

非対称確率的ボラティリティ・モデルによる 日経 225 オプション価格の分析

三井 秀俊

1. はじめに

株式市場には、原資産収益率とボラティリティ (Volatility) との間の関係として、ある種の非対称 (Asymmetry) な動きがあることが知られている。原資産収益率が下落すると、次期にはボラティリティは上昇し、原資産収益率が上昇すると、次期にはボラティリティは下落する傾向があるとしている (Leverage effects)。これは、原資産収益率とボラティリティの間には負の相関があることを示唆している。また、原資産収益率のボラティリティは経験的な事実として時間を通じて確率的に変動していることが知られている。ボラティリティが確率的に変動するモデルとして確率的ボラティリティ・モデル (Stochastic Volatility Model; SV Model)¹⁾ がある。SV モデルはボラティリティを観測されない変数として扱い、ボラティリティの対数が自己回帰の線形確率過程に従うとしてモデル化されている。

オプション価格理論において、原資産収益率のボラティリティは重要な役割を果たしており、オプション価格に対して感応度の高いパラメータである。オプション理論における SV モデルの実証研究の多くは、ボラティリティの変動が平均回帰性を持ち、ボラティリティの対数値が確率的に変動していると仮定している。これまでの実証研究としては、Hull/White (1987), Wiggins (1987), Scott (1987), Chesney/Scott (1989), Melino/Turnbull (1990) などがある。

そこで、本研究では、非対称確率的ボラティリティ・モデル (Asymmetric Stochastic Volatility Model) を用いてオプション市場における実証研究を行った。代表的なボラティリティ変動モデルである ARCH 型モデル (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model) とは異なり、SV モデルでは尤度を求めることが難しい。しかし、(1) 情報量の日々の確率的变化をモデル化できること、(2) オプション理論で用いている Ornstein - Uhlenbeck 過程のような連続時間確率過程に従うボラティリティ変動モデルに対して離散近似が可能なことから SV モデルを用いた。本研究では、疑似最尤法 (Quasi-Maximum Likelihood estimation; QML) を用いて SV モデルの推定を行った。QML を用いた理由は、推定に時間を要しないこと、資産収益率とボラティリティとの間の相関がある場合への拡張が Harvey/Shephard (1996) によって行なわれていることである。

実証分析を進めるにあたっては、原資産として日経 225 株価指数のデータを用いて実証的な検証を行った。推定結果として、原資産収益率とボラティリティとの相関の値は高い負の値の推定値が得られた。日経 225 株価指数のデータを用いて、QML により非対称 SV モデルの推定を行い、コール/プット・オプション価格をモンテカルロ・シミュレーションにより導出した。日経 225 オプションの市場価格のデータにより、非対称 SV モデルと Black/Scholes (1973) (以下、B-S

モデル) のコール / プット・オプション価格と比較を行った。全体的にみると、非対称 SV モデルによるオプション価格は B-S モデルと比較して必ずしも優れているわけではないという結果となった。

本論文の以下の構成は次の通りである。第2節では、最初に SV モデルと非対称 SV モデルについて解説を行う。次に、オプション価格への応用について説明し、オプション価格の導出方法について説明する。第3節では、本研究で利用した日経 225 株価指数・日経 225 オプションのデータと実証結果について述べる。最後の第4節では、結論と今後の課題について述べる。

2. 非対称 SV モデルによるオプション価格付け

2.1 非対称 SV モデル

この節では、SV モデルと非対称 SV モデルについて簡単に説明を行う。実証分析では、モデルのパラメータの推定には離散時間データが使われるため、離散時間 SV モデルが利用される。離散時間 SV モデルは、

$$R_t = \sigma_t u_t \quad (2.1)$$

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha + \beta \ln \sigma_{t-1}^2 + \eta_t \quad (2.2)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right), t = 1, \dots, T$$

となる。 R_t は収益率を表す。 u_t は平均 0, 分散 1, η_t は平均 0, 分散 σ_η^2 の正規分布に従う攪乱項である。 u_t, η_t は過去と独立で同一な (i.i.d.: independently and identically distributed) 標準正規分布に従うと仮定する。(2.2) 式は、ボラティリティの対数値が AR (1) プロセス (first-order autoregressive process; 1 次の自己回帰過程) に従うことを示している²⁾。

株式市場によく見られるある種の非対称な動きをモデルに与えるには、(2.1), (2.2) 式での u_t と η_t に対して相関関係を考えれば良い。前日の株価収益率がボラティリティに与える影響を捉え

るために、ボラティリティの変動を 1 期先行させる。 u_t と η_t とが、相関係数 ρ を持つとし離散時間 SV モデルを構築すると、

$$R_t = \sigma_t u_t \quad (2.3)$$

$$\ln \sigma_{t+1}^2 = \alpha + \beta \ln \sigma_t^2 + \eta_t \quad (2.4)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right), t = 1, \dots, T$$

となる。上記の SV モデルとの相違点は、 u_t と η_t とが相関係数 ρ を持つということである。(2.3),

(2.4) 式では、未知のパラメータは、 $\{\alpha, \beta, \sigma_\eta^2, \rho\}$ である。ここで、非対称性を示すパラメータは相関係数 ρ である。SV モデルは尤度を求めることが難しいため、カルマン・フィルター (Kalman Filter) によって求まる疑似尤度を最大化する疑似最尤法 (QML: Quasi-Maximum Likelihood estimation) によりパラメータの推定を行う³⁾。非対称 SV モデルに関しては、Harvey/Shephard (1996) によって提案された非対称離散時間型 SV モデルを QML を用いてパラメータの推定を行う。

2.2 オプション価格への応用

原資産を株式として、株価 S , ボラティリティ σ^2 は、以下の拡散過程に従うと仮定する。また、ボラティリティは平均回帰性 (mean reversion) があるとする⁴⁾。ここで dz_1 と dz_2 はウィナー過程の微小分とし、相関係数 ρ を持つものとする。 θ は定数である。また、オプションはヨーロッパ型・コール・オプション⁵⁾ とすると、

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz_1 \quad (2.5)$$

$$\frac{d\sigma^2}{\sigma^2} = \kappa[\theta - \ln(\sigma^2)]dt + \delta dz_2 \quad (2.6)$$

$$Cov(dz_1, dz_2) = \rho dt$$

となる。(2.5), (2.6) 式は連続時間型であるため、離散時間型に書き換えると、

$$R'_t = \sigma_t u_t (= R_t - \mu) \quad (2.7)$$

$$\ln(\sigma_{t+1}^2) = \kappa\theta + (1-\kappa)\ln(\sigma_t^2) + \delta w_t \quad (2.8)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ w_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \right), t=1, \dots, T$$

となる⁶⁾。 u_t と w_t は平均 0, 分散 1 の標準正規分布に従う攪乱項である。したがって $\kappa\theta = \alpha$, $1 - \kappa = \beta$, $\delta w_t = \eta_t$ となり (2.5), (2.6) 式のパラメータは 2.1 節で説明した QML を用いて推定することができる。

コール・オプション価格 C は, 株価 S , ボラティリティ σ^2 , 現在の時点 t の関数であり $C(S, \sigma^2, t)$ と表現され, 関数は連続な 2 階の偏導関数を持つものと仮定する。(2.5), (2.6) 式と, Cox/Ingersoll/Ross (1985) の定理およびレムマから⁷⁾, 偏微分方程式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho\delta\sigma^3 S \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \sigma^2} \\ & + \frac{1}{2}\delta^2\sigma^4 \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^4} + rS \frac{\partial C}{\partial S} \\ & + \{\kappa\sigma^2[\theta - \ln(\sigma^2)] - \lambda\sigma^2\} \frac{\partial C}{\partial \sigma^2} - rC + \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad (2.9) \end{aligned}$$

が得られる。 $\lambda\sigma^2$ はボラティリティのリスク・プレミアム⁸⁾を表す。ここで, 代表的な投資家の効用関数が対数関数であると仮定すると $\lambda\sigma^2 = 0$ ⁹⁾ となり, この偏微分方程式に以下のような適切な境界条件,

$$\begin{aligned} C(S, \sigma^2, T) &= \text{Max}(S_T - K, 0) \\ C(0, \sigma^2, t) &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial S} C(\infty, \sigma^2, t) &= 1 \\ rS \frac{\partial C}{\partial S}(S, 0, t) + \kappa\theta \frac{\partial C}{\partial \sigma^2}(S, 0, t) - r(S, 0, t) + \frac{\partial C}{\partial t}(S, 0, t) &= 0 \\ C(S, \infty, t) &= S \end{aligned}$$

