

極大外平面グラフ最短経路書き換えアルゴリズム

経済システムに関する数理モデルを用いた解析

栗野俊一*

1. はじめに

1.1 最短経路問題

グラフに於ける、2点間の最適な経路を求めるという、グラフの最短経路問題は、古典的な課題であり、多くの応用分野をもつ。特に、経路の長さをコストと解釈すれば、経済的な様々な問題の最適化と関係があり、その重要性は言うまでもないであろう。

それだけに、様々な研究がなされており、実質、与えられたグラフに対し、その最短経路を求める最適アルゴリズムは、既に、得られている。

1.2 最短経路の書き換え問題

ここで、最短経路問題の変形として、既に、特定な始点から、最短経路が得られているという仮定の下に、その始点に隣接した点からの最短経路を求めるという問題を考え、これを最短経路の書き換え問題と呼ぶ事にする。

この書き換え問題は、従来の最短経路問題と比較して、これから計算しようとする始点からの最短経路を求める際、それと隣接した点からの最短経路の情報が利用可能であるため、より、高速に計算できる可能性がある。

実際、隣接した2点からの最短経路同士を比較すると、多くの場合、経路が変化していない場合が多く、この場合、新しい始点からの経路として、計算済みの経路をそのまま転用可能となる。

したがって、より高速なアルゴリズムを構成できる可能性が生じる。

2. 準備

2.1 グラフに係る一般的な定義

グラフに係る一般的な用語の定義は、特に断らない限り、文献 [1] に従う。ただし、ここで扱うグラフは、全て連結な単純グラフ（ループや多重辺を含まない [1]）だけである。

定義 1 (グラフ $G(V, E)$). グラフ $G(V, E)$ は、点の集合 V と、点と点を結ぶ辺の集合 E の対 $G(V, E)$ とする。

* 日本大学経済学部 < kurino.shunichi@nihon-u.ac.jp >

定義 2 (有向グラフと無向グラフ). 辺が向きを持つグラフを有向グラフ, そうでない場合を無向グラフと呼ぶ.

定義 3 (経路). グラフ $G(V, E)$ の異なる 2 点 $p, q \in V$ に対し, p から始まり, q で終わる点列 $p = p_0, p_1, \dots, p_k = q$ ただし, p_i と p_{i+1} は連結 (即ち, 辺 $(p_i, p_{i+1}) \in E$) とする時, この点列, あるいは, 辺列 $(p, p_1) = (p_0, p_1), (p_1, p_2), \dots, (p_{k-1}, p_k) = (p_{k-1}, q)$ を, 点 p から q への経路と呼ぶ. また, k を経路の長さと呼ぶ.

定義 4 (最短経路と距離). p から q への経路で最も長さの短い経路を, 最短経路と呼ぶ. また, その時の経路の長さを, 点 p, q 間の距離と呼び, $d(p, q)$ で表す¹⁾.

2.2 最短経路問題

最短経路問題は, 次の二つに類別される.

単一始点最短経路問題 (SSSP: Single Source Shortest Path) 特定の始点から他の全点との間の最短経路問題 ($O(VE)$ のアルゴリズムが知られている).

全点对最短経路問題 (APSP: All Pair Shortest Path) グラフ内のあらゆる 2 点の組み合わせについての最短経路問題 ($O(V^3)$ のアルゴリズムが知られている).

いずれも, 与えられたグラフから, 対象とする 2 点間の最短経路と, その間の最短距離を得る事ができる.

後者の問題は, 前者の問題を, 始点を次々と変更して行く事で解くことはできる.

しかし, 後者の問題を, 前者と区別するのは, 後者の問題を解く場合に, 既存の計算結果を再利用する事により, 前者の繰返しより, 高速に問題を解くことが可能になるからである.

本論文の議論の対象は, なんらかの方法で, すでに 1 点から最短経路が得られているという前提で, その後にその 1 点に隣接する他の点からの最短経路を求めるという問題であり, 問題の種類としては, 単一始点と同じ形式であるが, 手法としては, 既に計算済みの最短経路の情報を活用するという点では, 全点对と同じアプローチを取る.

2.3 最短経路の書き換え問題

ここでは, 最短経路の書き換えという作業を明確にするために, 次のような最短経路網を考える.

