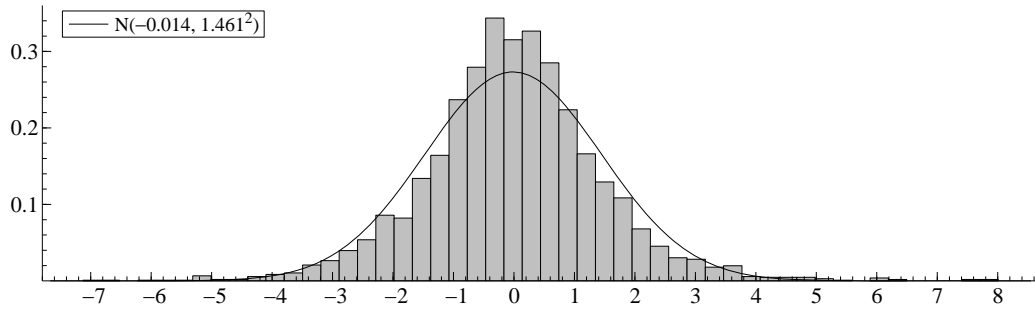


図 3: 日経平均株価の日次収益率 (%) のヒストグラム

同様に、推定期間の設定、モデルのパラメータ推定、オプション価格の計算を行う。最後の限月は 2010 年 1 月限、その 30 日前は 2009 年 12 月 9 日となるので、本研究で用いた日経平均株価の日次収益率の全標本期間は、1991 年 2 月 26 日から 2009 年 12 月 9 日までとなった。

表 2 は日経平均株価の日次収益率の基本統計量であり、最初の限月 (2005 年 6 月限) のオプション価格を評価するための標本期間の 1991 年 2 月 26 日から 2005 年 5 月 11 日までの収益率から計算したものである。歪度の値は 0.180 と統計的に有意な正の値を示しており、日次収益率は右に歪んだ分布に従っていることが分かる。また、尖度の値は 5.208 で正規分布の 3 を大幅に上回っていることから、正規分布よりも裾の厚い分布に従っている。図 3 は、日次収益率のヒストグラムであり、平均と標準偏差が同じ正規分布も同時に示した。若干ではあるが、正規分布よりも両方の裾が厚く、右に歪んでいることが確認できる。

4.2 モデルの推定結果

表 3 には、本研究で採用した全てのモデルの推定結果を示した。NM は混合正規 EGARCH モデル、 tM は混合 t -EGARCH モデルである。ここで用いられているデータは、最初の限月 (2005 年 6 月限) の標本期間の 1991 年 2 月 26 日から 2005 年 5 月 11 日までである。表 3 の 2 列目の NM モデルの結果から見ると、混合正規分布を構成する 4 つの要素のうち、1 つ目の要素の確率 p_1 が 0.942 と最も高くなっていることが分かる。平均は μ_a か、もしくは (9) 式で定義される μ_{bt} のどちらかの値をとるが、 μ_{bt} は各時点で異なる値になるため、表には μ_a のみ示した。 μ_a の値は -0.020