を与えることによりコール・オプション価格を導

出すればよい。しかし, (2.9) 式から閉じた形の解 (closed form solution) を求めることはできない¹⁰⁾。そこで, 代表的な投資家がリスク中立的な選好をもつものと仮定する¹¹⁾ と, リスク・プレミアムが存在しないため, オプションの収益率の期待値は安全資産利率の期待値に等しくなる¹²⁾。このときの時点 t でのコール・オプション価格は,

$$\begin{aligned} C_t^{SV} &= e^{-r(T-t)} \hat{E} [\text{Max}(S_T - K, 0)] \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^\infty [\text{Max}(S_T - K, 0)] \\ & \quad p(S_T | S, \sigma^2) dS_T \quad (2.10) \end{aligned}$$

と表現される。 \hat{E} はリスク中立的な世界での期待値, S_T は満期日の株価, $p(\cdot | \cdot)$ は条件付確率密度関数を表す。

2.3 オプション価格の導出方法

しかし, (2.10) 式の解析解は得ることができない。したがって本研究では, モンテカルロ・シミュレーション (Monte Carlo Simulation) によりオプション価格を導出する。

まず最初に無相関の標準正規分布に従う乱数 $\{u_s\}_{s=t}^T, \{w_s\}_{s=t}^T$ を発生させる。次にそれを使って $\{\eta_s\}_{s=t}^T$ を以下のように計算する。

$$\eta_s = \sigma_\eta(\rho u_s - w_s \sqrt{1 - \rho^2}) \quad (2.11)$$

このようにして得られた分布は,

$$\begin{pmatrix} u_s \\ \eta_s \end{pmatrix} \sim i.i.d.N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right), \quad s = t, \dots, T \quad (2.12)$$

となる。ここで, ボラティリティの適当な初期値 σ_t^2 から出発し $\{\eta_s\}_{s=t}^T$ を (2.2) 式に逐次代入することにより $\{\sigma_s\}_{s=t+1}^T$ が計算され, さらにそれに $\{u_s\}_{s=t+1}^T$ を掛けることにより $\{R_s\}_{s=t+1}^T$ が得られる。そこで株価の適当な初期値 S_t と

$\{R_s\}_{s=t+1}^T$ より満期日の株価 S_T が得られる。これを十分大きな回数 N 回繰り返し、そこから $\{S_{T,i}\}_{i=1}^N$ を求める。それを使ってオプションの期末の価値を現在価値に割り引いた値の平均値

$$\hat{C}_t^{SV} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(e^{-r(T-t)} \text{Max}[S_{T,i} - K, 0] \right) \quad (2.13)$$

として計算し、それをコール・オプション価格とする。大数の法則により $N \rightarrow \infty$ とすると、(2.13) 式の右辺は、 $E(e^{-r(T-t)} \text{Max}[0, S_T, i - K])$ に収束する。

モンテカルロ・シミュレーションにおいて、推定値の精度を高めるにはシミュレーションの試行回数 N を増やせばよい。しかし、試行回数を増やすと演算時間を非常に長く要する。そこで、ここでは、限られた N の下で推定値の分散をより縮小させるようなモンテカルロ・シミュレーションの手法 (分散減少法; Variance Reduction method)¹³⁾ を用いる。SV モデルの拡散過程と分散が決定論的に変動しているモデルの拡散過程は類似し、後者の拡散過程からは解析解を得ることが可能なため、本研究ではコール・オプション価格を推定するために制御変数法 (Control Variate method)¹⁴⁾ を用いた。解析解は分散が決定論的に変動しているモデルを、B-S の公式¹⁵⁾ に当てはめることにより得る。分散が決定論的に変動している B-S のコール・オプション価格は、

$$C_t^{BS} = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty [\text{Max}(S_T - K, 0)] f(S_T) dS_T \quad (2.14)$$

と表現される。したがって、制御変数法を用いるとコール・オプション価格の推定値は、

$$\hat{C}_t^{CV} = C_t^{BS} + e^{-r(T-t)} \int_K^\infty$$

$$[\text{Max}(S_T - K, 0)] [h(S_T) - f(S_T)] dS_T \quad (2.15)$$

によって与えられる¹⁶⁾。(2.15) 式の右辺第1項は(2.14)式の解析解、右辺第2項はモンテカルロ・シミュレーションによる推定値である。(2.15)式を書き換えると

$$\hat{C}_t^{CV} = C_t^{BS} + (\hat{C}_t^{SV} - \hat{C}_t^{BS}) \quad (2.16)$$

\hat{C}_t^{CV} : (2.15) 式の制御変数法によるコール・オプション価格の推定値、

C_t^{BS} : (2.14) 式の解析解によるコール・オプション価格、

\hat{C}_t^{SV} : (2.13) 式の数値解によるコール・オプション価格の推定値、

\hat{C}_t^{BS} : (2.14) 式の数値解によるコール・オプション価格の推定値、

となる。また、(2.16)式の分散は、

$$\text{Var}(\hat{C}_t^{CV}) = \text{Var}(\hat{C}_t^{SV}) + \text{Var}(\hat{C}_t^{BS}) - 2 \text{Cov}(\hat{C}_t^{SV}, \hat{C}_t^{BS}) \quad (2.17)$$

である。 \hat{C}_t^{CV} をさらに小さくするために、(2.16)式において、

$$\hat{C}_t^{CV*} = \phi C_t^{BS} + (\hat{C}_t^{SV} - \phi \hat{C}_t^{BS}) \quad (2.18)$$

とし、 ϕ が \hat{C}_t^{CV} を最小にするような定数とすると、

$$\phi = \frac{\text{Cov}(\hat{C}_t^{SV}, \hat{C}_t^{BS})}{\text{Var}(\hat{C}_t^{BS})} \quad (2.19)$$

と与えられる¹⁷⁾。事実、この方法を使うと、より分散の小さい推定値を得ることが可能となる。(2.18)式が本研究におけるSVモデルのコール・オプション価格である。

図 1. 日経 225 終値

(1989年12月8日～1997年12月12日)

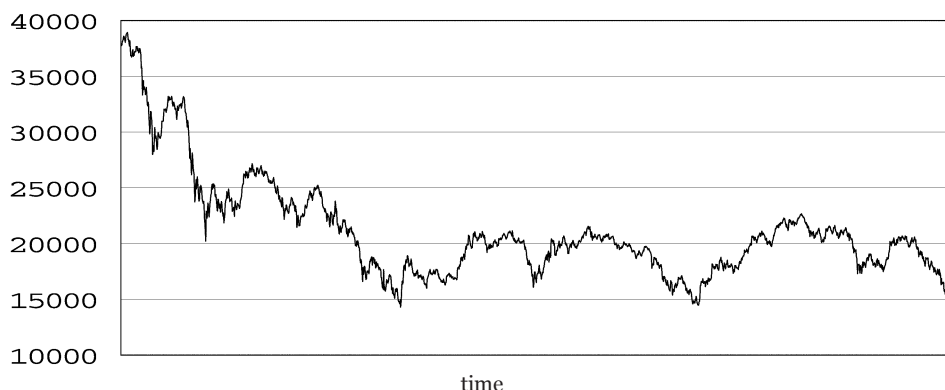
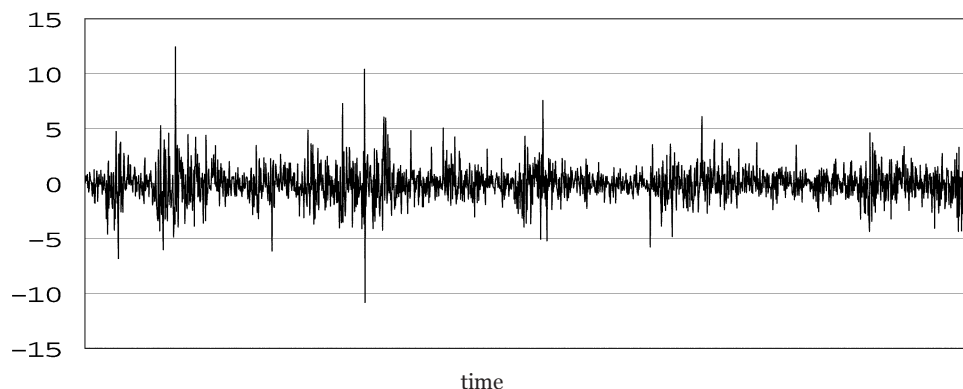


