

# ボラティリティ変動モデルによるオプション評価の実証研究\*

三井秀俊

## 1. はじめに

ボラティリティ (Volatility) は資産収益率の分散あるいは標準偏差により定義され、ファイナンス理論ではリスク資産 (株式など将来の収益が不確定な資産) のリスクの指標として用いられる。ボラティリティはオプション価格付け理論において重要な役割を果たしており、オプション市場はボラティリティが取り引きされる市場であると特徴付けられる。ヨーロッパ・オプション<sup>1)</sup> の評価において頻繁に用いられている Black and Scholes (1973) モデル (以下、B-S モデル) のオプション価格付けの導出の際の主要な仮定は、行使日までボラティリティが時間を通じて一定であることである。しかし、過去の多くの実証研究によりボラティリティは経験的な事実として時間を通じて確率的に変動していることが知られている。したがって、ボラティリティが変動するモデルを定式化してオプション価格付けの分析を行なう必要がある。

ボラティリティ変動モデルを用いてオプション価格付けを分析する場合には大きく2つに分けて研究が行なわれている。1つは、SV (Stochastic Volatility) モデルを用いる方法である。連続時間のSVモデルは、オプション価格付けに有効な方法である。オプション理論で用いている Ornstein-

Uhlenbeck 過程のような連続時間確率過程に従うボラティリティ変動モデルに対して、離散近似が可能なことからSVモデルが利用される。しかし、SVモデルはボラティリティを観測されない変数として扱っているため、尤度を求めることが難しいなどの難点がある。したがって、オプション価格の評価に関する実証研究は非常に少なく、日経225オプションの実証研究としては、三井 (1998)、三井 (2005) など僅かしかない。

もう1つの方法は、Engle (1982) のARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) モデルとそれを一般化したBollerslev (1986) のGARCH (Generalized-ARCH) モデルを用いることである。これらARCH型モデルはファイナンス時系列の非線形性をうまく捉え、オプションの実証研究に対しても有用である。これは、ARCH型モデルが $t$ 期のボラティリティを $t-1$ 期に既知の変数のみの確定的な関数として定式化し、モデルを拡張しても容易に推定することができるためである。ARCHモデルを始めとしたボラティリティ変動モデルの研究では、一般に、ボラティリティに対するショックの持続性が非常に高いことが知られている。しかし、Diebold (1986) と Lamoureux and Lastrapes (1990) が指摘しているように、このような持続性はボラティリティの構造変化によって引き起こされた可能性が考えられ

\* 本研究で使用した日経225オプションのデータは、大阪証券取引所から提供して頂いた。また、本論文を作成するにあたり、竹内明香助教 (早稲田大学) から多くの貴重なコメントを頂いた。ここに記して感謝の意を表したい。本研究は、第70回証券経済学会 (2008年10月5日滋賀大学) で報告したものである。

る。このことから、Hamilton and Susmel (1994) と Cai (1994) は、構造変化を捉えるために ARCH モデルの定式化にマルコフ過程に従う状態変数を含めたマルコフ・スイッチング ARCH (markov-switching ARCH; MSARCH) モデルを提案している。さらに、Gray (1996) は ARCH モデルではなく GARCH モデルにおいて構造変化を含めたマルコフ・スイッチング GARCH (markov-switching GARCH; MSGARCH) モデルを提案した<sup>2) 3)</sup>。このような ARCH 型モデルを利用した日経 225 オプションの実証研究としては、森保 (1999)、三井 (2000)、三井・渡部 (2003)、渡部 (2003)、里吉・三井 (2006)、里吉・三井 (2007) などがある。

本研究では、リスク中立性を仮定した場合、SV モデル、GARCH モデル、マルコフ・スイッチング GARCH モデル、期待収益率スイッチング GARCH モデルをオプション評価に関して検証を行なうことを目的とした。実証結果として、コール・オプションでは、SV モデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れており、プット・オプションでも、SV モデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れているという結果となった。

本論文の以下の構成は次の通りである。第2節では、本研究で用いられる SV モデル、GARCH モデル、マルコフ・スイッチング GARCH モデル、期待収益率スイッチング GARCH モデルについて解説を行なう。第3節では、モンテカルロ・シミュレーションを用いたオプション評価について説明を行なう。第4節では、データと実証結果について纏める。最後の第5節では、まとめと今後の課題について述べる。

## 2. ボラティリティ変動モデル

### 2.1 SV モデル

本研究では、パラメータの推定には離散時間データの集合が使われるため、離散時間 SV モデル<sup>4)</sup>を利用する。離散時間 SV モデルは、

$$R_t = \sigma_t u_t \quad (1)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \eta_t \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}\right), t = 1, \dots, T$$

となる。ここで、 $R_t$ は収益率を表す<sup>5)</sup>。 $u_t$ は平均0、分散1、 $\eta_t$ は平均0、分散 $\sigma_\eta^2$ の正規分布に従う攪乱項である。(2)式は、ボラティリティの対数値がAR(1)プロセス (first-order autoregressive process; 1次の自己回帰過程) に従うことを示している。*i.i.d.*は、過去と独立で同一な分布 (independent and identically distributed) を表す。(1)、(2)式は、 $\psi^2 \exp(h_t) \equiv \sigma_t^2$ とすると以下のように書き換えられる。

$$R_t = \psi \exp\left(\frac{h_t}{2}\right) u_t \quad (3)$$

$$h_t = \phi h_{t-1} + \eta_t \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d.N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}\right), t = 1, \dots, T$$

ここで、 $\psi$ はスケール・パラメータ (scale parameter) を表す。多くの実証研究では、(3)、(4)式の表記が多い。

### 2.2 GARCH モデル

Bollerslev (1986) は、ARCH モデルの一般形として GARCH モデルを提案した。

$$R_t = \mu + \epsilon_t \quad (5)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \sigma_t > 0, \quad (6)$$

$$z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, Var[z_t] = 1. \quad (7)$$