定義 5 (最短経路網). 重みのない与えられた無向の単純グラフ $G(V, E)$ に対して, 次のように辺に向き $dr_o(p, q)$ を付けた結果を, o を始点とした最短経路網と呼ぶ.

$$dr_o(p, q) = d(o, q) - d(o, p)$$

辺 (p, q) の向きとは, その辺が, 始点 o に対して, p から q に移動した時に, o に近づく (-1 の場合) か, 遠ざかる ($+1$ の場合) か, それとも変化がない (0 の場合) かの何れかを示している.

したがって, 始点 o から, G 上の点 p までの最短経路を得るには, 点 p から向き $dr_o(p, q)$ が -1 とな

1) 最短経路は複数種類ある可能性があるが, 距離は一意に定まる.

る q (すなわち, p より o に近づく q) を取るように, 順に移動すれば, 最後には, 必ず o に到達し, その移動した経路が, 最短経路となる.

定義 6 (最短経路の書き換え問題) o を始点とした最短経路網が与えられたとき, o と隣接した点 n を始点とした最短経路網を求める問題を, 最短経路の書き換え問題と呼ぶ.
この計算を行う場合, o を始点とした最短経路網の情報を書き換えて良い²⁾.

3. 様々なグラフ上の最短経路の書き換え問題

最短経路の書き換え問題は, 対象となるグラフの形状によって, 効率が異なる.

最も効率が良いのは, 木の場合であり, この場合は, 一箇所の辺 (o, n) の向きを, 逆向きにすればよく, その他の向きは変更する必要がない³⁾.

$$dr_n(p, q) = \begin{cases} -dr_o(p, q) & ((p, q) = (o, n) \vee (n, o) \text{ の場合}) \\ dr_o(p, q) & (\text{その他 (変更不要)}) \end{cases}$$

一方, グラフが完全グラフの場合は, o, n の 2 点に隣接する辺の向きを全て変更する.

$$dr_n(p, q) = \begin{cases} -dr_o(p, q) & ((p, q) = (o, n) \vee (n, o) \text{ の場合}) \\ 0 & (p = o \wedge q \neq n \text{ の場合}) \\ 0 & (p \neq n \wedge q = o \text{ の場合}) \\ 1 & (p = n \wedge q \neq o \text{ の場合}) \\ -1 & (p \neq o \wedge q \neq n \text{ の場合}) \\ dr_o(p, q) & (\text{その他 (変更不要)}) \end{cases}$$

4. 極大外平面グラフ上の最短経路の書き換え問題

前章で述べたように, 書き換えのアルゴリズムや, その効率は, グラフの種類によって異なる.

ここでは, 極大外平面グラフに関する書き換えの性質や, その計算量の評価を行う.

4.1 極大外平面グラフ

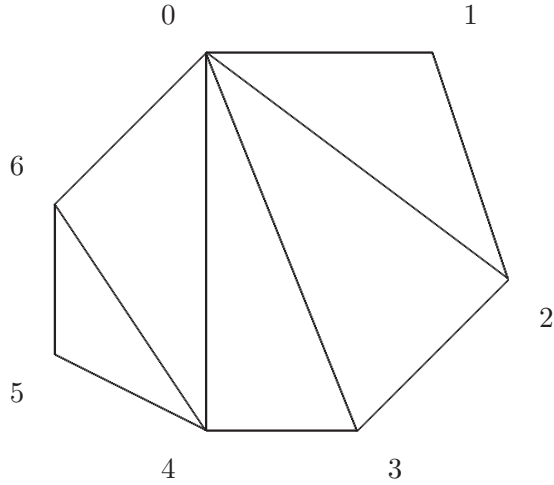
定義 7 (極大外平面グラフ). n 点からなる極大外平面グラフは, n 角形の周辺と, その内部に, 互いに交叉しないように, 可能な限り沢山の対角線を引いた時の対角線からなる (Figure 1).

4.2 極大外平面グラフの性質

極大外平面グラフ ($G(V, E)$) に関しては, 次のような性質が知られている.

-
- 2) したがって, 変化しない部分はそのまま利用して良い.
 - 3) ただ, この例から想像できるように, 最短経路問題のアルゴリズムでは, 一般に, 始点からの距離が計算されるが, この形で, 最短経路の書き換えを行った場合は, 距離は計算されない. もし, 距離が欲しい場合は, この最短経路網から, 再度計算する必要がある ($O(V)$ の計算量).