図 2. 日経 225 日次収益率

(1989年12月11日～1997年12月12日)



3. データと実証結果

3.1 データ

本研究では、日経 225 株価指数終値の日次データを用いて 2.1 節の SV モデルと非対称 SV モデルのパラメータの推定を行った。標本期間は、1989年12月8日から1997年12月12日までである(図 1 参照)。収益率は日経 225 株価指数終値の変化率 $R_t = (\ln S_t - \ln S_{t-1}) \times 100(\%)$ として計算した(図 2, 図 3, 図 4 参照)。標本期間は、1989年12月11日から1997年12月12日まで、標本数は 1976 である。データの基本統計量は、表 1 に纏められている。

日経 225 株価指数収益率の標本平均は -0.044

と負の値を示しているが、これは統計的に有意な値ではない。歪度 (skewness) については 0.336 と統計的に有意な正の値であり、これは日経 225

株価指数収益率の分布は右の裾が長いことを示している。尖度 (kurtosis) については 9.052 と統計的に有意な値であり 3 を超えていることから、日経 225 株価指数収益率の分布は正規分布よりも裾が厚いことがわかる。Ljung/Box 統計量¹⁸⁾ については、日経 225 株価指数収益率の 1 次から 12 次までの自己相関がすべて 0 であるという帰無仮説は棄却されることはなく、このことは、日経 225 株価指数収益率には統計的に有意な自己相関は無いことを示している。

図3. 日経225日次平方収益率

(1989年12月11日～1997年12月12日)

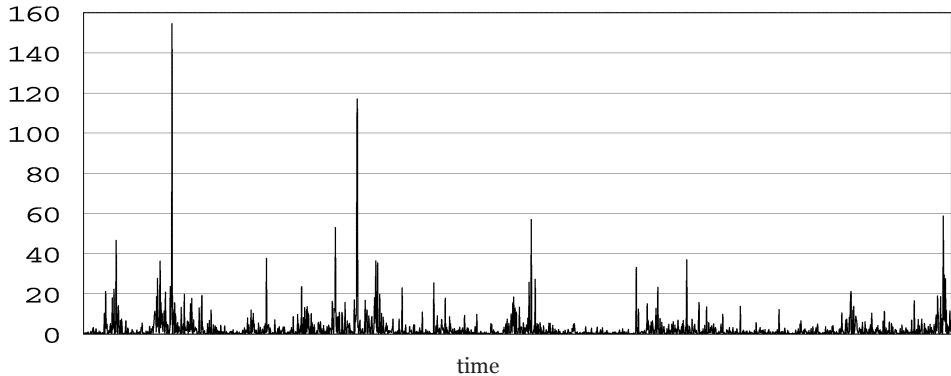


図4. 日経225日次平方収益率のヒストグラム

(1989年12月11日～1997年12月12日)

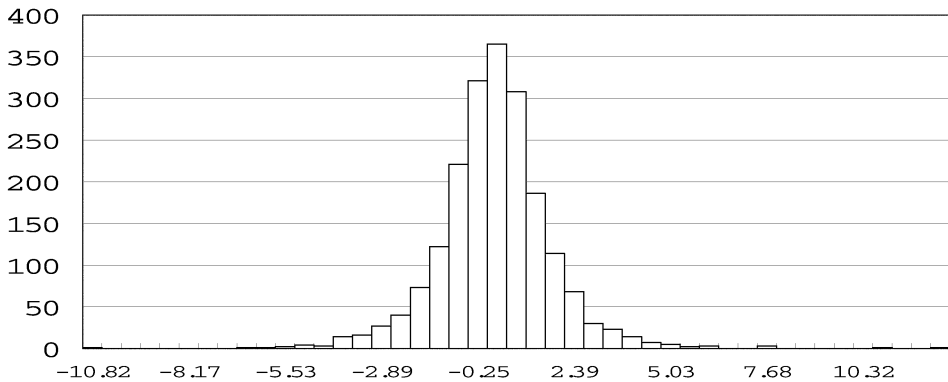


表1. 日経225株価指数終値の変化率(%) R_t の基本統計量

標本期間：1989年12月11日～1997年12月12日

標本数	平均	標準偏差	歪度	尖度	最大	最小	LB(12)
1976	-0.044	1.547	0.336*	9.052*	12.430	-10.816	18.258
	(0.035)		(0.055)	(0.110)			

注) 括弧内の数値は標準誤差を表す。標本数を T 、標準偏差を $\hat{\sigma}$ とすると、平均、歪度、尖度の標準誤差はそれぞれ、 $\hat{\sigma}/\sqrt{T}$ 、 $\sqrt{6/T}$ 、 $\sqrt{24/T}$ である。LB(12) は、Diebold/Lopez [1995] の方法によって分散不均一性を調整した Ljung = Box 統計量である。

*は有意水準5%で有意であることを示す。

オプション市場のデータは日経225オプション終値を用いた。標本期間は、1995年1月から1997年12月までである。標本数は、コール・オプションが343、プット・オプションが337である。日経225オプション終値と日経225株価指数終値とが異時点で値付けされている可能性が

あるが、本研究では考慮しなかった。基本的な仮定は次のとおりである。(i) 取引費用、税金、配当は存在しない、(ii) オプションの証拠金は不要、(iii) 安全資産利率 r は一定、かつ既知、(iv) 利率 r のもとで安全資産の借入、貸出は無制限、である。マネネス¹⁹⁾ は以下のように3

種類のカテゴリーに分類した。

1. $S/K \in (0.97, 1.03)$ ならば, オプションは at-the-money (ATM) のオプション。
2. $S/K \leq 0.97$ ならば, コール・オプションは out-of-the-money (OTM), プット・オプションは in-the-money (ITM) のオプション。
3. $S/K \geq 1.03$ ならば, コール・オプションは in-the-money, プット・オプションは out-of-the-money のオプション。

標本数は, コール・オプションにおいては, out-of-the-money で 122, at-the-money で 87, in-the-money で 134 あり, プット・オプションにおいては, それぞれ, 124, 94, 119 であった。

3.2 実証結果

QML の尤度関数の最大化には GAUSS (数学・統計分析ソフト)²⁰⁾ の OPTMUM を用いた。本研究で使用した GAUSS のプログラムは, 三井 (2004a, 付録), Mitsui (2004, Appendix) を参照して頂きたい²¹⁾。標準誤差の計算は漸近分散共分散行列 (asymptotic variance-covariance matrix) より計算を行った²²⁾。SV モデルと非対称 SV モデルの実証結果は, 表 2・表 3 に纏められている。SV モデルでは, $\hat{\alpha}$ は 0.0007 の値を示しているが, これは統計的に有意な値ではない。 $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_\eta$ は, 各々 0.975, 0.187 の値を示しており統計的に有意であった。 $\hat{\sigma}_\eta$ が統計的に有意であるということは, ボラティリティが確率的に変動していることを示している。また, $\hat{\beta}$ が 1 に近いということは, ボラティリティのショックが高い持続性 (persistence) を持つことを意味し (Volatility clustering), 過去の研究と整合的な結果となった²³⁾。非対称 SV モデルでは, $\hat{\alpha}$ は -0.0009 と負の値を示しているが, これは統計的に有意な値ではない。 $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_\eta$ は, 各々 0.979, 0.182 の値を示しており統計的に有意であっ

た。 $\hat{\rho}$ は -0.816 と負の値を示しているが, これは統計的に有意な値であった。 $\hat{\rho}$ が統計的に有意であるということは, 日経 225 株価指数が下落 (上昇) すると次期にはボラティリティは上昇 (下落) するという負の相関があることを示している。