表 3: モデルの推定結果

	NM	tM	NM(m)	tM(m)	NM(v)	tM(v)	N-EGARCH	t-EGARCH
p_1	0.942 (0.026)	0.972 (0.030)	0.989 (0.003)	0.994 (0.002)	0.927 (0.024)	0.951 (0.034)	—	—
p_2	0.052 (0.027)	0.022 (0.030)	—	—	—	—	—	—
p_3	0.006 (0.005)	0.006 (0.005)	—	—	—	—	—	—
μ_a	-0.020 (0.012)	-0.020 (0.011)	-0.040 (0.010)	-0.018 (0.008)	—	—	—	—
ω_a	-0.003 (0.003)	0.001 (0.004)	0.009 (0.003)	0.006 (0.003)	-0.004 (0.003)	-0.001 (0.005)	0.018 (0.004)	0.008 (0.003)
ω_b	0.135 (0.076)	0.258 (0.340)	—	—	0.124 (0.055)	0.182 (0.165)	—	—
β_a	0.987 (0.004)	0.986 (0.004)	0.977 (0.005)	0.984 (0.004)	0.988 (0.004)	0.987 (0.004)	0.976 (0.005)	0.984 (0.004)
β_b	0.952 (0.042)	0.896 (0.166)	—	—	0.957 (0.028)	0.929 (0.084)	—	—
θ	-0.074 (0.010)	-0.074 (0.010)	-0.083 (0.010)	-0.076 (0.010)	-0.074 (0.010)	-0.073 (0.010)	-0.076 (0.010)	-0.075 (0.011)
γ	0.120 (0.015)	0.127 (0.017)	0.149 (0.016)	0.136 (0.017)	0.118 (0.015)	0.124 (0.017)	0.153 (0.016)	0.136 (0.017)
ν	—	19.710 (12.773)	—	10.193 (1.706)	—	22.871 (21.090)	—	8.406 (1.054)
対数尤度	-5981.67	-5980.74	-6010.69	-5983.71	-5984.55	-5984.00	-6044.37	-5988.54
AIC	11983.34	11983.48	12033.38	11981.42	11983.09	11984.01	12096.74	11987.08
SBIC	12044.95	12051.25	12070.34	12024.54	12026.22	12033.29	12121.38	12017.88

(注) データは最初の標本期間の 1991 年 2 月 26 日から 2005 年 5 月 11 日まで。括弧内の数値は標準誤差を表す。

で有意ではないが負の値となっている。平均が μ_a になる確率 $p_1 + p_2$ は $0.942 + 0.052 = 0.994$ である。このモデルには期待収益率と無リスク資産の利子率が等しいという制約があり、無リスク資産の利子率は負の値にはならないことから、 μ_a が負のとき、もう一方の平均の μ_{bt} は正の値になる。 μ_{bt} になる確率 $p_3 + p_4$ は 0.006 であることから、このモデルによると、収益率はほぼ 100% の確率で平均が負の分布に従っているといえる。ボラティリティも平均と同様に 2 つの値をとり、 (ω_a, β_a) のとき σ_{at}^2 、 (ω_b, β_b) のとき σ_{bt}^2 となる。 (ω_a, β_a) の推定値は $(-0.003, 0.987)$ 、その確率 $p_1 + p_3$ は $0.942 + 0.006 = 0.948$ 、一方、 (ω_b, β_b) の推定値は $(0.135, 0.952)$ 、確率は 0.052 となっている。 σ_{bt}^2 よりも σ_{at}^2 のときのほうが、低ボラティリティでボラティリティの持続性が少しだけ高い。 σ_{at}^2 の確率はほぼ 1 に近く、高ボラティリティの σ_{bt}^2 になる確率は非常に低い。ところで、平均が μ_a になる確率は 0.994、ボラティリティが σ_{at}^2 になる確率は 0.948 であり、どちらも 1 に近いが σ_{at}^2 になる確率のほうが若干低く、同じ値にはなっていない。このことから、平均とボラティリティがそれぞれ 2 つの値をとる場合でも、混合正規分布を構成する正規分布の数は 2 つではなく 4 つにしたほうが良いことが分かる。レバレッジ効果を示すパラメータ θ の値は -0.074 で有意であり、多くの先行研究と同様の結果になっている。

表 3 の 3 列目は、 t 分布を要素とした tM モデルの結果である。平均 μ_a の推定値は -0.020 、 μ_a になる確率 $p_1 + p_2$ は $0.972 + 0.022 = 0.994$ であり、NM の結果と同じになっている。ボラティリ