ここで、(5)式の定数項 $\mu$ は期待収益率、 $\epsilon_t$ は誤差項であり、収益率に自己相関はないと仮定する。 $E[\cdot]$ は期待値、 $Var[\cdot]$ は分散を各々表す。

GARCH (p,q) は、ボラティリティ $\sigma_t^2$ が、過去の子測誤差の2乗と過去のボラティリティの線形関数として定式化されている。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (8)$$

ここで、ボラティリティの非負性を保証するため $\omega, \alpha, \beta > 0$ であると仮定する<sup>6)</sup>。また、ボラティリティの過程は定常性を保証するため $\alpha + \beta$

< 1 であると仮定する。また、多くの実証研究において、ボラティリティ変動過程の次数を多くしてもあまりパフォーマンスは改善されないことが示されているので、本論文でも GARCH (1,1) モデルを用いて分析を行なった。

### 2.3 マルコフ・スイッチング GARCH モデル

Gray (1996) は、GARCH モデルのパラメータがマルコフ過程に従う状態変数 (state variable) に依存してスイッチングを引き起こすモデルを提案した。\$t\$ 時点の収益率を \$R\_t\$ とする。ボラティリティを \$\sigma\_t^2\$ とするとき、MS-GARCH モデルは以下のように表される。

$$R_t = \mu + \epsilon_t, \quad (9)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0,$$

$$Var[z_t] = 1, \quad (10)$$

$$\sigma_t^2 = \omega_{s_t} + \alpha_{s_t} \epsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t} E[\sigma_{t-1}^2 | I_{t-2}], \quad (11)$$

$$\omega_{s_t} = \omega_0(1-s_t) + \omega_1 s_t, \quad (12)$$

$$\alpha_{s_t} = \alpha_0(1-s_t) + \alpha_1 s_t, \quad (13)$$

$$\beta_{s_t} = \beta_0(1-s_t) + \beta_1 s_t. \quad (14)$$

(9) 式の定数項 \$\mu\$ は期待収益率、\$\epsilon\_t\$ は誤差項であり、収益率に自己相関はないと仮定する。\$E[\cdot]\$ は期待値、\$Var[\cdot]\$ は分散、\$E[\cdot|\cdot]\$ は条件付期待値を各々表す。ボラティリティ \$\sigma\_t^2\$ は、\$t-1\$ 時点までの情報集合 \$I\_{t-1} = \{R\_{t-1}, R\_{t-2}, \dots\}\$ と \$t\$ 時点の状態変数 \$s\_t\$ を条件とした \$\epsilon\_t\$ の条件付分散、つまり、\$\sigma\_t^2 = Var[\epsilon\_t | I\_{t-1}, s\_t]\$ である。(11) 式の \$I\_{t-2}\$ は \$t-2\$ 時点までの情報集合 \$I\_{t-2} = \{R\_{t-2}, R\_{t-3}, \dots\}\$ である。(12), (13), (14) 式の \$s\_t\$ はマルコフ過程に従う状態変数であり、その推移確率 (transition probability) は、

$$Pr[s_t = 1 | s_{t-1} = 1] = p,$$

$$Pr[s_t = 0 | s_{t-1} = 0] = q \quad (15)$$

であるとする。ただし、\$Pr[s\_t = j | s\_{t-1} = i]\$ は、状態 \$i\$ から状態 \$j\$ に推移する確率である。

\$s\_t = 0\$ のときのボラティリティを \$\sigma\_{0t}^2\$、\$s\_t = 1\$ のときのボラティリティを \$\sigma\_{1t}^2\$ とすると、ボラティリティ \$\sigma\_t^2\$ は各々、

$$\begin{cases} s_t = 0 \text{ のとき, } \sigma_{0t}^2 = \omega_0 + \alpha_0 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_0 E[\sigma_{t-1}^2 | I_{t-2}], \\ s_t = 1 \text{ のとき, } \sigma_{1t}^2 = \omega_1 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 E[\sigma_{t-1}^2 | I_{t-2}] \end{cases}$$

となる。

### 2.4 期待収益率スイッチング GARCH モデル

期待収益率スイッチング GARCH モデルは以下のように表される。

$$R_t = \mu_0(1-s_t) + \mu_1 s_t + \sqrt{V[R_t | s_t, I_{t-1}]} z_t, \quad (16)$$

$$z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, V[z_t] = 1, \quad (17)$$

$$V[R_t | s_t, I_{t-1}] = \omega_{s_t} + \alpha_{s_t} \epsilon_{t-1}^2 + \beta_{s_t} V[R_{t-1} | I_{t-2}], \quad (18)$$

$$\epsilon_{t-1} = R_{t-1} - E[R_{t-1} | I_{t-2}], \quad (19)$$

$$\omega_{s_t} = \omega_0(1-s_t) + \omega_1 s_t, \quad (20)$$

$$\alpha_{s_t} = \alpha_0(1-s_t) + \alpha_1 s_t, \quad (21)$$

$$\beta_{s_t} = \beta_0(1-s_t) + \beta_1 s_t. \quad (22)$$

\$V[R\_t | s\_t, I\_{t-1}]\$ はボラティリティであり、\$t-1\$ 時点までの情報集合 \$I\_{t-1} = \{R\_{t-1}, R\_{t-2}, \dots\}\$ と、\$t\$ 時点の状態変数 \$s\_t\$ を条件とした \$R\_t\$ の条件付き分散となっている。(19) 式の条件付き期待値 \$E[R\_{t-1} | I\_{t-2}]\$ は、

$$\begin{aligned} E[R_{t-1} | I_{t-2}] &= \mu_0 Pr[s_{t-1} = 0 | I_{t-2}] \\ &+ \mu_1 Pr[s_{t-1} = 1 | I_{t-2}] \end{aligned} \quad (23)$$