表 2. SV モデルの推定
(1989 年 12 月 11 日 ~ 1997 年 12 月 12 日)

$$R_t = \sigma_t u_t$$

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha + \beta \ln \sigma_{t-1}^2 + \eta_t$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right), t = 1 \dots T$$

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}_\eta$
推定値	0.0007	0.975*	0.187*
t 値	0.14	97.51	4.79
ln L	- 4502.6		

注) * は有意水準 5% で有意であることを示す。

表 3. 非対称 SV モデルの推定
(1989 年 12 月 11 日 ~ 1997 年 12 月 12 日)

$$R_t = \sigma_t u_t$$

$$\ln \sigma_{t+1}^2 = \alpha + \beta \ln \sigma_t^2 + \eta_t$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right), t = 1 \dots T$$

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}_\eta$	$\hat{\rho}$
推定値	- 0.0009	0.979*	0.182*	- 0.816*
t 値	- 0.32	139.86	6.26	10.75
ln L	- 476.5			

注) * は有意水準 5% で有意であることを示す。

また, 3.3 節で SV モデルによるオプション価格と B-S モデルのオプション価格を比較するため, 上記と同様の方法を用い, 異なる期間で SV モデルのパラメータの推定を行った。推定期間はオプション価格を予測する時点の前日から営業日ベースで 1000 日前までである。データは同様に, 日経 225 株価指数終値を用い, 1994 年 1 月から 1997 年 12 月まで 1 ヶ月ごとの推定結果を得た。ここでは, 1994 年の各月のパラメータの推定値

表 4. SV モデルの推定

$$R_t = \sigma_t u_t$$

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha + \beta \ln \sigma_{t-1}^2 + \eta_t$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right)$$

	1994.1	2	3	4	5	6
$\hat{\alpha}$	0.03 (2.14)	0.03 (2.13)	0.02 (1.17)	0.03 (2.13)	0.02 (1.51)	0.02 (1.70)
$\hat{\beta}$	0.96 (68.1)	0.96 (56.4)	0.97 (44.8)	0.96 (56.4)	0.97 (61.5)	0.97 (70.6)
$\hat{\sigma}_\eta$	0.21 (4.33)	0.24 (4.23)	0.21 (2.94)	0.24 (4.23)	0.20 (3.86)	0.20 (4.18)
$\ln L$	-2231.9	-2249.1	-2236.2	-2249.1	-2226.26	-2231.7

	7	8	9	10	11	12
$\hat{\alpha}$	0.02 (2.25)	0.020 (1.67)	0.009 (0.94)	0.010 (2.58)	0.008 (1.06)	0.006 (0.14)
$\hat{\beta}$	0.97 (83.7)	0.96 (53.0)	0.98 (74.2)	0.97 (81.5)	0.98 (77.5)	0.98 (21.2)
$\hat{\sigma}_\eta$	0.21 (5.01)	0.24 (3.99)	0.16 (3.10)	0.22 (4.64)	0.17 (3.37)	0.17 (1.25)
$\ln L$	-2235.9	-2258.3	-2230.8	-2251.1	-22430	-2261.2

注) 括弧内の数値は t 値を表す。

を纏めた (表 4, 表 5 参照)。非対称性を仮定した場合の ρ については、すべての時点で統計的に有意な負の値が得られた。

上記の結果を用いてモンテカルロ・シミュレーション²⁴⁾を行う。安全利率 r はコール・レートを用いた (図 5 参照)。シミュレーション期間は、行使日まで営業日ベースで 20 日のものを用いて比較した。ボラティリティはヒストリカル・ボラティリティ (Historical Volatility; HV) とインプライド・ボラティリティ (Implied Volatility; IV) を用いた。過去の株価データから計算されるボラティリティをヒストリカル・ボラティリティという。本研究では、過去 D 日分の日経 225 株価指数のデータを使い、 t 期の HV を下記のように計算した²⁵⁾。

$$\sigma_{HV} = \sqrt{\frac{250}{D-1} \sum_{t=1}^D (R_t^* - \bar{R}^*)^2} \quad (3.1)$$

$$R_t^* = \ln S_t - \ln S_{t-1}$$

\bar{R}^* は R_t^* の平均を表す。本研究では、 $D = 20$ とした。

また、B-S モデルを利用してオプションの市場価格から逆算されるボラティリティをインプライド・ボラティリティと呼ぶ。本研究では、 t 期の IV を下記のようなニュートン・ラフソン (Newton-Raphson) 法を用いて計算を行った。 $f(\sigma)$ を以下のように定義する。

$$f(\sigma) = C_t^{\text{市場価格}} - C_t^{BS} \quad (3.2)$$

$$= C_t^{\text{市場価格}} - \left[S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \right] \quad (3.3)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

このとき、インプライド・ボラティリティ σ_{IV} は、

$$\sigma_{IV} = \sigma - \frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)}, \quad |\sigma_{IV} - \sigma| < \varepsilon \quad (3.4)$$

表 5. 非対称 SV モデルの推定

$$R_t = \sigma_t u_t$$

$$\ln \sigma_{t+1}^2 = \alpha + \beta \ln \sigma_t^2 + \eta_t$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right)$$

	1994.1	2	3	4	5	6
$\hat{\alpha}$	-0.002 (-0.33)	-0.002 (-0.35)	-0.002 (-0.43)	-0.003 (-0.47)	-0.002 (-0.48)	-0.003 (-0.79)
$\hat{\beta}$	0.97 (72.4)	0.96 (64.9)	0.97 (78.3)	0.97 (72.6)	0.98 (106.6)	0.98 (109.7)
$\hat{\sigma}_\eta$	0.22 (4.49)	0.24 (4.50)	0.21 (4.60)	0.22 (4.25)	0.17 (4.72)	0.18 (4.86)
$\hat{\rho}$	-0.76 (-6.60)	-0.69 (-6.25)	-0.71 (-6.17)	-0.71 (-5.98)	-0.73 (-5.85)	-0.80 (-7.07)
$\ln L$	-2214.9	-2232.1	-2220.5	-2248.4	-2213.6	-2217.6

	7	8	9	10	11	12
$\hat{\alpha}$	-0.002 (-0.52)	-0.003 (-0.61)	-0.003 (-0.79)	-0.002 (-0.49)	-0.003 (-0.79)	-0.002 (-0.40)
$\hat{\beta}$	0.97 (86.2)	0.98 (87.1)	0.99 (127.9)	0.98 (83.2)	0.99 (127.9)	0.98 (102.8)
$\hat{\sigma}_\eta$	0.18 (4.06)	0.18 (3.58)	0.16 (4.25)	0.18 (3.75)	0.16 (4.24)	0.15 (3.73)
$\hat{\rho}$	-0.76 (-6.09)	-0.75 (-5.63)	-0.67 (-4.33)	-0.57 (-3.80)	-0.67 (-4.35)	-0.51 (-2.90)
$\ln L$	-2223.5	-2244.1	-2229.1	-2244.8	-2229.1	-2260.1

注) 括弧内の数値は t 値を表す。

図 5. コール・レート

(1993年12月14日~1997年11月14日)

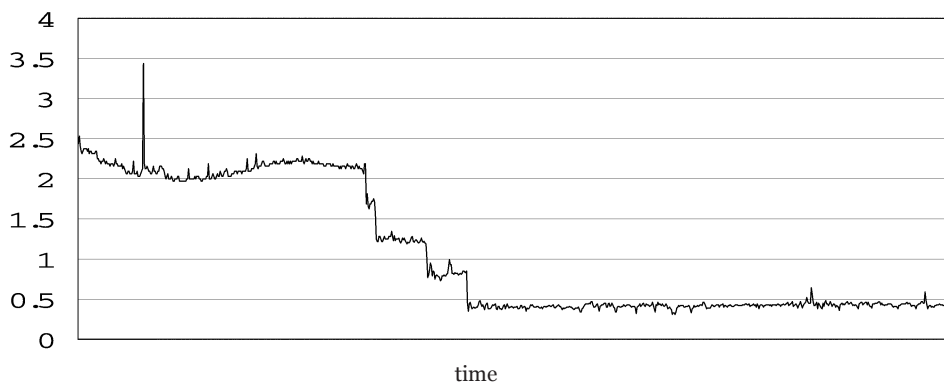


図6. ヒストリカル・ボラティリティ

(1993年12月14日～1997年11月14日)

