

月次パネルデータを使用した日本とアメリカの コールオプション価格差の比較分析*

竹内(野木森)明香†

1. はじめに

アメリカでは1983年にChicago Board Options Exchange (CBOE)で、日本では1989年に大阪証券取引所でオプション取引は開始された。オプション市場の制度は改定を繰り返し現在の形になっている。ここで2つのオプション市場の構造が異なっていることを指摘したい。例えば、2つの市場では取引初期時点での権利行使価格の設定の仕方や、取引される期間の長さを決める満期のサイクルが異なっている。このようなオプション市場の構造がオプション価格差に影響を与えるのならば、2つの市場にはそれぞれ異なる価格差の特徴があるだろう。本論文では、Standard & Poor's 500 (以下ではS&P 500) オプションと日経225オプションのデータを用い、2つの市場の特徴を比較しオプション市場の特性を分析していく。

本論文ではオプションの理論価格と市場価格の差を価格差と定義して分析を進めていくが、価格差に注目した論文は数少ない。オプション価格の実証分析の中心は理論価格の精緻化であり、まずBlack and Scholes (1973) モデル (以下BSモデル) から始まり、BSモデルの仮定を緩める形で様々なモデルが提案されてきた。オプション価格は原資産価格と連動して決定されるために、そのほと

んどは、原資産価格の動きをいかに正確に捉えるかということに主眼がおかれている。その中でも特に原資産価格のボラティリティがオプションの重要な価格決定要因となっているため、ボラティリティの変動をより精密に記述することを目的とした原資産価格モデルの推定が行われてきている。具体的にはARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) 型モデル、SV (Stochastic Volatility) モデルなどの分散変動モデルを用い満期のオプション価格分布を求め、その期待値からオプション理論価格を計算するという試みがなされてきた。

しかし、これらはあくまでも理論モデルであり、オプション市場で決定される価格は単純に原資産価格の変動だけから計算できるわけではない。原資産価格の動きを詳細に表すことで正確に予測するという目的とは別の観点からオプション価格を分析している研究には以下のものがある。Nishina and Nabil (1997) は日経225オプション価格の収益率分布が裾の厚い分布に従っており、マネネス、残存期間に依存してその分布が異なることを示している。Long and Officer (1997) はインプライド・ボラティリティ (IV: Implied Volatility) に自己相関が存在していることを示している。Bookstaber (1981) はオプション市場と原資産市場の非同時性から生まれるバイアスの存

* 本論文は、著者が一橋大学在学当時、指導教官であった故加納悟教授との共同研究をもとに研究を進めたものである。ここに故加納悟教授に感謝の意を述べたい。

† 169-8050 東京都新宿区西早稲田1-6-1

在を示唆している。Easley, O'Hara and Srinivas (1998) はオプションの取引量が原資産の将来の価格と相関していると指摘している。Guidolin and Timmermann (2003) は原資産の未知の配当パラメータが新しい情報によって更新されていく Bayesian learning effects を取り入れた BS オプション価格を提案し、このモデルによって BS モデルのバイアスが説明できることを示した¹⁾。Brandt and Wu (2002) はパネル形式のオプションデータを使って IV を推定し、BS モデルの IV が権利行使価格と残存期間に依存していることを指摘している。これらの研究が示すようにオプション価格は原資産価格の動きだけでは決まらない。そこで、市場価格の中で理論価格に依存していない部分である価格差の特徴を分析していく。

Kanoh and Takeuchi (2006) では日本のオプションデータを使い、オプション価格差は、マネネス、残存期間、取引期間に平均が依存し、また同じ権利行使価格のオプション同士、取引日が同じオプション同士で相関があることを述べている。しかし、Kanoh and Takeuchi (2006) による日本の価格差の分析だけでは、この特徴が日本のオプション市場独自のものなのか、オプション市場で共通にみられることなのかはわからない。もしオプション価格差が各国の市場で異なる性質を持つのであれば、オプション価格モデルの比較を行うとき、単純に理論価格と市場価格の差をみるだけでなく、その市場独自の特徴を取り入れた比較を行うべきであろう。また、2つの市場で共通の性質があるならば、その性質はオプション市場全体で共通する特徴である可能性がある。もし全てのオプション市場で共通の特徴があるならば、今後のオプション価格予測に取り入れていくべきであろう。そのため本論文ではアメリカのオプションデータを使い比較分析を行っている。

本論文の構成は以下のようになっている。第2節ではオプション市場の特徴を大まかに説明し市場価格データの整理方法を説明する。その後、対応した理論価格の計算方法を簡単に紹介する。第