Figure 1: 極大外平面グラフ: 点の個数は 7 点で, 辺の本数は $7+4=11$ 本



辺の本数 辺の本数 $(|E|)$ は $2|V|-3$

外周 (全ての点を一度ずつ周る) 辺 外周の辺の本数は $|V|$ 本 (ハミルトングラフである)

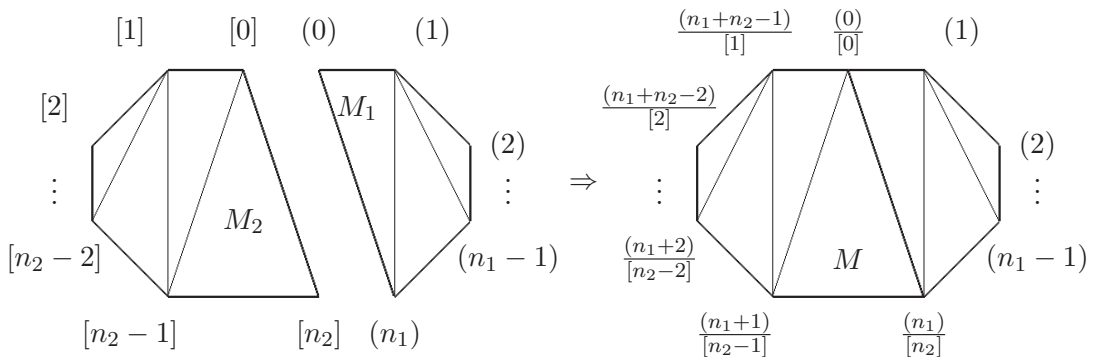
対角辺 (外周の内側にある) 対角辺の本数は $|V|-3$ (平面グラフである)

極大外平面グラフの拡大 G の外周辺 (p, q) に対し, その外側に新しい点 n を追加し, 新しい, 極大外平面グラフ $G'(V+\{n\}, E+\{(p, n), (q, n)\})$ を作る事ができる. この G' を, 元の G の拡大と呼ぶ事にする. 外周辺の選び方によって, 異なる拡大が存在する.

極大外平面グラフの分割 極大外平面グラフ $G(V, E)$ の一つの対角辺 (p, q) を用いて, 次のように, 二つの極大外平面グラフ $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_1)$ に分割できる (Figure 2).

$$\begin{aligned} E &= E_1 \cup E_2 \\ E_1 \cap E_2 &= \{p, q\} \\ V &= V_1 \cup V_2 \\ V_1 \cap V_2 &= \{(p, q)\} \end{aligned}$$

Figure 2: 極大外平面 M を辺 $(0, n_1)$ で, 二つのグラフ M_1/M_2 に分割している



5. 極大外平面グラフ最短経路の書き換え問題

ここでは、極大外平面グラフに対する最短経路の書き換え問題を考える。この問題を解くにあたり、極大外平面グラフに関する、二つの性質を示す。

5.1 極大外平面グラフ最短経路の書き換えアルゴリズム

定理 8 (書き換えが不要な対角辺). 極大外平面グラフ $G(V, E)$ の対角辺 (p, q) に着目し, $G(V, E)$ を G_1, G_2 に分割したとする. そして, G_1 の (p, q) 以外の辺 (p_1, q_1) を考え, p_1 から q_1 への書き換えを行う事を考える. ここで, もし, この書き換えで, (p, q) の辺の向きが変更されなければ, G_2 の辺の書き換えも行われない.

Proof. いま, p_1 から q_1 への書き換えを行ったにも拘わらず, 辺 (p, q) の向きが変更されなかったとする. これは仮定より,

$$dr_{q_1}(p, q) = d(q_1, q) - d(q_1, p) = d(p_1, q) - d(p_1, p) = dr_{p_1}(p, q)$$

を意味する. ここで, G_2 の辺, (p_2, q_2) に着目し, その辺の向きを考え, 2点 p_1, q_1 から p_2, q_2 への最短経路を考えると, G_1 と G_2 は, 辺 (p, q) で分割されているため, その最短経路には p, q のいずれかが必ず現れる. その組み合わせは, $2^3 = 8$ 通り考えられるが, 一般性を失う事なく, p_1, p_2 の最短経路が p を通り, q_1, q_2 の最短経路も p を通る場合と, そうでなく, q を通る場合の二つの場合を考えればよい.