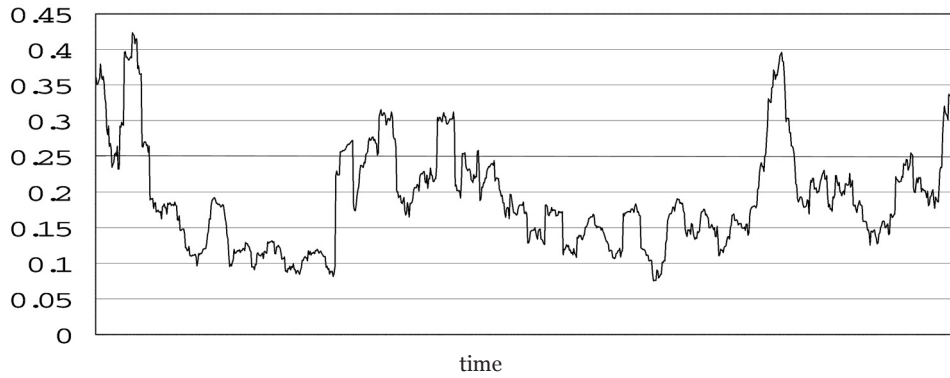


図7. インプラント・ボラティリティ (コール)

(1993年12月14日～1997年11月14日)

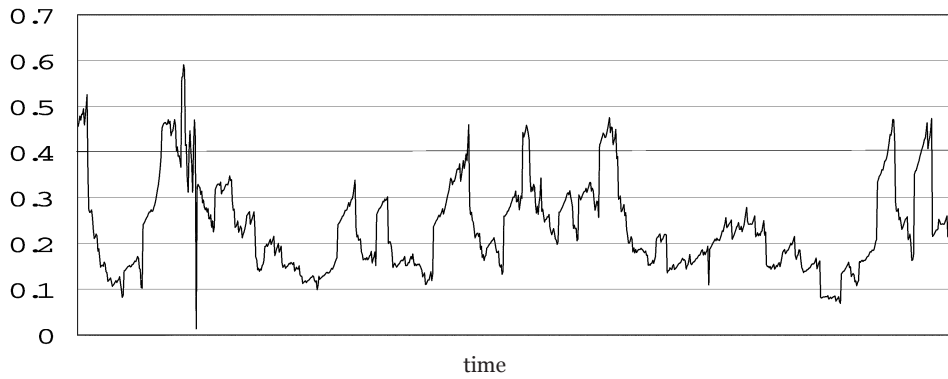
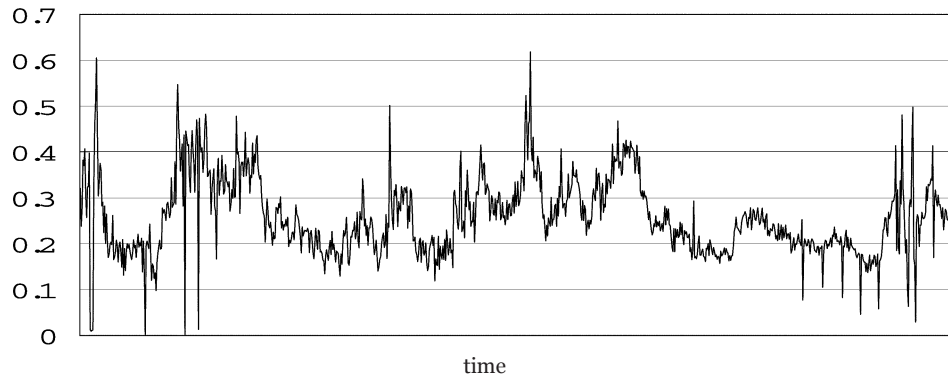


図8. インプラント・ボラティリティ (プット)

(1993年12月14日～1997年11月14日)



として得られる²⁶⁾。本研究では、 $\varepsilon = 10^{-6}$ とした。

プット・オプション価格については、コール・オプション価格を用いてプット・コール・パリティ (put-call parity) 式

$$\hat{P}_t^{CV*} = \hat{C}_t^{CV*} - S_t + e^{-(T-t)r}K \quad (3.5)$$

により導出した。

3.3 B-S モデルとの比較

SV モデル・非対称 SV モデル・B-S モデルによるオプション価格の推定値と市場価格との ME (Mean Error), RSME (Root Mean Squared Error), MER (Mean Error Rate), RMSER (Root Mean Squared Error Rate) を比較・検討した。それぞれのモデルから導出された価格と市場価格との差を、

$$ME = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{P}_i^{\text{推定値}} - P_i^{\text{市場価格}}) \quad (3.6)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{P}_i^{\text{推定値}} - P_i^{\text{市場価格}})^2} \quad (3.7)$$

として、また乖離率を

$$MER = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{P}_i^{\text{推定値}} - P_i^{\text{市場価格}}}{P_i^{\text{市場価格}}} \right) \quad (3.8)$$

$$RMSER = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{P}_i^{\text{推定値}} - P_i^{\text{市場価格}}}{P_i^{\text{市場価格}}} \right)^2} \quad (3.9)$$

として計算を行った。ここで、 $\hat{P}^{\text{推定値}}$ は、SV モデル・非対称 SV モデル・B-S モデルによるコール/プット・オプション価格の推定値を表し、 $P^{\text{市場価格}}$ は市場価格のコール/プット・オプションを表す。 n はオプション価格の標本数である。

ME, RMSE, MER, RMSER の計算結果は、各々、表 6・表 7 に纏められている。コール・オプションでは、(1) ME から IV・HV とともに非対称 SV モデルによるオプション価格は B-S モデル

の underpricing を若干修正できることがわかる。特に、ATM で顕著である。(2) RMSE から IV では、B-S モデルが推定値と市場価格の差が最も小さく、HV では、非対称 SV モデルによるオプション価格の推定値が最も小さい。(3) MER から IV では、SV モデルによるオプション価格が最も安定しており、HV では全てのモデルで underpricing していることがわかる。(4) RMSER から IV では、推定値と市場価格の乖離率はほとんどマネネスにおいて B-S モデルによるオプション価格が最も小さくなるという結果となった。これは、B-S モデルによるオプション価格は SV・非対称 SV モデルによるオプション価格よりも価格付けのパフォーマンスが優れていることを意味する。HV では、どのモデルでもそれほど優劣の差異はないという結果となった。プット・オプションでは、RMSER から、IV では B-S モデルによるオプション価格が最もパフォーマンスが優れ、HV では非対称 SV モデルによるオプション価格が最もパフォーマンスが優れているという結果となった。全体的にみると、非対称 SV モデルによるオプション価格は B-S モデルと比較して必ずしも優れているわけではないという結果となった。

4. 結論と今後の課題

本研究は、非対称確率的ボラティリティ・モデルを用いて日経 225 オプション価格付けの実証分析を行ったものである。ここで得られた主な結果を纏めると次のようになる。

1. 日経 225 株価指数収益率とボラティリティとの間には負の高い相関がある (Leverage effects)。
2. コール・オプションでは、インプライド・ボラティリティを用いた場合には、B-S モデルによるオプション価格は SV・非対称 SV モデルによるオプション価格よりも価格付けのパフォーマンスが優れている。ヒス

表 6. *ME, RMSE*

$$ME = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{P}_i^{\text{推定値}} - P_i^{\text{市場価格}})$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{P}_i^{\text{推定値}} - P_i^{\text{市場価格}})^2}$$

コール・オプション

インプライド・ボラティリティ

	マネネス	B-S	SV ($\rho = 0$)	非対称 SV	標本数
<i>ME</i>	OTM	- 1.283	- 0.495	- 3.265	122
	ATM	- 2.701	- 1.246	- 0.148	87
	ITM	16.639	17.586	22.414	134
	Total	5.359	6.378	7.558	343
<i>RMSE</i>	OTM	1.540	0.865	3.875	122
	ATM	2.788	1.558	2.263	87
	ITM	64.028	64.097	64.837	134
	Total	40.055	40.074	40.608	343