3節では、第2節で計算した理論価格を用いて、オプション価格差のモデルを示し、推定結果をまとめている。第4節で結論と今後の課題を述べる。

2. オプションデータ

2.1 オプション市場の概略

本論文では S&P500 オプションと日経 225 オプションの2つを分析するが、このアメリカと日本の市場ではその制度が異なっている。以下では日本とアメリカのオプション市場制度について簡単に説明をする。

2つの市場の最も大きな違いは、S&P500 オプションには長期市場と短期市場という2つの市場が存在し、この2つの市場の違いによって長期オプションと短期オプションに大分できることである。長期オプションとして、6、12月満期のオプションが24ヵ月間取引されているが、始めは長期市場で取引され、残存期間が6ヵ月の時点で短期の S&P500 オプション市場へ転換された後、権利行使日を迎える。このような長期オプションは6、12月満期のオプションだけであり、そのほかのオプションは短期市場でのみ取引される。本論文では、長期市場で取引が行われている6、12月満期のオプションが長期市場で取引されている間は権利行使されず、残存期間が6ヵ月となると短期市場へ転換されることから、短期オプション市場に注目して分析を進めることとする。

次に、どちらのオプション市場でも同時に複数のオプションの取引が行われている。日経 225 オプション市場と S&P オプション短期市場で取引されているオプションに設定される満期のサイクルを図1に示した。(以下では簡略化のため S&P オプションの短期市場を単に S&P オプション市場と記す。) ある満期のオプションが、図の中の矢印の始点で設定され、終点で権利行使日を迎える。図より、日経 225 オプションでは8本の矢印が、S&P500 オプションでは3本の矢印が同時並行に走っていることから、日経 225 では同時に8

つの異なる満期日に従うオプションが取引されており、S&P500 オプションでは3つの異なる満期日に従うオプションが取引されていることがわかる。また、矢印の長さはそのオプションの取引される期間の長さを表している。日経 225 オプションでは3種類、S&P500 オプションでも3種類の矢印が存在し、日経 225 では1年3ヵ月、5ヵ月、4ヵ月と3種類、S&P500 オプションでは2ヵ月、8ヵ月間、長期市場から転換されたオプションが取引される6ヵ月の3種類である。以下ではこの取引される期間の長さのことを取引種別と呼ぶこととする。

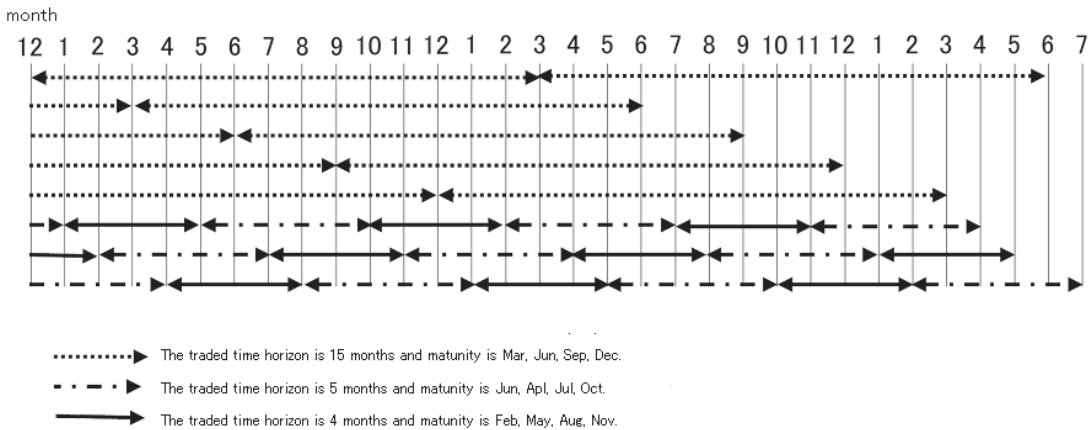
ここまで満期のサイクルについて説明したが、現実のオプション市場では1つの満期日に対して権利行使価格が異なる複数のオプションが設定されている。図1はオプションの満期のサイクルだ

けを示しているため、権利行使価格別のオプションを考えると、矢印1本の中に権利行使価格が異なるオプションが複数存在することになる。まずオプションが設定される取引初日に、日経 225 オプションでは原資産価格を中心に5つの権利行使価格が、S&P500 オプションでは in-, at-, そして out-of-the-money となるように権利行使価格が設定される²⁾。このように取引初日から同じ1つの満期日に対して複数のオプションが存在するが、設定されたオプションの権利行使価格の数は原資産価格の動きに応じてその後も取引途中で増加することがあり一定ではない。以下ではこの矢印1本ずつを満期グループと呼ぶこととする。