となる。(16), (20), (21), (22) 式の \$s\_t\$ はマルコフ過程に従う状態変数であり、その推移確率は、

$$\begin{aligned} Pr[s_t = 1 | s_{t-1} = 1] &= p, \\ Pr[s_t = 0 | s_{t-1} = 0] &= q \end{aligned} \quad (24)$$

であるとする。

この期待収益率スイッチング GARCH における \$R\_t\$ の分布は、\$I\_{t-1}\$ を条件としたとき、期待収益率とボラティリティが異なる 2 つの分布からなる混合分布となっている。つまり、\$s\_t = 0\$ のとき、期待収益率とボラティリティはそれぞれ

$$\begin{aligned} E[R_t | s_t = 0, I_{t-1}] &= \mu_0, \quad V[R_t | s_t = 0, I_{t-1}] \\ &= \omega_0 + \alpha_0 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_0 V[R_{t-1} | I_{t-2}] \end{aligned}$$

であり、\$s\_t = 1\$ のときは

$$\begin{aligned} E[R_t | s_t = 1, I_{t-1}] &= \mu_1, \quad V[R_t | s_t = 1, I_{t-1}] \\ &= \omega_1 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 V[R_{t-1} | I_{t-2}] \end{aligned}$$

となる。

## 2.5 誤差項の仮定

ボラティリティ変動モデルを推定する場合、誤差項の分布には標準正規分布を仮定することが多い。資産価格の収益率の分布は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることが古くから知られているが、誤差項が正規分布に従っていても、ボラティリティが変動するなら収益率の尖度は3を上回る<sup>7)</sup>。しかし、収益率の尖度の高さがボラティリティの変動だけで説明できるとは限らず、実際、多くの先行研究では、誤差項の分布に正規分布よりも尖度の高い分布を用いたほうが当てはまりが良いとの結果が得られている。したがって、本研究では、誤差項の分布に正規分布と  $t$  分布の両方を適用することにする。誤差項が標準正規分布に従う場合、 $z_t$  は、

$$z_t \sim i.i.d.N(0, 1) \quad (25)$$

となる。 $t$  分布 ( $t$ -distribution) に従う場合には、

$$z_t \sim i.i.d.t(0, 1, \nu) \quad (26)$$

とする。ここでは  $z_t$  の分散は1に標準化されている。 $\nu$  は自由度 (degree of freedom) である。誤差項が標準正規分布に従うときは“-n”， $t$  分布のときは“-t”と表記する。

## 2.6 比較モデル

本研究で比較するボラティリティ変動モデルをまとめると以下ようになる。

- SV-n, SV-t
- GARCH-n, GARCH-t
- MS-GARCH-n, MS-GARCH-t [マルコフ・スイッチング GARCH モデル]
- MS-GARCH-r-n, MS-GARCH-r-t [期待収益率スイッチング GARCH モデル]
- Black-Scholes モデル

ここで、ヨーロッパ・コール・オプション価格  $C_t^{BS}$  とヨーロッパ・プット・オプション価格  $P_t^{BS}$  は、以下の Black-Scholes モデルで与えられる。

$$C_t^{BS} = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2), \quad (27)$$

$$P_t^{BS} = -S_t N(-d_1) + Ke^{-r\tau} N(-d_2), \quad (28)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad (29)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}. \quad (30)$$

ここで、 $N(\cdot)$  は標準正規分布の分布関数を表す。

## 3. オプション価格の導出方法

### 3.1 リスク中立性の下でのオプション価格

投資家がリスク中立的 (risk neutral) な場合、ヨーロッパ・オプション価格は、満期におけるオプション価格の期待値を無リスク資産の利率  $r$  で割り引いた割引現在価値となる。すなわち、 $T + \tau$  時点が満期で権利行使価格  $K$  のコール・オプションの  $T$  時点の価格を  $C_T$ 、プット・オプションの価格を  $P_T$  とすると、

$$C_T = (1+r)^{-\tau} E[\text{Max}(S_{T+\tau} - K, 0)], \quad (31)$$

$$P_T = (1+r)^{-\tau} E[\text{Max}(K - S_{T+\tau}, 0)] \quad (32)$$

と表される<sup>8)</sup>。ここで、 $S_{T+\tau}$  はオプションの満期の原資産価格である。ここでは右辺の期待値を解析的に求めることができないので、モンテカルロ・シミュレーションによって評価する<sup>9)</sup>。シミュレーションを  $n$  回行ない、 $n$  個の満期の原資産価格  $S_{T+\tau}$  が得られたとして、これらを  $(S_{T+\tau}^{(1)}, S_{T+\tau}^{(2)}, \dots, S_{T+\tau}^{(n)})$  とする。ただし、 $S_{T+\tau}^{(i)}$  は  $i$  回目のパスの発生によって得られた満期の原資産価格である。 $n$  が十分に大きいとき、大数の法則 (law of large numbers) より (31), (32) 式の期待値はそれぞれ以下の式によって評価することができる。

$$\begin{aligned} E[\text{Max}(S_{T+\tau} - K, 0)] \\ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Max}(S_{T+\tau}^{(i)} - K, 0), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} E[\text{Max}(K - S_{T+\tau}, 0)] \\ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Max}(K - S_{T+\tau}^{(i)}, 0). \end{aligned} \quad (34)$$