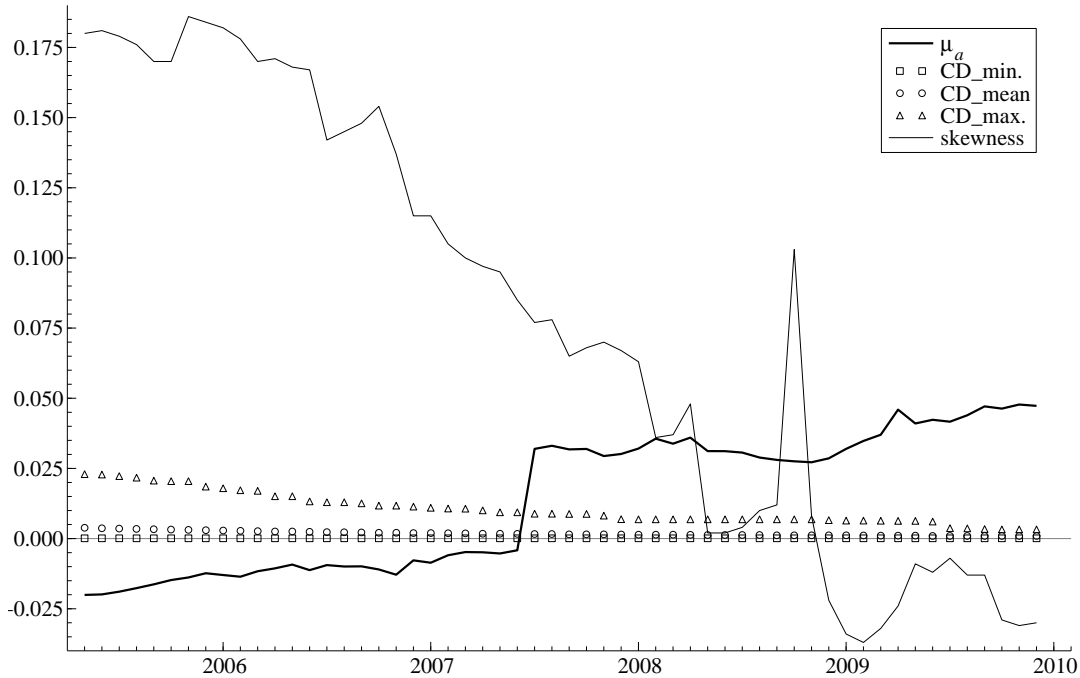


図 4: NM モデルの μ_a , CD レート, 歪度の推移

ティについては, (ω_a, β_a) の推定値は $(0.001, 0.986)$, (ω_b, β_b) の推定値は $(0.258, 0.896)$, σ_{at}^2 になる確率 $p_1 + p_3$ は $0.972 + 0.006 = 0.978$ であり, NM モデルのときよりも, 低ボラティリティになる確率が高くなっている. また, 高ボラティリティの持続性は 0.896 で, NM モデルの高ボラティリティの持続性よりも低い. 対数尤度は NM モデルより若干高くなっているが, AIC, SBIC の値を見ると, NM モデルよりもモデルの当てはまりが良いとは言えず, t 分布にする必要性がないことが分かる. このことは, ボラティリティが異なる正規分布から構成される混合正規分布によって, 収益率の裾の厚さが表現できたためと考えられる.

平均は 2 つの値をとり, ボラティリティは 1 つの値となる NM(m), $tM(m)$ モデルの結果は, それぞれ表 3 の 4, 5 列目に示した. p_1 の値はどちらのモデルでも 1 に近く, その他のパラメータの推定値にも特に大きな違いは無いが, 対数尤度は $tM(m)$ モデルの値が大きく上回っており, AIC, SBIC の基準でも $tM(m)$ モデルが選択される. 先ほどの NM, tM モデルでは混合分布の要素は正規分布で十分であったが, ボラティリティの値が 1 だけのときは t 分布にしたほうが良いと考えられる.

表 3 の 6, 7 列目は, NM(v), $tM(v)$ の推定結果である. 平均は固定でボラティリティが 2 つの値から成るモデルであり, 収益率の分布は左右対称となる. AIC, SBIC の値はどちらも NM(v) モデルのほうが小さく, NM, tM モデルのときと同様に, t 分布にする必要はないといえる. 従来の EGARCH の結果は, 最後の 2 列に示した. 全てのモデルの当てはまり具合を比較すると, SBIC の基準では全てのモデルの中で t -EGARCH モデルの値が最小となっている. しかしながら, AIC では $tM(m)$ モデルの値が最小であり, このことは分布の歪んだモデルが有効である可能性を示唆