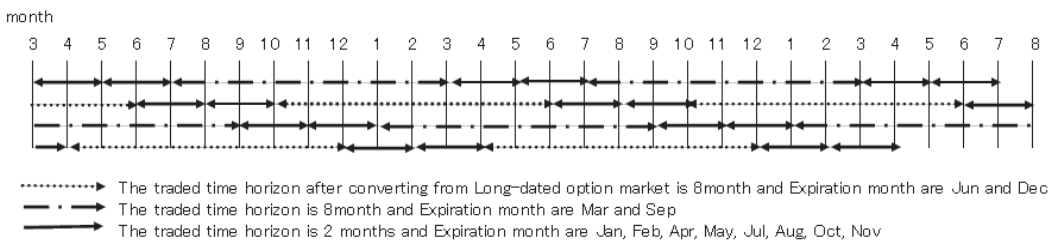
このような特徴を持つオプション・データを全て使って分析を行うのは難しい。そこで、図2のようにローテーション構造を含むパネル形式で

図 1. オプション市場の満期サイクル

日経 225 オプション市場



S&P500 オプション市場



データを整理した。まず各月から満期日に対応するデータを抜き出し月次データを作成した。また、それぞれのオプションのデータを、日経225オプションは過去4ヵ月までの時系列データとして取り出し、S&P500オプションは満期日から3ヵ月前までの時系列データとして、ローテーションを組み込んだパネルデータを作成した。図の太線で囲まれた長方形が1つの満期グループを表し、その中の細線で囲まれた長方形が権利行使価格別のオプションを表している。満期ごと4ヵ月前のデータからそれぞれ残存期間 $\tau = 1$ 、残存期間 $\tau = 2$ 、残存期間 $\tau = 3$ 、残存期間 $\tau = 4$ として便宜上表している。図からもわかるように、満期グループごとに権利行使価格の数は変化している。また、日経225では4ヵ月、S&P500では3ヵ月連続したデータがとれない場合は、分析から外した。

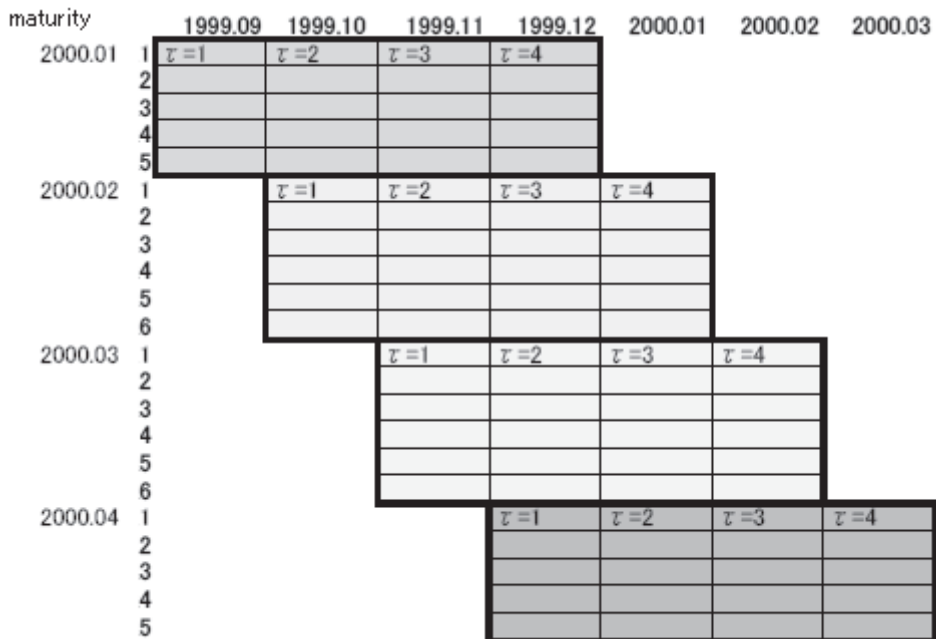
最終的に整理されたデータは以下のようになった。日経225コールオプションでは2000年1月から2002年4月に満期を迎えるオプションを選

択し、28個の満期グループを持つデータとなった。権利行使価格で数えると242個の異なる権利行使価格を持つオプションのデータになっている。S&P500オプションでは、2003年12月満期のオプションから、2005年3月満期のオプションまでのコールオプションを使用し、16個の満期グループ、権利行使価格ごとにみれば561個の異なる権利行使価格を持つオプションデータとなった。