### 3.2 モンテカルロ・シミュレーションの手順

本研究のモデルにおけるオプション価格のモンテカルロ・シミュレーションによる計算手順は以下のとおりである。

- [1] 標本 $\{R_1, R_2, \dots, R_T\}$ を使って、各モデルの未知パラメータを最尤推定する。
- [2] 互いに独立な標準正規分布から $\{z_{T+1}^{(i)}, z_{T+2}^{(i)}, \dots, z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ をサンプリングする。
- [3] 互いに独立な標準一様分布から $\{u_{T+1}^{(i)}, u_{T+2}^{(i)}, \dots, u_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$ をサンプリングする。
- [4] 手順 [3] の一様乱数と最尤法で推定された推移確率  $p, q$  を使って、マルコフ過程に従う状態変数  $\{s_{T+1}^{(i)}, s_{T+2}^{(i)}, \dots, s_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$  を求める<sup>10)</sup> (SV, GARCH の場合は不要)。
- [5] 手順 [2], [4] の値を各モデルに代入して、 $\{R_{T+1}^{(i)}, R_{T+2}^{(i)}, \dots, R_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^n$  を計算する。
- [6] 次の式を使ってオプションの満期  $T + \tau$  時点における原資産価格 $(S_{T+\tau}^{(1)}, S_{T+\tau}^{(2)}, \dots, R_{T+\tau}^{(n)})$ を求める。

$$S_{T+\tau}^{(i)} = S_T \prod_{s=1}^{\tau} (1 + R_{T+s}^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (35)$$

- [7] 次の式からコール・オプションの価格  $C_T$ 、プット・オプションの価格  $P_T$  をそれぞれ計算する。

$$C_T = (1+r)^{-\tau} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Max}(S_{T+\tau}^{(i)} - K, 0), \quad (36)$$

$$P_T = (1+r)^{-\tau} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Max}(K - S_{T+\tau}^{(i)}, 0). \quad (37)$$

本研究ではモンテカルロ・シミュレーションの回数を  $n = 100,000$  としたが、1 万回程度で十分であると考えられる。また、計算される  $C_T, P_T$  の推定値の分散を小さくするために、代表的な分散減少法 (variance reduction technique) である制御変量法 (control variates) と負相関法 (antithetic variates) を併せて用いている。

## 4. 日経 225 オプションの実証結果

### 4.1 データ

表 1 には、日経 225 オプションの原資産となる日経 225 株価指数の日次収益率の基本統計量を示した。歪度の値は 0.2898 と統計的に有意な正の値を示しており、日次収益率は右に歪んだ分布に従っていることが分かる。また、尖度の値は 6.4801 であり、正規分布の 3 を大幅に上回っている。このことは、日次収益率は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることを示している。表の最後の列の  $LB^2(12)$  は、日次収益率を 2 乗したときの自己相関が 1 次から 12 次まで全てゼロであるという帰無仮説を検定するための Ljung = Box 統計量である<sup>11)</sup>。この統計量は、帰無仮説が正しければ漸近的に自由度 12 のカイ 2 乗分布に従う。ここでの  $LB^2(12)$  の値は 231.0423 であり、有意水準 1% でも帰無仮説は棄却される。収益率の 2 乗はボラティリティの代理変数であると考えられるので、このことはボラティリティに有意な自己相関があることを示している。以上の結果から、日経 225 株価指数の時系列的変動を捉えるためには、本研究のように分布の歪みを表現できるボラティリティ変動モデルを用いる必要があることが分かる。

本研究の実証分析に用いたオプションは、2000 年 5 月限月から 2006 年 3 月限月までの日経 225 コール・オプション (標本数 707)、ならびにプット・オプション (標本数 782) である。これらのオプションの満期から営業日ベースで 20 日前 ( $\tau = 20$ ) の終値を分析対象とした<sup>12)</sup>。無リスク資産の利子率のデータには、無担保コール翌日物

表 1. 日経 225 株価指数終値収益率  $R_t$  の基本統計量

標本期間：1990 年 2 月 22 日 - 2005 年 3 月 10 日

標本数	平均	標準偏差	歪度	尖度	最大値	最小値	$LB^2(12)$
3709	- 0.0002	0.0152	0.3086	6.4065	0.1324	- 0.0698	212.9053
	(0.0002)		(0.0402)	(0.0804)			

を用いた<sup>13)</sup>。日率 (%) の平均値 0.00011, 最小値 0.000004, 最大値 0.001 であった。また, 基本的な仮定として, 取引費用, 税金, 配当は存在せず, オプションの証拠金は不要とした。

#### 4.2 モデルの推定結果

各モデルのボラティリティ変動モデルのパラメータの推定には, 満期の 20 日前からさらに 2,500 日前までの日経 225 株価指数の終値を使用した<sup>14)</sup>。例えば, 最初の限月である 2000 年 5 月限月の場合, オプションの評価日は満期から 20 日前の 2000 年 4 月 11 日, その 2,500 日前は 1990 年 2 月 21 日となるので, 日次収益率を計算することにより, 標本期間は 1990 年 2 月 22 日から 2000 年 4 月 11 日までとなる (標本の大きさは  $T = 2,500$ )。この期間の日次収益率を用いてモデル

のパラメータの推定を行ない, その推定されたパラメータを所与として, モンテカルロ・シミュレーションによってオプション価格を求める。次の限月以降も同様にして計算を行なうので, 各限月に対応して 71 の異なる標本期間ができる。最後の限月である 2006 年 3 月限月の場合, 満期から 20 日前は 2006 年 2 月 10 日となる。したがって, 本研究で用いた日経 225 株価指数の日次収益率の全標本期間は, 1990 年 2 月 22 日から 2006 年 2 月 10 日までとなる。各々のモデルのパラメータの平均値・最小値・最大値は, 表 2 - 表 9 にまとめられている。また, GARCH, マルコフ・スイッチング GARCH モデル, 期待収益率スイッチング GARCH モデルのパラメータの推定結果は里吉・三井 (2007) の結果を用いた。