(共に p を通る場合)

$$\begin{aligned} dr_{p_1}(p_2, q_2) &= d(p_1, q_2) - d(p_1, p_2) \\ &= (d(p_1, p) + d(p, q_2)) - (d(p_1, p) + d(p, p_2)) \\ &= d(p, q_2) - d(p, p_2) \\ &= (d(q_1, p) + d(p, q_2)) - (d(q_1, p) + d(p, p_2)) \\ &= d(q_1, q_2) - d(q_1, p_2) \\ &= dr_{q_1}(p_2, q_2) \end{aligned}$$

よって, 辺 (p_2, q_2) の向きは変らない.

(通る点が異なる場合)

$$\begin{aligned} dr_{p_1}(p_2, q_2) &= d(p_1, q_2) - d(p_1, p_2) \\ &= (d(p_1, p) + d(p, q_2)) - (d(p_1, q) + d(q, p_2)) \\ &= (d(p_1, p) - d(p_1, q)) + (d(p, q_2) - d(q, p_2)) \\ &= dr_{p_1}(p, q) + (d(p, q_2) - d(q, p_2)) \\ &= dr_{q_1}(p, q) + (d(p, q_2) - d(q, p_2)) \\ &= (d(q_1, p) - d(q_1, q)) + (d(p, q_2) - d(q, p_2)) \\ &= (d(q_1, p) + d(p, q_2)) - (d(q_1, q) + d(q, p_2)) \\ &= d(q_1, q_2) - d(q_1, p_2) \\ &= dr_{q_1}(p_2, q_2) \end{aligned}$$

よって、辺 (p_2, q_2) の向きは変わらない。

場合分けした、いずれの場合でも命題が成立するので、この命題は常に成立する。 □

この定理を利用する事により、次の最短経路書き換えアルゴリズムの妥当性が示される。

定理 9 (極大外平面グラフの最短経路書き換えアルゴリズム). 極大外平面グラフ G の外周辺 (o, n) において、 o に関する最短経路網が与えられた時に、 n に関する最短経路網を、次のようなアルゴリズムで構成する事ができる。

(書き換えアルゴリズム) ダイクストラ法と同様に、最短経路を求めるが、それと同時に、辺の向きを計算し、書き換え前の辺の向きと比較する。辺の向きに変化があれば、上書きするが、もし、途中で、辺の向きが変化しない対角辺を発見したら、そこから以遠は処理しない。

このアルゴリズムは、書き換えが必要な辺の向きだけを変更する。

Proof. ダイクストラ法では、辺 (o, n) に近い方の辺から書き換えを行うが、途中で、向きの変化しない辺 (p, q) を発見したら、定理 8 より、その辺で分割した、辺 (o, n) 含まない側のグラフの辺は書き換えが不要である。したがって、向きが変更されない辺を発見した段階で、処理をやめることにより、書き換えが必要な部分だけを参照し、また書き換えを行う事がわかる。 □

5.2 書き換えアルゴリズムの計算量

定理 9 のアルゴリズムは、最初に書き換える辺によって、書き換える範囲が異なり、最悪の場合は、 $O(|V|)$ となる可能性がある。

しかし、次の性質により、平均的には、 $O(1)$ である事が示される。

定理 10 (辺の向きは一回転しかしない). 極大外平面グラフ G の一つの辺の向きに着目する。始点を、外周に従って、一回転した場合、向きも一回転する。この結果、外周辺は合計 3 回、対角辺は 4 回の書き換えがおこなわれる。

Proof. (外周辺の変化が 3 回で一回転) まず、外周辺に関して、点の個数 $|V|$ に関する帰納法で示す。

($|V|=3$ の場合) 点の個数が 3 であり、始点を 3 度変更すると、その度に、全ての辺の向きが書き変わるの、書き換え回数は 3 となり、一周する。

($|V|=k$ 以下で成立するとしたときの $|V|=k+1$ の場合) 外周辺 (o, n) を考える。すると、ある点 r が存在し、 $(o, r), (n, r) \in E$ となっている。

この時、辺の向きは以下ようになる。

$$dr_o(o, n) = +1, dr_r(o, n) = 0, dr_n(o, n) = -1$$

始点の移動を, o から始め, n と反対方向に $o=p_0, p_1, \dots, p_j=r, p_{j+1}, \dots, p_k=n, p_{k+1}=o$ の順に始点を移動させながら, 最短経路を書き換えるとする. ここで, 辺 (o, r) が外周辺であれば, 始点を o から r に書き換への時に変化するので, 1 回の変更が起きる.