2.2 理論価格の推定

オプションの市場価格について前節で紹介したが、価格差を計算するためには市場価格に対応した理論価格が必要である。この理論価格という確実なデータは存在しないため特定のモデルを選択し理論価格を計算しなければならない。しかし、そのモデルの選択が間違っているために、価格差の特徴が変化する可能性がある。そこで本論文では、このようなモデル・エラーを回避するために3種類のボラティリティ・モデルの推定を行った。

図2. 日経225オプションの月次データ作成例



もしボラティリティ・モデルに依存せずに価格差に共通の特徴が存在すれば、それはオプション市場のマーケット・エラーである可能性がある。

本論文で用いる理論価格の計算では、まず原資産価格の収益率にモデルを設定し、そのモデルからオプション満期日の原資産価格をシミュレーションする。このシミュレーションされた将来の原資産価格の分布から理論価格の計算を行う。前述したように、原資産価格のボラティリティがオプション価格に重要であることから、原資産価格のボラティリティ変動を表すモデルは数多く研究されてきた。その中でも代表的なものとして、ボラティリティのショックの持続性を取り入れた Bollerslev (1986) による GARCH モデルや、持続性に加え非対称性も考慮した Nelson (1991) による EGARCH モデルがある。このようなボラティリティ・モデルを使った比較分析では、Crouhy (1994), Duan and Zhang (2001), 日本のデータを用いた三井 (1998, 2000), 三井・渡部 (2003), 渡部 (2003) などがある。これらでは、ARCH 型モデルと BS モデルを使ったオプション理論価格の比較が行われ、BS モデルよりも ARCH 型モデルのほうがオプション価格の予測力が良いことが示されている³⁾。

本論文では GARCH, EGARCH, BS モデルを日経 225 と S&P500 の 2 つの株価指数の終値を用いて推定をした。ここで、権利行使価格を K , 原資産価格の終値を S , 日次の残存期間を τ , マネネス ($= K/S$) を M として表記する。GARCH, EGARCH モデルは、取引日から 1000 日前までのデータを使い、最尤法によって推定を行った。具体的には、GARCH (1,1) モデル、

$$R_{S,u} = \mu + \epsilon_u \quad (1)$$

$$\epsilon_u = \sigma_u z_u \quad z_u \sim i.i.d.N(0,1)$$

$$\sigma_u^2 = \omega + \alpha \epsilon_{u-1}^2 + \beta \sigma_{u-1}^2.$$

EGARCH (1,1) モデル

$$\ln(\sigma_u^2) = \omega + \alpha [\theta z_{u-1} - \gamma(|z_{u-1}| - E(|z_{u-1}|))] + \beta \ln(\sigma_{u-1}^2). \quad (2)$$

を推定し、理論価格をシミュレーションした。ま

た本論文では GARCH モデルと EGARCH モデルから計算された理論価格と BS モデルを比較するため、BS モデルから計算された理論価格として一般的な BS 公式を用いず、ARCH 型モデルの定式化に従った、

$$\sigma_u^2 = \omega. \quad (3)$$

を BS モデルとし、ARCH 型モデルと同様にシミュレーションを用いた計算方法に従って理論価格を計算した。推定したボラティリティ・モデルを Duan (1995) の手法で変換し⁴⁾、満期のオプション・ペイオフ分布をシミュレーションした。このとき、安全利子率 r にはコール・レートとフェデラル・ファンド・レートを用いている。

2.3 理論価格と市場価格の差の基本統計量

本論文では前節で整理されたデータを用いて、オプション市場価格 C_m と理論価格 C_s の差を、オプション価格差と呼び分析を進めていく。始めにオプション価格差がどのような分布に従っているかみていく。日本のデータ数は全部で 968 個であった。そのうち、74 個のデータに市場価格として 0 値が記載されている。この 0 値の扱いについては後述する。また S&P500 オプションでは 1686 個のデータのうち、42 個のデータが観測されていない。この観測されないデータを日本の 0 値のデータに対応させて考えた。以下では S&P500 の観測されないデータも 0 値と呼ぶことにする。

BS, GARCH, EGARCH モデルというボラティリティ変動モデルから計算された 3 種類の理論価格を RMSE (Root Mean Squared Error) を用いて市場価格と比較を行い表 1 に示した。日本のデータでは GARCH モデルから計算された理論価格の RMSE が最も小さい。つまり、残存期間が 1 ヶ月から 4 ヶ月という長期のオプションでは、GARCH モデルから計算される理論価格が BS モデルと EGARCH モデルから計算される理論価格よりも、オプション市場価格に近いことになる。この結果は先行研究とは異なっている。次に S&P500 オプ