表 4: マネネスによるオプションの分類

マネネス	コール	プット
$S/K < 0.85$	very-deep-out-of-the-money (VDOTM)	VDITM
$0.85 \leq S/K < 0.91$	deep-out-of-the-money (DOTM)	DITM
$0.91 \leq S/K < 0.97$	out-of-the-money (OTM)	ITM
$0.97 \leq S/K \leq 1.03$	at-the-money (ATM)	ATM
$1.03 < S/K \leq 1.09$	in-the-money (ITM)	OTM
$1.09 < S/K \leq 1.15$	deep-in-the-money (DITM)	DOTM
$1.15 < S/K$	very-deep-in-the-money (VDITM)	VDOTM

している。

以上の表 3 の結果は、最初の限月に対する標本期間のデータを用いたモデルの推定結果であったが、このようなモデルの推定は最後の限月の標本期間のデータまで行っている。図 4 には、NM モデルの μ_a の推移を示した（太線）。この太線の最初の値が、表 3 の μ_a の推定値 -0.020 である。2007 年の中頃までは μ_a は負の値で、それ以降は正となっている。CD_min., CD_mean, CD_max. は、各標本期間における CD レートの最小値、平均値、最大値である。これらの CD レートの値が期待収益率となるので、混合正規分布のもう一方の平均の μ_{bt} の値は、2007 年の中頃までは正の値、それ以降は負の値になることが分かる。図には示していないが、 μ_a となる確率 $p_1 + p_2$ は、最初の標本期間以降も一貫して 1 に近い値となっている。したがって、収益率は右に歪んだ分布から左に歪んだ分布に移行していると考えられる。このことは、図の歪度（細線）の低下と整合的である。

4.3 オプション価格の推定値の比較

NM モデル等のボラティリティ変動モデルと BS モデルによるオプション価格の評価値と、実際の市場価格を用いて、以下のように平均誤差率 (mean error rate; MER) と平均 2 乗誤差率の平方根 (root mean square error rate; RMSER) を計算し、各モデルの比較を行う。

$$\text{MER} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}}{X_i^{\text{市場価格}}} \right), \quad (17)$$

$$\text{RMSER} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}}{X_i^{\text{市場価格}}} \right)^2}, \quad X = C, P. \quad (18)$$

ここで、 $\hat{X}_i^{\text{推定値}}$ はモンテカルロ・シミュレーションによるオプションの推定値、あるいは、BS モデルの理論価格を表し、 $X_i^{\text{市場価格}}$ はオプションの市場価格、 C はコール・オプションの価格、 P はプット・オプションの価格を表す。 N は標本サイズである。MER の値を計算することにより、モデルの推定値が市場価格と比べてどの程度バイアスを持っているかが明らかになる。もう 1 つの RMSER は、推定値と市場価格の乖離度を示す基準である。

また、マネネス (moneyness) は、次のように 7 種類のカテゴリーに分類した (表 4 を参照)。(1)

表 5: コール・オプションの推定値の比較

	VDOTM	DOTM	OTM	ATM	ITM	DITM	VDITM	Total
標本サイズ (N)	160	128	123	108	84	42	96	741
MER								
NM	-0.005	1.112	0.688	0.163	0.021	-0.008	-0.002	0.330
tM	0.182	1.196	0.676	0.157	0.021	-0.007	-0.002	0.382
NM(m)	-0.083	1.654	0.890	0.188	0.023	-0.010	-0.003	0.444
tM (m)	0.173	1.021	0.608	0.149	0.020	-0.006	-0.002	0.338
NM(v)	0.018	1.143	0.690	0.165	0.022	-0.008	-0.002	0.342
tM (v)	0.195	1.251	0.671	0.154	0.020	-0.007	-0.002	0.393
N-EGARCH	0.124	1.386	0.810	0.197	0.030	-0.006	-0.002	0.432
t -EGARCH	0.321	1.120	0.607	0.152	0.022	-0.006	-0.001	0.387
BS	11.449	2.225	0.735	0.149	0.023	0.008	0.006	3.004
RMSER								
NM	1.198	1.886	1.031	0.269	0.079	0.061	0.036	1.055
tM	1.390	1.972	1.002	0.255	0.078	0.061	0.036	1.125
NM(m)	1.106	2.682	1.366	0.315	0.086	0.062	0.036	1.353
tM (m)	1.427	1.783	0.894	0.239	0.078	0.062	0.036	1.063
NM(v)	1.209	1.956	1.020	0.268	0.080	0.061	0.036	1.077
tM (v)	1.422	2.073	0.998	0.254	0.078	0.061	0.036	1.164
N-EGARCH	1.324	2.256	1.168	0.306	0.087	0.062	0.036	1.225
t -EGARCH	1.545	1.889	0.883	0.238	0.079	0.062	0.036	1.127
BS	23.125	3.721	1.185	0.299	0.111	0.090	0.050	10.868