ヒストリカル・ボラティリティ

	マネネス	B-S	SV ($\rho = 0$)	非対称 SV	標本数
<i>ME</i>	OTM	12.237	13.127	10.067	122
	ATM	- 22.146	- 20.643	- 19.448	87
	ITM	- 49.138	- 48.588	- 45.905	134
	Total	- 20.462	- 19.549	- 19.286	343
<i>RMSE</i>	OTM	65.161	65.439	63.622	122
	ATM	89.778	89.417	88.829	87
	ITM	121.415	121.273	120.175	134
	Total	96.508	96.420	95.306	343

プット・オプション

インプライド・ボラティリティ

	マネネス	B-S	SV ($\rho = 0$)	非対称 SV	標本数
<i>ME</i>	OTM	- 1.655	0.751	3.758	124
	ATM	- 2.538	- 1.085	0.026	94
	ITM	- 1.749	- 0.775	- 5.067	119
	Total	- 1.934	- 0.852	- 0.399	337
<i>RMSE</i>	OTM	1.912	1.229	4.043	124
	ATM	2.712	1.577	2.413	94
	ITM	2.141	1.341	6.309	119
	Total	2.240	1.373	4.658	337

ヒストリカル・ボラティリティ

	マネネス	B-S	SV ($\rho = 0$)	非対称 SV	標本数
<i>ME</i>	OTM	- 40.009	- 39.310	- 36.218	124
	ATM	- 22.799	- 21.282	- 20.082	94
	ITM	- 32.871	- 32.085	- 34.880	119
	Total	- 32.688	- 31.730	- 31.245	337
<i>RMSE</i>	OTM	63.912	63.472	61.424	124
	ATM	91.897	91.536	90.996	94
	ITM	104.864	104.861	104.833	119
	Total	87.986	87.762	87.056	337

表 7. *ME Rate, RMSE Rate*

$$MER = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{P}_i^{\text{推定値}} - P_i^{\text{市場価格}}}{P_i^{\text{市場価格}}} \right)$$

$$RMSE R = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{P}_i^{\text{推定値}} - P_i^{\text{市場価格}}}{P_i^{\text{市場価格}}} \right)^2}$$

コール・オプション
インプライド・ボラティリティ

	マネネス	B-S	SV ($\rho = 0$)	非対称 SV	標本数
<i>MER</i>	OTM	-2.725	-0.203	-9.764	122
	ATM	-0.709	-0.273	-0.105	87
	ITM	0.728	0.798	1.106	134
	Total	-0.865	0.170	-3.068	343
<i>RMSE R</i>	OTM	2.947	4.867	13.139	122
	ATM	0.761	0.374	0.646	87
	ITM	3.066	3.071	3.124	134
	Total	2.628	3.485	8.082	343

ヒストリカル・ボラティリティ

	マネネス	B-S	SV ($\rho = 0$)	非対称 SV	標本数
<i>MER</i>	OTM	-1.959	-1.493	-2.660	122
	ATM	-0.751	-0.701	-0.681	87
	ITM	-0.362	-0.357	-0.335	134
	Total	-1.029	-0.848	-1.241	343
<i>RMSE R</i>	OTM	12.690	12.038	13.263	122
	ATM	2.548	2.516	2.505	87
	ITM	0.810	0.807	0.794	134
	Total	7.693	7.308	8.026	343

プット・オプション
インプライド・ボラティリティ

	マネネス	B-S	SV ($\rho = 0$)	非対称 SV	標本数
<i>MER</i>	OTM	-2.134	-0.944	6.652	124
	ATM	-0.666	-0.238	0.288	94
	ITM	-0.124	-0.046	-0.308	119
	Total	-1.014	-0.430	2.420	337
<i>RMSE R</i>	OTM	2.321	3.335	8.455	124
	ATM	0.739	0.386	0.868	94
	ITM	0.156	0.092	0.360	119
	Total	1.464	2.034	5.154	337

ヒストリカル・ボラティリティ

	マネネス	B-S	SV ($\rho = 0$)	非対称 SV	標本数
<i>MER</i>	OTM	-14.037	-12.704	-10.942	124
	ATM	-0.980	-0.928	-0.859	94
	ITM	-0.157	-0.15	-0.170	119
	Total	-5.494	-4.986	-4.326	337
<i>RMSE R</i>	OTM	20.790	17.557	15.029	124
	ATM	2.756	2.717	2.648	94
	ITM	0.752	0.752	0.751	119
	Total	12.030	10.755	9.234	337

トリカル・ボラティリティを用いた場合には、どのモデルでもそれほど優劣の差異はない。

3. プット・オプションでは、インプライド・ボラティリティを用いた場合には、B-S モデルによるオプション価格が最もパフォーマンスが優れ、ヒストリカル・ボラティリティを用いた場合には、非対称 SV モデルによるオプション価格が最もパフォーマンスが優れている
4. 実証的に、行使日までの期間（営業日ベースで 20 日）が短いオプションでは、非対称 SV モデルによるオプション価格は B-S モデルと比較して必ずしも優れているわけではない。

今後の課題を纏めると次のようになる。

1. QML 以外の推定法、特に GMM や Markov Chain Monte Carlo (MCMC) を用いて実証研究を行い、異なる推定法²⁷⁾との効率性の比較を行うこと。特に最近のファイナンス計量分析では、マルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC: Markov-chain Monte Carlo)²⁸⁾。
2. 非対称性 SV モデルにおいて攪乱項 u_t の非正規性の仮定、特に裾の厚い分布である t 分布²⁹⁾、GED (Generalized Error Distribution)³⁰⁾、一般化 t 分布 (Generalized t Distribution)³¹⁾、GEB (Generalized Exponential Beta distribution)³²⁾などを用いて分析を行うこと。
3. もう一つの代表的なボラティリティ変動モデルである ARCH 型モデルとのオプション価格付けのパフォーマンスの比較を行うこと³³⁾。
4. 株式市場のボラティリティ変動の性質を捉える他のモデルとして、マルコフ・スイッチング・モデル (Markov Switching Model; MS モデル)がある。So/Lam/Li(1998)は、マルコフ・スイッチングを導入した SV モデル (MS-SV Model) を提案している。そのため非対称 SV モデルにマルコフ・スイッ

チングを含めた定式化を行うこと³⁴⁾。

(日本大学経済学部専任講師)

注

1) SV モデルに関しては、Ghysels/Harvey/Renault (1996), Shephard (1996), 渡部 (2000), Hol (2003) 参照。

2) (2.1), (2.2) 式は、 $\phi^2 \exp(ht) \equiv \sigma_t^2$ とすると以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} R_t &= \exp\left(\frac{h_t}{2}\right) u_t \\ h_t &= \phi h_{t-1} + \eta_t \\ \begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} &\sim i.i.d.N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right), t=1, \dots, T \end{aligned}$$

ここで、 ϕ はスケール・パラメータ (scale parameter) を表す。多くの実証研究では、上記の表記が多い。本研究では、ボラティリティの過程が平均回帰性を持つモデルを扱うので (2.2) 式の表記を用いた。

3) 詳しくは、Ruiz (1994) 参照。

4) 代表的なボラティリティの拡散過程の例として、単純型 $d\sigma_t^2 = \phi\sigma_t^2 dt + \delta\sigma_t^2 dz_2$ (Hull/White (1987)), 平均回帰型 $d\sigma_t^2 = \kappa[\theta - \sigma_t^2] dt + \delta\sigma_t dz_2$ (Hull/White (1988), Heston (1993)) がある。本研究で用いたモデルは、後者を離散時間モデルに変換し、推定可能な形に直したものである。詳しくは、三井 (2004c) 参照。

5) 満期日 (権利消滅日) にのみ権利行使可能なオプションをヨーロッパ・オプション (European option) と呼び、満期日以前にいつでも権利行使可能なオプションをアメリカン・オプション (American option) と呼ぶ。

6) (2.5), (2.6) 式より

$$\begin{aligned} \Delta \ln S_t &= \phi\mu + \sigma_t u_t \\ \Delta \ln \sigma_t^2 &= \kappa[\theta - \ln(\sigma_t^2)] + \delta w_t \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \Delta \ln S_t &= R_t = \mu + \sigma_t u_t \\ \ln(\sigma_{t+1}^2) &= \kappa\theta + (1 - \kappa)\ln(\sigma_t^2) + \delta w_t \end{aligned}$$

と書き換える。 $R'_t = R_t - \mu = \sigma_t u_t$ とすると

$$R'_t = \sigma_t u_t$$

$$\ln(\sigma_{t+1}^2) = \kappa\theta + (1 - \kappa)\ln(\sigma_t^2) + \delta w_t$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ w_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right), t = 1, \dots, T$$

となる.