ションの場合、EGARCH, GARCH, BS モデルの順に RMSE が小さい。これは先行研究と整合的な結果であるが日経 225 オプションの RMSE の大小関係と異なる結果になっている。また表では 0 値を含んだ場合の RMSE と含まない場合の RMSE を示しているが、二つの RMSE が最小となるモデルは、日経 225 でも S&P500 でも、0 値の有無にかかわらず、変わらなかった。

次に市場価格 C_m と理論価格 C_s の差 $C_m - C_s$ の分布を検討する。もし、理論価格 C_s が市場価格 C_m を十分に説明できるのならば、価格差 $C_m - C_s$ は正規分布に近くなるはずである。表 2 には価格差の基本統計量を示している。表から、両オプション共に平均は負の値となった。これらの結果は日本とアメリカのデータで共通して得られている。しかし、歪度は日本が 0 付近の正の値を取っているのに対し、アメリカのデータでは負となっていることから、価格差の分布の傾きが日本とアメリカでは逆になっている。また、S&P500 オプションは日経 225 オプションに比べて尖度がかな

り大きく、日本の方が裾の薄い分布になっている。0 値を考慮することで、日本では尖度の値はあまり変化しないが、アメリカでは特に BS, GARCH モデルで値が大きく変化している。以上のことから、日本とアメリカのデータでは価格差の分布の違いが生じていることが見て取れる。

図 3 では価格差のヒストグラムを示している。日本のヒストグラムでは BS, GARCH, EGARCH モデルで共に似たような山の形状をしているが、アメリカでは BS モデルだけ異なる形状をしていることが見て取れる。アメリカのデータのほうが、ボラティリティ・モデルの価格差への影響が顕著に現れている。また、分布の傾きを見ると、日本のデータでは分布は正の方向へ偏っており、0 付近にデータが集中していることがわかる。逆にアメリカのデータは負の方向に分布が偏っている。そして、日本と同様に 0 付近のデータが多い。図で確認をしても、価格差の分布は日本とアメリカで異なっていることがわかる。

以上のことから、日本とアメリカでは RMSE

表 1. コールオプション価格付けモデルの比較 (RMSE)

	0 値を除いた場合			0 値を含んだ場合		
	BS	GARCH	EGARCH	BS	GARCH	EGARCH
日経 225	208.05	203.75	210.60	199.94	195.81	202.39
S&P500	10.90	6.08	5.14	40.74	39.74	39.60