$S/K < 0.85$ ならばコール・オプションは very-deep-out-of-the-money (VDOTM), プット・オプションは very-deep-in-the-money (VDITM) のオプション, (2) $0.85 \leq S/K < 0.91$ ならばコールは deep-out-of-the-money (DOTM), プットは deep-in-the-money (DITM) のオプション, (3) $0.91 \leq S/K < 0.97$ ならばコールは out-of-the-money (OTM), プットは in-the-money (ITM) のオプション, (4) $0.97 \leq S/K \leq 1.03$ ならばコールとプットは at-the-money (ATM) のオプション, (5) $1.03 < S/K \leq 1.09$ ならばコールは ITM, プットは OTM のオプション, (6) $1.09 < S/K \leq 1.15$ ならばコールは DITM, プットは DOTM のオプション, (7) $S/K > 1.15$ ならばコールは VDITM, プットは VDOTM のオプションである.

コール・オプションの MER, RMSER の計算結果は, 表 5 にまとめた. 2 列目から 8 列目まではマネネス別, 一番右の列は全体の結果である. 表の 2 行目には各マネネスと Total での標本サイズを示した. 上段の MER の値から見てみると, Total では NM モデルの値が 0.330 と全てのモデルの中で最小であり, オプション価格の推定値の上方または下方バイアスが最も小さいことが分かる. BS モデルを除いたモデルで比較すると, マネネス別では 3 列目の DOTM から 8 列目の VDITM までの値は大体同じであるが, 2 列目の VDOTM では, NM モデルの値が -0.005 と非常に小さい. このことが, NM モデルの Total の値に影響を与えている. また, ボラティリティが一

表 6: プット・オプションの推定値の比較

	VDOTM	DOTM	OTM	ATM	ITM	DITM	VDITM	Total
標本サイズ (N)	324	85	95	108	101	52	51	816
MER								
NM	-0.053	0.522	0.326	0.114	0.014	0.017	-0.014	0.088
t M	-0.018	0.503	0.305	0.107	0.015	0.019	-0.014	0.097
NM(m)	0.013	0.619	0.381	0.134	0.016	0.015	-0.016	0.134
t M(m)	-0.009	0.482	0.292	0.101	0.014	0.019	-0.014	0.096
NM(v)	-0.006	0.567	0.341	0.116	0.014	0.017	-0.015	0.114
t M(v)	0.044	0.568	0.320	0.105	0.014	0.018	-0.014	0.130
N-EGARCH	0.148	0.744	0.433	0.148	0.021	0.018	-0.015	0.209
t -EGARCH	0.121	0.543	0.312	0.106	0.016	0.019	-0.013	0.157
BS	-0.722	-0.313	-0.006	0.084	0.069	0.069	0.015	-0.295
RMSER								
NM	1.462	1.161	0.652	0.240	0.077	0.055	0.033	1.023
t M	1.476	1.126	0.614	0.224	0.075	0.056	0.032	1.024
NM(m)	1.701	1.352	0.762	0.276	0.085	0.056	0.034	1.191
t M(m)	1.483	1.103	0.589	0.212	0.074	0.056	0.032	1.023
NM(v)	1.573	1.236	0.678	0.244	0.077	0.055	0.033	1.097
t M(v)	1.626	1.246	0.654	0.230	0.075	0.056	0.032	1.127
N-EGARCH	1.923	1.520	0.816	0.280	0.083	0.056	0.032	1.341
t -EGARCH	1.702	1.194	0.615	0.217	0.075	0.056	0.032	1.162
BS	0.890	0.632	0.464	0.237	0.149	0.126	0.068	0.627