対角辺の場合であるが, (o, r) で, 分割したグラフ $G'(V', E')$ を考えると, このグラフは, 極大外平面グラフでかつ, $|V'| < |V| = k+1$ すなわち, $|V'| \leq k$ なので帰納法の仮定より, 始点を G' の外周に従って回すと, (o, r) は, 3 回変化する. しかも, その内の 1 回は, r から o に変化する場合なので, その 1 回を除けば, 2 回しか変化せず, その変化は $+1$ から 0 と, 0 から -1 である.

辺 (o, r) の向きが, $+1$ と, 0 の時は, 辺 (o, n) の向きは, $+1$ のまま変化しない.

したがって, 辺 (o, r) の向き -1 になった時だけ, (o, n) の値は, 0 となり, 結局, o から r になるまでは, (o, r) が外周辺の場合と同様に 1 回だけ変化する.

r から n の時も同様なので, 結局, ここまでで 2 回変化し, n から o に戻る時に, 1 回変化するので, 合計 3 回となる.

以上により, $|V| = 3$ の場合に, 成立し, $|V| \leq k$ の時に成立すると仮定した $|V| = k+1$ の場合も成立するので, $|V| \geq 3$ となる全ての場合で, 外周辺の変化の回数が 3 である事が示された.

(対角辺の変化が 4 回で一回転) (o, n) が対角辺である場合を考える. G を (o, n) で分割して, G_1, G_2 を作れば, 辺 (o, n) は, G_1, G_2 の外周辺となるので, 上から, G_1, G_2 で, それぞれ 3 回の合計 6 回で, 二周する事になる. それぞれ, G_1 の場合は, n から o , G_2 の時には, n から o なので, これは, G の外周をまわる場合は, 実際には起きないので, 2 を引いて 4 回となる. また, それが起こらないことより, それぞれ半周ずつ取り除かれ, 一周分が失われるので, 結局, 1 周しかしない. □

上記の定理 10 より, 直に, 次の系 11 が成り立つ.

系 11 (始点を一周した場合の計算量) 極大外平面グラフ G に対し, 外周に従って, 始点を一回転させながら, 各始点で, 定理 9 のアルゴリズムを適用した場合, 全体の辺の書き換え回数は $O(|V|)$ である.

Proof. 定理 9 のアルゴリズムは, 向きの変化する辺だけを書き換える. 一方, 始点を外周に従って一周させた場合, 向きの変化は, 一つの辺当たり, 最大で 4 回である. すなわち, $4|E|$ だけしか変更がない. よって, 各始点で書き換える回数は, 色々とは変化する可能性があるが, 全体としては, $O(4|E|) = O(|E|) = O(2|V|-3) = O(|V|)$ となる. □

定理 12 (最短経路書き換えの平均の計算量) 定理 9 のアルゴリズムの平均の計算量は, $O(1)$ である.

Proof. 系 11 より, 始点を外周に従って 1 周した場合の計算量は $O(|V|)$ である. 一方, 1 周するという事は, 定理 9 のアルゴリズムを $|V|$ 回適用した事になる.

従って, 上記のアルゴリズム 1 回分の計算量は $O(|V|/|V|) = O(1)$ となる. □

6. 終わりに

グラフの特定の始点からの最短経路を求めるために、すでに、計算済みの隣接した点を始点とした経路を活用する事を考えた。

この方法は、一般には適用できないが、極大外平面グラフという小さなクラスでは、自明でない結果として、 $O(1)$ のアルゴリズムを得る事ができた。

今後は、この結果を、より広いクラスのグラフに対して、広げる事ができないかという事を検討して行きたい。

7. 謝辞

本研究の推進には、日本大学 経済学部 経済科学研究所より資金援助を受けた。

References

- [1] R.J. ウィルソン著, 斎藤・西関共訳 (1985) 『グラフ理論入門』 近代科学社出版.