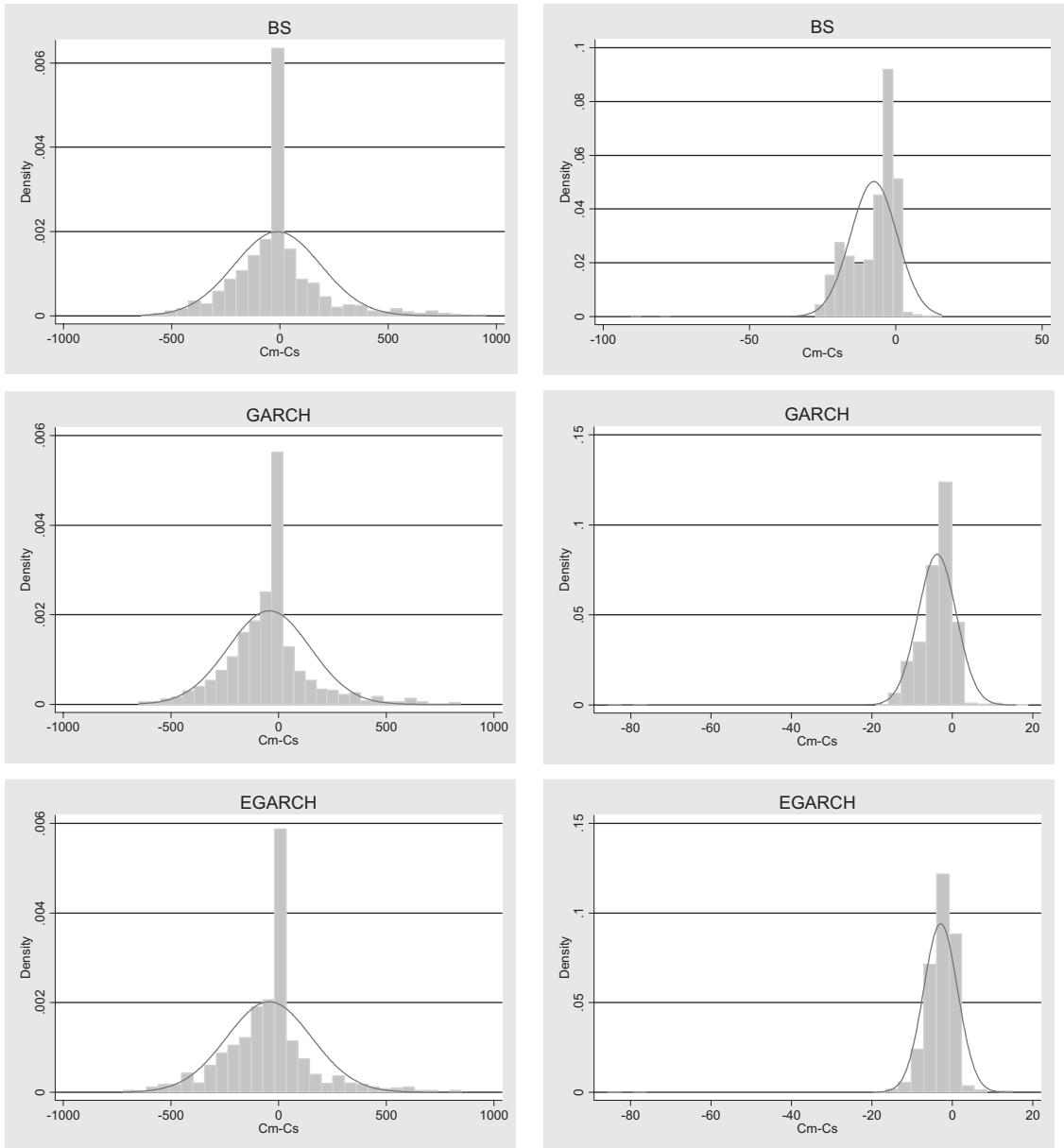
表 2. 価格差の基本統計量

	日経 225				S&P500			
	平均	標準偏差	歪度	尖度	平均	標準偏差	歪度	尖度
BS	- 11.31	199.73	0.93	6.29	- 11.14	39.20	- 11.92	164.14
GARCH	- 43.34	191.06	0.63	5.64	- 7.53	39.03	- 12.37	172.18
EGARCH	- 43.76	197.70	0.40	5.54	- 6.68	39.04	- 12.41	172.6
C _m > 0 の場合								
BS	- 12.21	207.81	0.91	5.83	- 7.46	7.94	- 1.76	13.45
GARCH	- 46.70	198.44	0.66	5.29	- 3.78	4.77	- 5.51	88.21
EGARCH	- 47.35	205.32	0.44	5.18	- 2.90	4.24	- 8.00	148.50

図 3. 観測できない変数を含んだときの価格差の分布

日経 225

S&P500



の意味で市場価格に近い理論モデルは異なり、価格差の分布が異なっている。従って、オプション価格差には日本とアメリカで異なる特徴が存在している可能性が考えられる。

3. 市場価格と理論価格の差の分析

3.1 モデル

Kanoh and Takeuchi (2006) でも示されているように、もし、市場で取引されるオプションが1

つか存在しないならば、そのオプションは他の条件のオプションと比較されることがないため、原資産価格の情報から計算される理論価格によって市場価格が決定されるだろう。しかし実際には市場には複数のオプションが存在し、それらオプションの中から取引をするオプションを投資家が選択している。したがって市場価格 C_m は原資産価格の動きから算出される理論価格 C_s と、他に取引されているオプションに依存する部分に分解することができるだろう。投資家はまず、どの残存期間のオプションを取引するか選択をするだろう。その後、選択した満期グループの中から、どの権利行使価格のオプションを取引するか選択すると考えられる。したがって、このような選択が行われているのなら、市場価格のうち他に取引されているオプションに依存する部分は、残存期間と権利行使価格（マネネス）に依存すると考えられる。

さらに、オプションには、それぞれ3つの取引種別があることを前述した。この取引種別の違いによる、取引期間の長さの違いは、流動性の違いを生むと考えられる。なぜなら、原資産価格変動が大きいとき各オプションの権利行使価格は新しく設定されるため、取引期間が長いほど原資産価格が大きく変動する可能性も増加することになり、より多くの権利行使価格が設定されると考えられるからである。実際に、取引期間が長い満期グループでは権利行使価格の設定数が多くなっている。そのため、取引種別もオプション価格差に影響を与える可能性がある。Kanoh and Takeuchi (2006) では取引種別の違いによって0値の発生率が異なっていることを指摘し、価格差のモデルに取引種別を含めた。