定の BS モデルは、VDOTM、DOTM において極度の過大評価が生じている。RMSER の基準においても、Total では NM モデルの値が 1.055 と最小になっている。VDOTM で最小なのは NM(m) モデルの 1.106 であり、NM モデルの結果を上回っているが、NM(m) モデルは NM モデルと同じく左右非対称のモデルである。DOTM では t M(m) の 1.783 が最小であり、これも左右非対称の収益率分布を捉えるモデルである。また、MER の結果と同様に、BS モデルのパフォーマンスは非常に低い。以上の結果から、コール・オプションの評価で最も優れているのは NM モデル、つまり、平均とボラティリティの両方が異なる値をとり得る混合正規 EGARCH モデルであり、分布の非対称性を考慮したモデルは、VDOTM、DOTM のコール・オプションにおいて有効であることが明らかとなった。

表 6 はプット・オプションの結果である。MER の基準では、Total において NM モデルの値が 0.088 と最小の値であり、このことはコール・オプション結果と同じである。しかし、RMSER の Total では、ボラティリティが定数の BS モデルの値が 0.627 と最も小さく、ボラティリティが変動するモデルのパフォーマンスは悪い。また、BS モデルの VDOTM の MER の値は -0.722 と下方バイアスが大きくなっているが、それ以外の DOTM、OTM の MER と、VDOTM、DOTM、OTM の RMSER において他のモデルを圧倒している。結局のところ、プット・オプションでは本

稿で提案した NM モデルが特に優れているとは言えないことが分かる。

表 7 と表 8 は、一年ごとにサンプルを分けた結果である。表 7 のコール・オプションでは、従来の EGARCH モデルが最小となっているのは、MER, RMSER のどちらにおいても 2005 年の t -EGARCH モデルだけである。2006 年では、 $tM(m)$ モデルの MER が 0.686, RMSER が 1.275 で最小であり、それ以降も混合分布によるモデルのパフォーマンスが比較的高い。一方、プット・オプションでは MER と RMSER の両方の基準において、BS モデルが最小となる時期が多く、コールとは対照的な結果となっている。

5 結論と今後の課題

本論文では、オプションの原資産収益率の裾の厚さと左右非対称性、ボラティリティの時系列的変動、ならびにレバレッジ効果を同時に捉える混合正規 EGARCH モデルを提案し、日経 225 オプションの価格データを用いてモデルの検証を行った。実証分析の結果から、混合正規 EGARCH モデルは原資産の収益率の裾の厚さを上手く捉え、特に、混合正規分布を構成する正規分布の数は 4 つの場合が良いことが明らかとなった。コール・オプションについては、最も優れているのは NM モデル、つまり、平均とボラティリティの両方が異なる値をとり得る混合正規 EGARCH モデルであり、分布の非対称性を考慮したモデルは、VDOTM, DOTM のコール・オプションにおいて有効であると考えられる。しかしながら、プット・オプションでは、他のボラティリティ変動モデルと比較して NM モデルが特に優れているわけではないという結果が得られた。

今後の課題としては、レバレッジ効果を捉える他のモデルとして Engle and Ng (1993) の非対称 GARCH モデルや Glosten *et al.* (1993) の GJR モデル等も採用し、比較・検討を行うことが挙げられる。また、投資家のリスク中立性を仮定するのではなく、Duan (1995) や Siu *et al.* (2004) のように原資産収益率の過程にリスク・プレミアムを考慮して定式化を行なうことが考えられる。さらに、中・長期のオプションなど満期までの期間を変えたときの混合正規 EGARCH モデルの有効性についても調べていきたい。