表 2. SV-n モデルの推定結果

	$\alpha$	$\beta$	$\sigma_{\eta}$	対数尤度
平均値	0.001	0.973	0.191	- 3366.123
最小値	0.000	0.960	0.110	- 3421.448
最大値	0.003	0.987	0.291	- 3294.827

表 3. SV-t モデルの推定結果

	$\alpha$	$\beta$	$\sigma_{\eta}$	$\nu$	対数尤度
平均値	0.001	0.982	0.226	10.322	- 3352.254
最小値	0.000	0.965	0.080	7.802	- 3410.443
最大値	0.002	0.990	0.340	14.889	- 3279.640

表 4. GARCH-n モデルの推定結果 [里吉・三井 (2007)]

	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$	対数尤度
平均値	0.059	0.083	0.892	0.975	- 4375.967
最小値	0.032	0.072	0.869	0.966	- 4425.958
最大値	0.077	0.103	0.909	0.987	- 4294.630

表 5. GARCH-t モデルの推定結果 [里吉・三井 (2007)]

	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\nu$	$\alpha + \beta$	対数尤度
平均値	0.033	0.071	0.916	7.722	0.987	- 4328.645
最小値	0.021	0.062	0.892	6.483	0.978	- 4387.870
最大値	0.049	0.092	0.927	9.809	0.991	- 4255.932

表 6. MS-GARCH-n モデルの推定結果 [里吉・三井 (2007)]

	$p$	$q$	$\omega_0$	$\omega_1$	$a_0$	$a_1$
平均値	0.925	0.963	0.439	1.464	0.001	0.019
最小値	0.514	0.822	0.000	0.000	0.000	0.000
最大値	0.979	0.984	0.634	2.526	0.014	0.078

	$\beta_0$	$\beta_1$	$a_0 + \beta_0$	$a_1 + \beta_1$	対数尤度
平均値	0.452	0.811	0.453	0.831	- 4352.381
最小値	0.321	0.527	0.321	0.579	- 4407.960
最大値	0.674	2.048	0.674	2.048	- 4264.429

表 7. MS-GARCH-t モデルの推定結果 [里吉・三井 (2007)]

	$p$	$q$	$\omega_0$	$\omega_1$	$a_0$	$a_1$
平均値	0.994	0.991	0.206	0.333	0.013	0.065
最小値	0.986	0.985	0.012	0.089	0.000	0.046
最大値	1.000	1.000	0.696	0.735	0.066	0.097

	$\beta_0$	$\beta_1$	$\nu$	$a_0 + \beta$	$a_1 + \beta_1$	対数尤度
平均値	0.605	0.872	8.145	0.618	0.937	- 4321.839
最小値	0.103	0.790	6.930	0.103	0.875	- 4382.226
最大値	0.904	0.902	9.929	0.970	0.965	- 4249.719

表 8. MS-GARCH-r-n モデルの推定結果 [里吉・三井 (2007)]

	$p$	$q$	$\mu_0$	$\omega_0$	$\omega_1$	$a_0$	$a_1$
平均値	0.891	0.956	0.060	0.212	1.396	0.002	0.025
最小値	0.546	0.839	0.036	0.000	0.046	0.000	0.000
最大値	0.972	0.989	0.098	0.465	2.932	0.026	0.083

	$\beta_0$	$\beta_1$	$\nu$	$a_1 + \beta_1$	対数尤度
平均値	0.623	0.868	0.625	0.893	- 4341.449
最小値	0.398	0.444	0.398	0.478	- 4393.688
最大値	0.893	1.891	0.900	1.891	- 4256.298

表 9. MS-GARCH-r-t モデルの推定結果 [里吉・三井 (2007)]

	$p$	$q$	$\mu_0$	$\omega_0$	$\omega_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$
平均値	0.957	0.963	0.092	0.000	0.223	0.006	0.046
最小値	0.831	0.892	0.075	0.000	0.111	0.000	0.000
最大値	0.980	0.978	0.118	0.000	0.283	0.027	0.084

  

	$\beta_0$	$\beta_1$	$\nu$	$\alpha_0 + \beta_0$	$\alpha_1 + \beta_1$	対数尤度
平均値	0.819	0.991	9.061	0.826	1.037	- 4312.734
最小値	0.752	0.909	7.111	0.752	0.981	- 4373.165
最大値	0.852	1.291	15.963	0.862	1.291	- 4241.266

### 4.3 オプション価格の推定値の比較

第2節で示した10種類のボラティリティ変動モデルとB-Sモデルによるオプション価格の推定値と実際の市場価格を用いて、以下のように平均誤差率 (mean error rate; MER) と平均2乗誤差率 (root mean squared error rate; RMSER) を計算し、各モデルの比較を行なう。

$$MER = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}}{X_i^{\text{市場価格}}} \right), \quad (38)$$

$$RMSER = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\hat{X}_i^{\text{推定値}} - X_i^{\text{市場価格}}}{X_i^{\text{市場価格}}} \right)^2}, \quad (39)$$

$X = C, P.$

ここで、 $\hat{X}_i^{\text{推定値}}$  はモンテカルロ・シミュレーションによるオプションの推定値、あるいは、B-Sモデルの理論価格を表し、 $X_i^{\text{市場価格}}$  はオプションの市場価格を表す。 $m$  は標本数である。MERの値を計算することにより、モデルの推定値が市場価格と比べてどの程度バイアスを持っているかが明らかになる。もう一つRMSERは、推定値と市場価格の乖離度を示す基準である。