本論文では Kanoh and Takeuchi (2006) に従い日経 225 オプションと S&P500 オプションに対して、それぞれ、以下のようなモデル

$$C_{m,itk\tau} = C_{s,itk\tau} + \beta_0 M_{itk\tau} + \sum_{s=1}^4 \beta_{\tau,s} D_{\tau,s}$$

$$+ \sum_{j=4}^5 \beta_{op,j} D_{op,j} + u_{itk\tau} \quad (4)$$

$$u_{itk\tau} = \epsilon_t + \epsilon_k + \epsilon_{itk\tau}$$

$$C_{m,itk\tau} = C_{s,itk\tau} + \beta_0 M + \sum_{s=1}^3 \beta_{\tau,s} D_{\tau,s} + \beta_{op} D_{op} + u_{itk\tau}$$

$$u_{itk\tau} = \epsilon_t + \epsilon_k + \epsilon_{itk\tau} \quad (5)$$

を設定した。ここで、2つのダミー変数は、残存期間 τ に依存するダミー変数とオプションの取引種別に依存するダミー変数である。まず、残存期間に依存するダミー変数はそのオプションの残存期間が s ($s = 1, 2, 3, 4$) のときに1の値をとる。次に取引種別に依存するダミー変数は、日経 225 の場合は取引期間が j ヵ月 ($j = 4, 5$) となったときに1の値をとり、S&P500 の場合は取引期間が3ヵ月以上となったとき1の値をとると定義した。各添え字は i が満期グループを表し、 t が取引日、 k が権利行使価格、 τ は残存期間を表している。モデルの誤差 u は、取引日と同じオプションに共通する誤差と同一の満期で権利行使価格も同じオプションに共通する誤差と2つの誤差では捉えきれない残りの誤差の3つに分解されるとする。それぞれの誤差の分散は、

$$\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma_t^2, \quad \text{Var}(\epsilon_k) = \sigma_k^2, \quad \text{Var}(\epsilon_{itk\tau}) = \sigma_{itk\tau}^2 \quad (6)$$

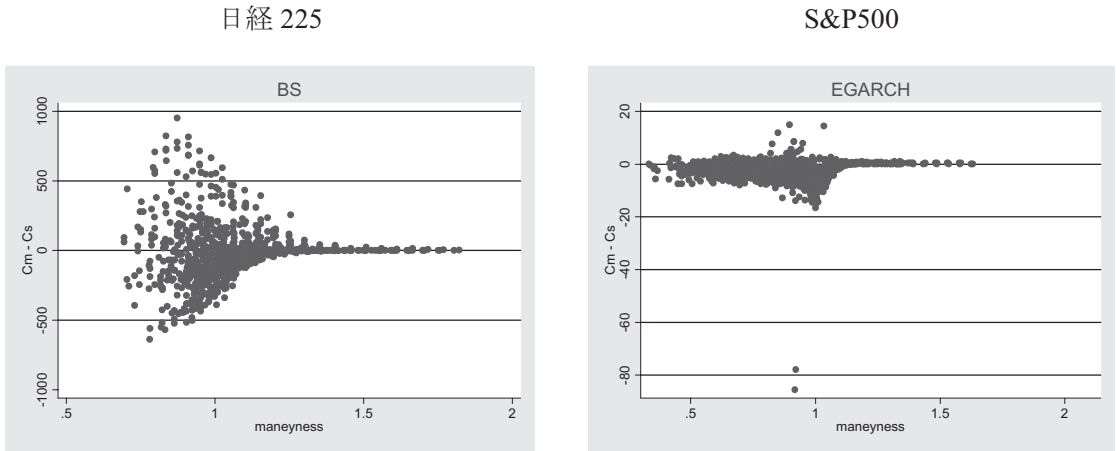
とし、 ϵ は互いに相関しないと仮定している。最後に、分析に使用するデータは、

$$C_{m,1111}, \dots, C_{m,1141}, C_{m,1212}, \dots, C_{m,1444}, C_{m,2211}, \dots, C_{m,2241}, \dots, C_{m,2544}, \dots \quad (7)$$

の順に整理した。このようなモデルの推定を効率的に行うには、モデルの分散共分散構造を考える必要がある。しかし、本論文で用いているデータはローテーション構造を含むパネルデータであり、分散共分散は大変複雑な形になる。詳細については Kanoh and Takeuchi (2006) を参照のこと。

価格差の別の特徴として、図4に示すように、マネネスに依存した分散不均一性が存在する。そのため本論文ではマネネス M を用いて以下のようにモデルを変形し、この分散不均一性を調整した。

図 4. マネネスと価格差の散布図



注) 日本のデータで BS モデルから計算した理論価格を用いて, アメリカのデータでは EGARCH モデルを使った散布図を示している.