7) $C(Y, t)$ は結果的に偏微分方程式,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k C_{Y_i Y_j} (Cov Y_i, Y_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k C_{Y_i} (\mu_i - \lambda_i) + C_t - rC = 0,$$

$C_{Y_i Y_j} = \partial^2 C / \partial Y_i \partial Y_j$, $C_{Y_i} = \partial C / \partial Y_i$, $C_t = \partial C / \partial t$, Y は状態変数のベクトル, μ_i は Y_i の瞬時的な平均, λ_i は状態変数のリスク・プレミアム, と表現される. 詳しくは, Cox/Ingersoll/Ross (1985) 参照.

8) 危険資産の期待収益率と安全資産収益率との差をリスク・プレミアムと呼ぶ.

9) 詳しくは, Cox/Ingersoll/Ross (1985) 参照.

10) 解析解として SV モデルオプション価格を導出する研究として, Stein/Stein (1991) は原資産収益率とボラティリティとの相関は無しと仮定しフーリエ解析を利用し近似解として閉じた解を得ている. Heston (1993) は原資産収益率とボラティリティとの相関有りと仮定し, B-S モデルの公式の拡張として, フーリエ解析を利用して特性関数を用いることにより閉じた形の解を得ている. しかし, 両者ともモデルが連続時間型のためパラメータを現実のデータから推定することはできず, シミュレーションによる B-S モデルとの定性的な比較で終始している. 詳しくは, Jiang (2002), 三井 (2004c) 参照.

11) すべての投資家がリスクの大きさに対して無関心であり, 資産収益率の期待値のみによって危険資産の評価を行うこと. このとき, 危険資産の期待収益率は安全資産の期待収益率に等しくなる.

12) 詳しくは, Cox/Ross (1976) 参照.

13) 代表的なものとして, 対称変数法 (Antithetic Variable method), 層別サンプリング (Stratified Sampling), ラテン・ハイパーキューブ・サンプリング (Latin Hypercube Sampling), 加重サンプリング (Importance Sampling) などがある. 詳しくは, Boyle/Broadie/Glasserman (1997) 参照. またコンピュータにより数値計算を行う際には, Wilmott/Howison/Dewynne (1995, Part II), Clewlow/Strickland (1998), 木島・青沼 (2003, 第 7 章) などが参考になると思われる. これらの文献では, 種々のコンピュータ・プログラムが掲載されている. 特に, Wilmott/Howison/Dewynne (1995, Part II), Clewlow/Strickland (1998) では, アルゴリズムを提示するのみの擬似コンピュータ・プログラミング言語 (pseudo computer programming language, あるいは, pseudo code) を利用している. そのため, 各自で使用している言語を用いてプログラミングを行う際には, 大変参考になると思われる. また, モンテカルロ・シミュレーションよりも準モンテカルロ法 (pseudo Monte Carlo method) の方が効率的であるとする研究報告がある. 詳しくは, 今井 (2004) 参照.

ここでは, 求めようとしている $h(S_T)$ から, $h(S_T)$ に近い値 $f(S_T)$ を差し引いて, シミュレーションを行うことである. また, $f(S_T)$ を制御変数と呼ぶ.

15) ヨーロピアン・コール・オプション価格 C_t^{BS} と ヨーロピアン・プット・オプション価格 P_t^{BS} は, 以下の Black-Scholes モデルで与えられる.

14) $C_t^{BS} = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$,
 $P_t^{BS} = -S_t N(-d_1) + K e^{-r(T-t)} N(-d_2)$
 $d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$
 $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

ここで, $N(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数を表す.

16) 制御変数法は, $h(\cdot)$ を含む積分と $f(\cdot)$ を含む積分の相関が十分高いとき有効である. 事実, この方法を使うと, 推定値の分散を小さくすることができる.

17) $Var(\hat{C}_t^{CV})$ は,
 $Var(\hat{C}_t^{CV}) = Var(\hat{C}_t^{SV}) + \varphi^2 Var(\hat{C}_t^{BS}) - 2\varphi Cov(\hat{C}_t^{SV}, \hat{C}_t^{BS})$
 と計算され, この式を最小化すればよい. このとき最小化条件は,

$$\frac{d\text{Var}(\hat{C}_t^{CV})}{d\varphi} =$$

$$\varphi \text{Var}(\hat{C}_t^{BS}) - \text{Cov}(\hat{C}_t^{SV}, \hat{C}_t^{BS}) = 0$$

となり、これを解くと

$$\varphi = \frac{\text{Cov}(\hat{C}_t^{SV}, \hat{C}_t^{BS})}{\text{Var}(\hat{C}_t^{BS})}$$

を得る。

- 18) Diebold/Lopez (1995) の方法によって分散不均一性を調整した Ljung = Box 統計量を用いた。このとき、統計量は漸近的に自由度 12 の χ^2 分布に従う。
- 19) 原資産価格 S と権利行使価格 K とを比較して、コール・オプションでは、 $S/K = 1$ ならば at-the-money (ATM), $S/K > 1$ ならば in-the-money (ITM) $S/K < 1$ ならば out-of-the-money (OTM) と呼ぶ。実際には、厳密に ATM になる可能性はほとんどないため、ATM 付近のオプションを near-the-money (NTM) オプションと呼ぶこともある。また、原資産価格 S と権利行使価格 K との乖離が非常に大きいときには、ITM では deep-in-the-money (DITM), あるいは、far-in-the-money (FITM) と呼び、OTM では deep-out-of-the-money (DOTM), あるいは、far-out-of-the-money (FOTM) と呼ぶ。プット・オプションでは、各々 K/S となる。
- 20) Aptech Systems, Inc. - Mathematical and Statistical System, <http://www.aptech.com/>.
- 21) GAUSS の計量経済分析のプログラミングに関して詳しくは、Lin (2001) 参照。
- 22) 対数尤度を最大化することによって得られた推定値を $\hat{\theta}_T^{QML}$ とすると、 $\hat{\theta}_T^{QML}$ は漸近的に $\sqrt{T}(\hat{\theta}_T^{QML} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, D^{-1}SD^{-1})$ の分布に従うことが知られている。詳しくは、Hamilton (1994, Chapter 21), 渡部 (2000, pp. 33-34) 参照。
- 23) Black (1976), Nelson (1991) 参照。
- 24) 三井 (2004b) では、定性的な分析により B-S モデルと比較すると、
 1. 行使日までの期間が長いほどコール/プ

ット・オプション価格は相関の影響を大きく受ける。コール・オプション価格では、相関係数が負 (正) のとき ITM オプションの価格を上昇 (下落) させ、OTM オプションの価格を下落 (上昇) させる。プット・オプション価格では、反対に、相関係数負 (正) のとき ITM オプションの価格を下落 (上昇) させ、OTM オプションの価格を上昇 (下落) させる。

2. 行使日までの期間が長いほど無相関のときには、コール/プット・オプションともに ITM オプション、ATM オプション、OTM オプション、いずれの場合においても B-S モデルより高めの価格を与える。

したがって、行使日までの期間が長いほど、原資産収益率とボラティリティとの間の相関の値の選択は重要な問題となる。

- 25) この他に、 $\sigma_{HV} = (\sum R_t^2/D) \times$ (年間の取引日数) があるが、厳密に条件付き分散を示していないので本研究では用いなかった。
- 26) その他の IV を求める方法として、詳しくは Bates (1996) 参照。
- 27) その他の推定法に関して詳しくは、Campbell/Lo/Mackinlay (1997), Gouriou/Jasiak (2001) 参照。
- 28) MCMC に関して詳しくは、渡部 (2000), 大森 (2001), 中妻 (2003) 参照。また、Watanabe/Omori (2004) では非対称 SV モデルに対して MCMC を用いたベイズ推定法を利用することを提案している。
- 29) 詳しくは、Bollerslev (1987) 参照。
- 30) 詳しくは、Nelson (1991) 参照。
- 31) 詳しくは、Bollerslev/Engle/Nelson (1994) 参照。
- 32) 詳しくは、Wang et al. (2001) 参照。
- 33) 日本のオプション市場における ARCH 型モデルによるオプション価格付けの実証研究としては、三井 (2000), 渡部 (2003), 三井・渡部 (2003) 参照。
- 34) マルコフ・スイッチング・モデルに関して詳しく

は, Kim/Nelson (1999), Hamilton/Raj (eds.) (2002) 参照.