また、マネネス (moneyness) は Bakshi, Cao and Chen (1997) を参考にし、次のように5種類のカテゴリーに分類した (表10を参照)。(1)  $S/K < 0.91$  ならばコール・オプションは deep-out-of-the-money (DOTM)<sup>15)</sup>、プット・オプションは deep-in-the-money (DITM)<sup>16)</sup> のオプション、(2)  $0.91 \leq S/K < 0.97$  ならばコール・オプションは out-of-the-money (OTM)、プット・オプションは in-the-money (ITM) のオプション、(3)  $0.97 \leq S/K \leq 1.03$  ならばコール/プット・オプションは at-the-money (ATM) のオプション<sup>17)</sup>、(4)  $1.03 < S/K \leq 1.09$  ならばコール・オプションは ITM、プット・オプションは OTM、のオプション、(5)  $S/K > 1.09$  ならばコール・オプションは DITM、プット・オプションは DOTM のオプションである。各カテゴリーの標本数は、コール・オプションの場合、DOTMで216、OTMで114、ATMで98、ITMで93、DITMで186あり、プット・オプションでは、それぞれ247、96、98、99、242であった。

表 10. マネネスによるオプションの分類

マネネス	コール	プット
$S/K < 0.91$	deep-out-of-the-money (DOTM)	DITM
$0.91 \leq S/K < 0.97$	out-of-the-money (OTM)	ITM
$0.97 \leq S/K \leq 1.03$	at-the-money (ATM)	ATM
$1.03 < S/K \leq 1.09$	in-the-money (ITM)	OTM
$1.09 < S/K$	deep-in-the-money (DITM)	DOTM

表 11. コール・オプションの推定値の比較：MER

	MS-GARCH-r		MS-GARCH		GARCH		標本数
	n	t	n	t	n	t	
DOTM	- 0.130 *	- 0.139	0.329	0.195	0.121	0.393 **	216
OTM	0.025 *	0.046	0.328 **	0.047	0.211	0.154	114
ATM	- 0.006	- 0.007	0.024	- 0.040 *	0.010	- 0.015	98
ITM	- 0.003	- 0.007	- 0.007	- 0.014	- 0.012	- 0.013	93
DITM	- 0.003	- 0.003	- 0.004 *	- 0.003	- 0.004 *	- 0.003	186
Total	- 0.038 *	- 0.038 *	0.155	0.059	0.070	0.140	707

	SV		B-S	標本数
	n	t		
DOTM	0.105	0.098	- 0.217	216
OTM	0.086	0.076	- 0.098	114
ATM	0.058 **	0.041	- 0.088 *	98
ITM	0.034 **	0.015	- 0.021	93
DITM	0.009 **	0.002	- 0.004 *	186
Total	0.060	0.051	0.238 **	707

\* : 0 に最も近い値, \*\* : 0 から最も離れた値

表 12. コール・オプションの推定値の比較：RMSE

	MS-GARCH-r		MS-GARCH		GARCH		標本数
	n	t	n	t	n	t	
DOTM	0.915	0.896 *	1.319 **	1.014	1.093	1.269	216
OTM	0.478	0.628	0.986 **	0.406 *	0.722	0.599	114
ATM	0.184	0.198	0.258	0.141 *	0.216	0.188	98
ITM	0.077	0.080	0.080	0.068 *	0.076	0.072	93
DITM	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	186
Total	0.547	0.563	0.837 **	0.588	0.677	0.746	707

	SV		B-S	標本数
	n	t		
DOTM	1.002	0.988	1.302	216
OTM	0.856	0.456	0.633	114
ATM	0.453 **	0.145	0.234	98
ITM	0.211 **	0.070	0.083	93
DITM	0.078 **	0.052 *	0.073	186
Total	0.555	0.504 *	0.770	707

\* : 最小値, \*\* : 最大値

表 13. プット・オプションの推定値の比較：MER

	MS-GARCH-r		MS-GARCH		GARCH		標本数
	n	t	n	t	n	t	
OTM	- 0.522	- 0.538	- 0.614	- 0.660	- 0.695	- 0.605	247
OTM	- 0.022 *	- 0.035	- 0.059	- 0.216	- 0.124	- 0.162	96
ATM	- 0.030	- 0.026	- 0.015 *	- 0.059	- 0.023	- 0.043	98
ITM	- 0.012	- 0.013 **	- 0.003	- 0.003	- 0.004	- 0.003	99
DITM	- 0.001	- 0.001	- 0.001	0.000 *	- 0.001	0.000 *	242
Total	- 0.173	- 0.180	- 0.204	- 0.243	- 0.238	- 0.216	782

	SV		B-S	標本数
	n	t		
OTM	- 0.452	- 0.354 *	- 0.828 **	247
OTM	- 0.115	- 0.098	- 0.344 **	96
ATM	- 0.088	- 0.048	- 0.095 **	98
ITM	- 0.005	- 0.003	- 0.002 *	99
DITM	- 0.002	0.000	0.002	242
Total	- 0.169	- 0.130 *	- 0.315 **	782

\* : 0 に最も近い値, \*\* : 0 から最も離れた値

表 14. プット・オプションの推定値の比較：RMSER

	MS-GARCH-r		MS-GARCH		GARCH		標本数
	n	t	n	t	n	t	
DOTM	0.700	0.737	0.719	0.725	0.749	0.685	247
OTM	0.374	0.443	0.413	0.336	0.330	0.308 *	96
ATM	0.178	0.200	0.219	0.155	0.188	0.173	98
ITM	0.091	0.090	0.092	0.088	0.087 *	0.088	99
DITM	0.070	0.071	0.070	0.071	0.072	0.072	242
Total	0.423	0.451	0.439	0.431	0.444	0.407	782