謝辞

本研究で使用した日経 225 オプションのデータは大阪証券取引所から提供して頂いた。また、本論文を作成するにあたり、2012 年度統計関連学会連合学会（北海道大学）の参加者から多くの貴重なコメントを頂いた。ここに記して感謝の意を表したい。

表 7: コール・オプションの推定値の比較 (期間別)

	2005年	2006年	2007年	2008年	2009年	全期間
標本サイズ (N)	65	119	130	205	222	741
MER						
NM	0.570	0.740	0.674	0.297	-0.129	0.330
t M	0.571	0.781	0.713	0.418	-0.112	0.382
NM(m)	0.939	0.938	1.048	0.167	-0.062	0.444
t M(m)	0.393	0.686	0.621	0.415	-0.101	0.338
NM(v)	0.492	0.761	0.728	0.307	-0.121	0.342
t M(v)	0.566	0.807	0.765	0.436	-0.135	0.393
N-EGARCH	0.666	0.849	0.873	0.338	-0.031	0.432
t -EGARCH	0.321	0.747	0.689	0.487	-0.054	0.387
BS	0.362	0.713	1.143	8.789	0.753	3.004
RMSER						
NM	1.156	1.377	1.383	0.986	0.535	1.055
t M	1.151	1.449	1.438	1.150	0.531	1.125
NM(m)	1.740	1.827	2.024	0.843	0.619	1.353
t M(m)	0.906	1.275	1.355	1.181	0.548	1.063
NM(v)	1.032	1.407	1.487	0.994	0.541	1.077
t M(v)	1.124	1.495	1.547	1.183	0.511	1.164
N-EGARCH	1.336	1.544	1.728	1.072	0.628	1.225
t -EGARCH	0.827	1.359	1.443	1.270	0.584	1.127
BS	1.205	1.709	3.184	20.362	1.848	10.868

表 8: プット・オプションの推定値の比較 (期間別)

	2005 年	2006 年	2007 年	2008 年	2009 年	全期間
標本サイズ (N)	73	137	149	206	251	816
MER						
NM	0.716	0.907	0.099	-0.174	-0.332	0.088
tM	0.695	0.927	0.093	-0.147	-0.327	0.097
NM(m)	0.968	0.997	0.168	-0.190	-0.334	0.134
$tM(m)$	0.606	0.937	0.076	-0.127	-0.315	0.096
NM(v)	0.791	0.998	0.121	-0.175	-0.333	0.114
$tM(v)$	0.865	1.033	0.116	-0.148	-0.341	0.130
N-EGARCH	1.150	1.194	0.205	-0.143	-0.311	0.209
t -EGARCH	0.729	1.126	0.120	-0.102	-0.302	0.157
BS	-0.336	-0.123	-0.470	-0.078	-0.451	-0.295
RMSE						
NM	1.803	1.687	0.900	0.393	0.547	1.023
tM	1.807	1.713	0.860	0.390	0.541	1.024
NM(m)	2.317	1.844	1.110	0.437	0.550	1.191
$tM(m)$	1.819	1.715	0.847	0.393	0.531	1.023
NM(v)	1.908	1.843	0.981	0.396	0.548	1.097
$tM(v)$	2.010	1.906	0.965	0.389	0.541	1.127
N-EGARCH	2.657	2.162	1.162	0.426	0.537	1.341
t -EGARCH	1.993	2.055	0.923	0.422	0.527	1.162
BS	0.721	0.505	0.658	0.591	0.665	0.627