参考文献

- 今井潤一 (2004) 「ファイナンスにおける (準) モンテカルロ法の発展」日本ファイナンス学会第 9 回研究展望会報告論文.
- 大森裕浩 (2001) 「マルコフ連鎖モンテカルロ法の最近の展開」『日本統計学会誌』第 31 巻, 第 3 号, pp. 305-344.
- 木島正明・青沼君明 (2003) 『Excel & VBA で学ぶファイナンスの数理』金融財政事情研究会.
- 中妻照雄 (2003) 『ファイナンスのための MCMC 法によるベイズ分析』三菱経済研究所.
- 三井秀俊 (2000) 「日経 225 オプション価格の GARCH モデルによる分析」『現代ファイナンス』No. 7, pp. 57-73.
- (2004a) 「疑似最尤法による非対称確率的分散変動モデルの推定について」『経済集志』第 73 巻, 第 4 号, pp. 109-121.
- (2004b) 『オプション価格の計量分析』税務経理協会.
- (2004c) 「ボラティリティ変動モデルによるオプション評価法の展開」『経済集志』第 74 巻, 第 1 号, pp. 109-140.
- 三井秀俊・渡部敏明 (2003) 「ベイズ推定法による GARCH オプション価格付けモデルの分析」『日本統計学会誌』第 33 巻, 第 3 号, pp. 307-324.
- 渡部敏明 (2000) 『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.
- (2003) 「日経 225 オプションデータを使った GARCH オプション価格付けモデルの検証」『金融研究』第 22 巻, 別冊第 2 号, pp. 1-34.
- Bates, D. S. (1996) "Testing Option Pricing Models", in G. S. Maddala and C. R. Rao (eds.), *Handbook of Statistics*, Vol. 14, Statistical Methods in Finance, Amsterdam: North-Holland; pp. 567-611, 小暮厚之・森平爽一郎 (監訳) (2004) 『ファイナンス統計学ハンドブック』朝倉書店.
- Black, F. and M. Scholes (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637-654.
- Bollerslev, T. (1987) "A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 69, pp. 542-547.
- Bollerslev, T., R. F. Engle and D. B. Nelson (1994) "ARCH Models," in R. F. Engle and D. McFadden (eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, Amsterdam: North-Holland, pp. 2959-3038.
- Boyle, P., M. Broadie and P. Glasserman (1997) "Monte Carlo Methods for Security Pricing," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 21, pp. 1267-1321.
- Campbell, J. Y., A. W. Lo and A. C. Mackinlay (1997) *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton: Princeton University Press; 祝迫得夫・大橋和彦・中村信弘・本多俊毅・和田賢治 (訳) (2003) 『ファイナンスのための計量分析』共立出版.
- Chesney, M. and L. O. Scott (1989) "Pricing European Options: A Comparison of the Modified Black-Schole's Model and a Random Variance Models," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 24, pp. 267-284.
- Clewlow, L. and C. Strickland (1998) *Implementing Derivative Models*, Chichester: John Wiley & Sons; あさひ銀行金融基礎研究所 (訳) (2002) 『金融工学プログラミング』エコノミスト社.
- Cox, J. C. and S. A. Ross (1976) "The Valuations of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, pp. 145-166.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross (1985) "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices," *Econometrica*, Vol. 53, pp. 363-384.
- Diebold, F. X. and J. A. Lopez (1995) "Modeling Volatility Dynamic," in Hoover, K. D. (ed.), *Macroeconometrics: Developments, Tensions and Prospects*, Boston: Kluwer Academic Publishers, pp.

- 427-472.
- Ghysels, E., A. C. Harvey and E. Renault (1996) "Stochastic Volatility," in G. S. Maddala and C. R. Rao (eds.), *Handbook of Statistics*, Vol. 14, Statistical Methods in Finance, Amsterdam: North-Holland; pp.119-191; 小暮厚之・森平爽一郎 (監訳) (2004) 『ファイナンス統計学ハンドブック』朝倉書店.
- Gourieroux, C. and J. Jasiak (2001) *Financial Econometrics*, Princeton and Oxford: Princeton University Press.
- Hamilton, J. D. (1994) *Time Series Analysis*, Princeton: Princeton University Press.
- Hamilton, J. D. and B. Raj (eds.) (2002) *Advances in Markov-Switching Models: Applications in Business Cycle Research and Finance*, Heidelberg; New York: Physica-Verlag.
- Harvey, A. C. and N. G. Shephard (1996) "Estimation of an Asymmetric Stochastic Volatility Model for Asset Returns," *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 14, pp. 429-434.
- Heston, S. L. (1993) "A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options," *Review of Financial Studies*, Vol. 6, pp. 327-343.
- Hol, E. M. J. H. (2003) *Empirical Studies on Volatility in International Stock Markets*, Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Hull, J. and A. White (1987) "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, Vol. 42, pp. 281-300.
- (1988) "An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility," *Advances in Futures and Options Research*, Vol. 3, pp. 29-61.
- Jiang, G. J. (2002) "Stochastic Volatility and Option Pricing," in J. Knight and S. Stachell (eds.), *Forecasting Volatility in the Financial Markets*, 2nd ed., Oxford: Butterworth-Heinemann, pp. 47-96.
- Kim, C. J. and C. R. Nelson (1999) *State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*, Cambridge: MIT Press.
- Lin, K. P. (2001) *Computational Econometrics: GAUSS Programming for Econometricians and Financial Analysts*, Los Angeles: Etext.
- Melino, A. and S. M. Turnbull (1990) "The Pricing of Foreign Currency Options with Stochastic Volatility," *Journal of Econometrics*, Vol. 45, pp. 239-265.
- Mitsui, H (2004) "An Application of Stochastic Volatility Model to the Yen/US dollar Exchange Rate," *KEIZAI SHUSHI*, Vol. 74, No. 3, pp. 211-221.
- Nelson, D. B. (1991) "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, Vol. 59, pp. 347-370.
- Ruiz, E. (1994) "Quasi-Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Volatility Models," *Journal of Econometrics*, Vol. 63, pp. 289-306.
- Scott, L. O. (1987) "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an Application," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 22, pp. 419-438.
- Shephard, N. G. (1996) "Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility," in D. R. Cox, D. V. Hinkley and O. E. Barndorff-Nielsen (eds.), *Time Series Models in Econometrics, Finance and other Fields*, No. 65 in Monographs on Statistics and Applied Probability, London: Chapman & Hall, pp. 1-67.
- So, M. K. P., K. Lam and W. K. Li (1998) "A Stochastic Volatility Model with Markov Switching," *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 16, pp. 244-253.
- Stein, E. M. and C. J. Stein (1991) "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach," *Review of Financial Studies*, Vol. 4, pp. 727-752.
- Wang, K. L., C. Fawson, C. B. Barrett and J. B. McDonald (2001) "A Flexible Parametric GARCH Model with an Application to Exchange Rates," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 16, pp. 521-536.

- Watanabe, T. and Y. Omori (2004) "Bayesian Analysis of an Asymmetric Stochastic Volatility Model," Tokyo Metropolitan University, 21st Century COE Conference, International Symposium on Financial Time Series.
- Wiggins, J. B. (1987) "Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates," *Journal of Financial Economics*, Vol. 19, pp. 351-372.
- Wilmott, P., S. Howison and J. Dewynne (1995) *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press; 伊藤幹夫・戸瀬信之訳 (2002) 『デリバティブの数学入門』共立出版.