	SV		B-S	標本数
	n	t		
DOTM	0.645 *	0.897 **	0.876	247
OTM	0.423	0.531 **	0.512	96
ATM	0.144 *	0.221	0.237 **	98
ITM	0.098	0.100 **	0.101	99
DITM	0.012 *	0.087	0.072 **	242
Total	0.300 *	0.462	0.533 **	782

\* : 最小値, \*\* : 最大値

コール・オプションのMER, RMSER の計算結果は、表 11, 12 にまとめた。MER の基準ではMS-GARCH-rモデルによるオプション価格付け

のパフォーマンスが最も優れており、B-Sモデルのパフォーマンスが最も悪いという結果となった。RMSER の基準ではSV-tモデルによるオプ

ション価格付けのパフォーマンスが最も優れており、MS-GARCHモデルのパフォーマンスが最も悪いという結果となった。

プット・オプションのMER、RMSERの計算結果は、表13、14にまとめた。MERの基準ではSV-tモデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れており、B-Sモデルのパフォーマンスが最も悪いという結果となった。MSERの基準ではSV-nモデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れており、B-Sモデルのパフォーマンスが最も悪いという結果となった。

また、本研究で用いたボラティリティ変動モデルによるオプション評価は、オプション市場で基準とされているB-Sモデルよりも適正な価格付けを行なうことができるということがわかった。

## 5 結論と今後の課題

本研究では、様々なボラティリティ変動モデルを用いてオプション評価を行ない、どのモデルが有効であるかの検証を行なった。得られた結果は次の通りである。

1. コール・オプションでは、MERの基準ではMS-GARCH-rモデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れており、RMSERの基準ではSV-tモデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れている。
2. プット・オプションでは、MERの基準ではSV-tモデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れており、RMSERの基準ではSV-nモデルによるオプション価格付けのパフォーマンスが最も優れている。
3. 本研究で用いたボラティリティ変動モデルによるオプション評価は、オプション市場で基準とされているB-Sモデルよりも適正な価格付けを行なうことができる。

今後の課題としては、次の3点が考えられる。

1. SVモデルにもスイッチングを導入したモデルを考えること。
2. 投資家のリスク中立性を仮定するのではなく、原資産価格の収益率の過程にリスク・プレミアムを考慮して定式化を行なうこと。
3. ボラティリティ変動モデルによるオプション価格を詳細に分析すること。特に、インプライド・ボラティリティ (implied volatility)、ボラティリティ・スマイル (volatility smile) などについても研究すること。

(日本大学経済学部准教授)

## 注

- 1) 満期日(権利消滅にのみ権利行使可能なオプションをヨーロッパ・オプション (European option) と呼び、満期日以前にいつでも権利行使可能なオプションをアメリカン・オプション (American option) と呼ぶ。
- 2) Gray (1996) はこのモデルを、レジーム・スイッチング GARCH (regime-switching GARCH) モデルと名付けた。しかし、レジーム・スイッチングはマルコフ過程によって引き起こされていることから、本研究ではマルコフ・スイッチング GARCH モデルと呼ぶことにした。
- 3) 里吉 (2004) は MSGARCH モデルによる TOPIX の実証分析を行ない、TOPIX 変化率はスイッチングを起こしていること、また、日次データのボラティリティの予測は従来の GARCH モデルよりも優れていることを示している。
- 4) SV モデルの実証研究への適用に関して詳しくは、Taylor (1994)、Ghysels, Harvey and Renault (1996)、Shephard (1996)、Jiang (2002)、Hol (2003) を参照。
- 5)  $S_t$  を  $t$  時点の原資産価格とすると  $t$  時点の原資産価格収益率  $R_t$  は以下のように定義される。

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \times 100 (\%)$$

- 6) GARCH (1, 1) の場合には、非負制約は必要不

分条件となる。ただし、高次の GARCH ( $p, q$ ) の場合にはパラメータの非負制約を緩めることができる。詳しくは、Nelson and Cao (1992) を参照。

- 7) 証明は、渡部 (2000) 1.4 節を参照。
- 8) オプション価格を評価する  $T$  時点においては、 $T$  時点から  $T + 1$  時点にかけての無リスク資産の利子率  $r_{T+1}$  は既知であるが、その先の利子率は分からない。したがって、 $T$  時点から満期である  $T + \tau$  時点までの利子率は一定であると仮定し、 $r = r_{T+1}$  とおいて現在価値を計算することになる。
- 9) 他の方法としては、Duan and Simonato (1998) は経験的マルチンゲール・シミュレーション (Empirical Martingale Simulation) を利用する方法を提案している。モンテカルロ実験では、経験的マルチンゲール・シミュレーションはモンテカルロ・シミュレーションや Barraquand (1995) のモーメント・マッチング・シミュレーション (Moment Matching Simulation) よりも効率的であるという結果が得られている。また、Duan, Gauthier and Simonato (1999) は、経験的マルチンゲール準モンテカルロ (Empirical Martingale Quasi-Monte Carlo) シミュレーションが、経験的マルチンゲール・シミュレーションよりも効率的であるという結果を得ている
- 10) ここでは、一様乱数と推移確率を用いてマルコフ過程に従う状態変数を求めていくが、出発点である  $T + 1$  時点の状態変数  $s_{T+1}$  に関してはこの方法が適用できない。なぜならば、手順 [1] においてパラメータの最尤推定を行なってもオプションの評価時点である  $T$  時点の状態変数  $s_T$  の値は未知であり、既知でなければ一様乱数と推移確率から状態変数  $s_{T+1}$  を求めることはできないからである。したがって、 $s_{T+1}$  についてはハミルトン・フィルタで得られた  $T$  時点の確率  $\Pr [s_T = i | I_T]$  と推移確率  $\Pr [s_{T+1} = j | s_T = i]$  を使って