参考文献

- Alexander, C. and Lazar, E. (2006). Normal Mixture GARCH(1,1): Applications to Exchange Rate Modelling,
Journal of Applied Econometrics, 21, 307-336.
- Alexander, C. and Lazar, E. (2009). Modelling Regime-Specific Stock Price Volatility,
Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 71, 761-797.
- Badescu, A., Kulperger, R. and Lazar, E. (2008). Option Valuation with Normal Mixture GARCH Models,
Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics, 12, 1-40.
- Bauwens, L. and Lubrano, M. (1998). Bayesian Inference on GARCH Models Using the Gibbs Sampler,
Econometrics Journal, 1, C23-C46.
- Bauwens, L. and Lubrano, M. (2002). Bayesian Option Pricing Using Asymmetric GARCH Models,
Journal of Empirical Finance, 9, 321-342.
- Black, F. and Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities,
Journal of Political Economy, 81, 637-654.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,
Journal of Econometrics, 31, 307-327.
- Christoffersen, P., Heston, S. and Jacobs, K. (2006). Option Valuation with Conditional Skewness,
Journal of Econometrics, 131, 253-284.
- Christoffersen, P. and Jacobs, K. (2004). Which GARCH Model for Option Valuation?,
Management Science, 50, 1204-1221.
- Duan, J.-C. (1995). The GARCH Option Pricing Model,
Mathematical Finance, 5, 13-32.
- Duan, J.-C. and Zhang, H. (2001). Pricing Hang Seng Index Options around the Asian Financial Crisis – A GARCH Approach,
Journal of Banking & Finance, 25, 1989-2014.
- Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation,
Econometrica, 50, 987-1007.

- Engle, R.F. and Mustafa, C. (1992). Implied ARCH Models from Options Prices,
Journal of Econometrics, 52, 289-311.
- Engle, R.F. and Ng, V.K. (1993). Measuring and Testing the Impact of News on Volatility,
Journal of Finance, 48, 1749-1778.
- Glosten, L.R., Jagannathan, R. and Runkle, D.E. (1993). On the Relation between the Ex-
pected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks,
Journal of Finance, 48, 1779-1801.
- Haas, M., Mittnik, S. and Paoletta, M.S. (2004). Mixed Normal Conditional Heteroskedasticity,
Journal of Financial Econometrics, 2, 211-250.
- 三井秀俊 (2000). 「日経 225 オプション価格の GARCH モデルによる分析」
『現代ファイナンス』 7, 57-73.
- 三井秀俊, 渡部敏明 (2003). 「ベイズ推定法による GARCH オプション価格付けモデルの分析」
『日本統計学会誌』 33, 307-324.
- 森保洋 (1999). 「ARCH モデルによる日経 225 オプション評価」
『現代経済学研究』 7, 143-159.
- Nelson, D.B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach,
Econometrica, 59, 347-370.
- Noh, J., Engle, R.F. and Kane, A. (1994). Forecasting Volatility and Option Prices of the S&P
500 Index,
Journal of Derivatives, 2, 17-30.
- Sabbatini, M. and Linton, O. (1998). A GARCH Model of the Implied Volatility of the Swiss
Market Index from Option Prices,
International Journal of Forecasting, 14, 199-213.
- Saez, M. (1997). Option Pricing under Stochastic Volatility and Stochastic Interest Rate in the
Spanish Case,
Applied Financial Economics, 7, 379-394.
- Satoyoshi, K. and Mitsui, H. (2011). Empirical Study of Nikkei 225 Options with the Markov
Switching GARCH Model,
Asia-Pacific Financial Markets, 18, 55-68.
- Siu, T.K., Tong, H. and Yang, H. (2004). On Pricing Derivatives under GARCH Models: A
Dynamic Gerber-Shiu Approach,
North American Actuarial Journal, 8, 17-31.

- 里吉清隆, 三井秀俊 (2011). 「原資産価格のブル・ベアを考慮したオプション価格付けの実証研究」
『産業経営研究』 33, 63-87.
- 竹内(野木森) 明香, 渡部敏明 (2008). 「日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性とオプション価格」
『現代ファイナンス』 24, 45-74.
- 渡部敏明 (2003). 「日経 225 オプションデータを使った GARCH オプション価格付けモデルの検証」
『金融研究』 22, 1-34.
- Watanabe, T. and Ubukata, M. (2009). Option Pricing Using Realized Volatility and ARCH Type Models,
Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series, 066, Hitotsubashi University.

Research Institute of Economic Science
College of Economics, Nihon University

1-3-2 Misaki-cho, Chiyoda-ku, Toyko 101-8360 JAPAN
Phone: 03-3219-3309 Fax: 03-3219-3329
E-mail: keikaken.eco@nihon-u.ac.jp
<http://www.eco.nihon-u.ac.jp/center/economic/>