$$\Pr [s_{T+1} = j | I_T] = \sum_{i=0}^1 \Pr [s_{T+1} = j | s_T = i]$$

$$\Pr [s_T = i | I_T]$$

を計算し、この確率からサンプリングを行なうことにする。

- 11) ただし、ここでの Ljung = Box 統計量は、Diebold (1988) によって分散不均一性を調整したものである。
- 12) 日経 225 オプション終値と日経 225 株価指数終値とが異時点で値付けされている可能性があるが、本研究では考慮しなかった。
- 13) 無担保コール翌日物のデータは、日経 NEEDS-FinancialQUEST を利用した。
- 14) 日経 225 株価指数 (日経平均) のデータは、日経 NEEDS-FinancialQUEST を利用した。また、パラメータの推定には、プログラミング言語である Ox Console 4.04 と GAUSS を利用した。
- 15) far-out-of-the-money と呼ぶこともある。
- 16) far-in-the-money と呼ぶこともある。
- 17) 実際には、厳密に ATM になる可能性はほとんどないため、ATM 付近のオプションを near-the-money オプションと呼ぶこともある。

### 参考文献

- 里吉清隆 (2004) 「マルコフ・スイッチング GARCH モデルによる日本の株式市場のボラティリティの分析」『日本統計学会誌』第 34 巻, 第 1 号, pp.1-19.
- 里吉清隆・三井秀俊 (2006) 「マルコフ・スイッチング・モデルによるオプション評価の実証研究」『産業経営研究』第 28 号, pp.51-71.
- (2007) 「期待収益率スイッチング・モデルによるオプション評価の実証研究」『産業経営研究』第 29 号, pp.115-136.
- 三井秀俊 (1998) 「日経 225 株価指数とオプション価格の確率的分散変動モデルによる分析」『ファイナンス研究』No.24, pp.23-40.
- (2000) 「日経 225 オプション価格の GARCH モデルによる分析」『現代ファイナンス』No.7,

- pp.57-73.
- (2004) 『オプション価格の計量分析』 税務経理協会.
- (2005) 「非対称確率的ボラティリティ・モデルによる日経 225 オプション価格の分析」『紀要』第 35 号, pp.135-153.
- 三井秀俊・渡部敏明 (2003) 「ベイズ推定法による GARCH オプション価格付けモデルの分析」『日本統計学会誌』第 33 卷, 第 3 号, pp.307-324.
- 森保洋 (1999) 「ARCH モデルによる日経 225 オプション評価」『現代経済学研究』第 7 号, pp.143-159.
- 渡部敏明 (2000) 『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.
- (2003) 「日経 225 オプションデータを使った GARCH オプション価格付けモデルの検証」『金融研究』第 22 卷, 別冊第 2 号, pp.1-34.
- Bakshi, G., C. Cao and Z. Chen (1997) “Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models,” *Journal of Finance*, 52, pp.2003-2049.
- Barraquand, J. (1995) “Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate European Securities,” *Management Science*, 41, pp.1882-1891.
- Black, F. and M. Scholes (1973) “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, pp.637-654.
- Bollerslev, T. (1986) “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31, pp.307-327.
- Cai, J. (1994) “A Markov Model of Switching-Regime ARCH,” *Journal of Business & Economic Statistics*, 12, pp.309-316.
- Diebold, F. X. (1986) “Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment,” *Econometric Reviews*, 5, pp.51-56.
- (1988) *Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics*, Springer-Verlag.
- Duan, J. -C. and J. -G. Simonato (1998) “Empirical Martingale Simulation for Asset Prices,” *Management Science*, 44, pp.1218-1233.
- Duan, J. -C., G. Gauthier and J. -G. Simonato (1999) “An Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing Model,” *Journal of Computational Finance*, 2, pp.75-116.
- Engle, R. F. (1982) “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation,” *Econometrica*, 50, pp.987-1007.
- Ghysels, E., A. C. Harvey and E. Renault (1996) “Stochastic Volatility,” in G. S. Maddala and C. R. Rao, eds., *Handbook of Statistics*, Vol.14: Statistical Methods in Finance, pp.119-191, North-Holland; 小暮厚之・森平爽一郎 (監訳) (2004) 『ファイナンス統計学ハンドブック』朝倉書店.
- Gray, S. F. (1996) “Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process,” *Journal of Financial Economics*, 42, pp.27-62.
- Hamilton, J. D. and R. Susmel (1994) “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime,” *Journal of Econometrics*, 64, pp.307-333.
- Hol, E. M. J. H. (2003) *Empirical Studies on Volatility in International Stock Markets*, Kluwer Academic Publishers.
- Jiang, G. J. (2002) “Stochastic Volatility and Option Pricing,” in J. Knight and S. Stachell (eds.), *Forecasting Volatility in the Financial Markets*, 2nd ed., pp.47-96, Butterworth-Heinemann.
- Lamoureux, C. G. and W. D. Lastrapes (1990) “Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model,” *Journal of Business & Economic Statistics*, 8, pp.225-234.
- Nelson, D. B. and C. Q. Cao (1992) “Inequality Constraints in the Univariate GARCH Model,” *Journal of Business & Economic Statistics*, 10, pp.229-235.
- Shephard, N. (1996) “Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility,” in D. R. Cox, D. V. Hinkley and O. E. Barndorff-Nielsen (eds.), *Time Series Models in*

*Econometrics, Finance and other Fields*, No.65 in  
Monographs on Statistics and Applied Probability, pp.1-  
67, Chapman & Hall.

Taylor, S. J. (1994) "Modeling Stochastic Volatility: A  
Review and Comparative Study," *Mathematical  
Finance*, 4, pp.183-204.