$$M_{it\kappa} C_{m,it\kappa} = M_{it\kappa} C_{s,it\kappa} + \beta_0 M_{it\kappa}^2 + M_{it\kappa} \sum_{s=1}^4 \beta_{\tau,s} D_{\tau,s} + M_{it\kappa} \sum_{j=4}^5 \beta_{op,j} D_{op,s} + M_{it\kappa} u_{it\kappa} \quad (8)$$

$$M_{it\kappa} C_{m,it\kappa} = M_{it\kappa} C_{s,it\kappa} + \beta_0 M_{it\kappa}^2 + M_{it\kappa} \sum_{s=1}^3 \beta_{\tau,s} D_{\tau,s} + M_{it\kappa} \beta_{op} D_{op} + M_{it\kappa} u_{it\kappa} \quad (9)$$

3.2 0 値の取扱

本論文で用いるデータの中で, 日本では 968 個のデータの中で, 74 個のデータが 0 と記載されている. また, アメリカでは 1686 個のデータのうち 42 個が観測されていない. 日経 225 オプション市場では取引が成立しない場合, 0 というデータを終値として記載している. S&P500 オプション市場では, 取引が成立しないとき, ビッド価格とアスク価格が提示されていれば, その平均価格が終値として記載される. そのため, 取引が成立していなくても終値がデータとして得られる場合が多い. しかし, 本論文で用いたデータセットには, 欠損値が存在していた. これらのデータは, 何らかの理由でビッド価格, もしくは, アスク価格が観測されなかった状況と考えることがで

きる. 先行研究ではこのようなデータは分析から外されてきた. しかし, もし「取引が成立していない」という情報にも投資家の意思が反映されているのならば, これらのデータを除外することは情報のロスを意味し, 分析に加えるべきである. より重要なこととして, このような切断されたデータを除外することで推定値にバイアスが生じる可能性が考えられる. しかし, なぜ一部のオプションの取引が成立していないのか, 判別するのは難しい. 例えば, 図 5 は, オプション市場価格が正の値で観測されなかったときの理論価格をヒストグラムで表したものである. 日本のデータでは 1994 年 5 月から 2002 年 4 月まで, アメリカのデータでは 2003 年 12 月から 2005 年 3 月までのデータを使っている. この図から, 理論価格が十分に高いときですら, 市場価格が観測されない場合があるのがわかる.

本論文ではこれらの観測されないデータに対して, Kanoh and Takeuchi (2006) と同様に次のような切断条件を考慮した. まず 1 つ目が,

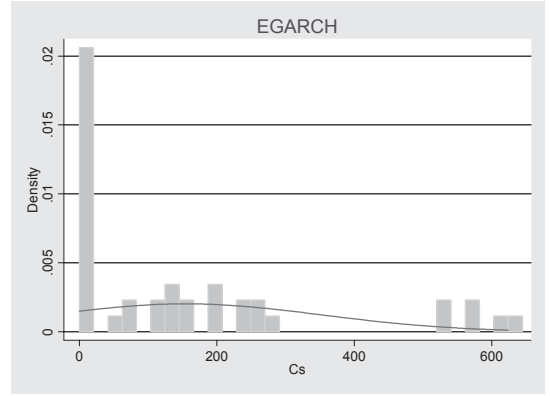
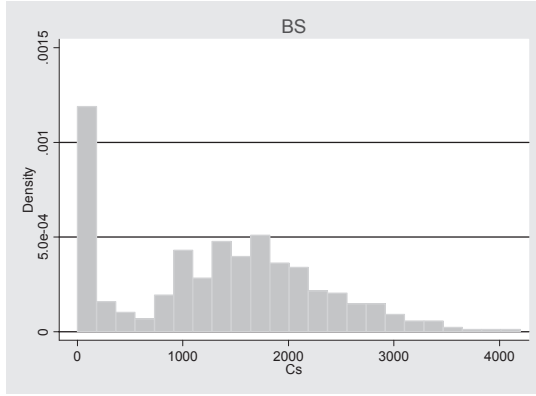
$$a) C_{m,it\kappa}^* < 0. \quad (10)$$

で, 投資家が想定する適正な価格が負になっている場合である. 理論価格の計算過程では, 取引手

図 5. 0 値データおよび欠損値が観測されるときに理論価格

日経 225

S&P500



注) 日本のデータ期間は 1994 年 5 月から 2002 年 4 月まで, アメリカのデータ期間は 2003 年 12 月から 2005 年 3 月までである.

数料や危険資産の長期保有コストは考慮されていない. これらを考慮して投資家が判断をしたとき, オプションの期待収益が 0 より小さくなってしまふ可能性がある. この場合, 市場で負の価格がつくことはあり得ないため, 取引は成立しないだろう.

2 つ目は, 需要と供給のアンバランスが生じてしまったために, 取引が成立しない場合である. この場合, 何らかの適正な価格よりも, かなり高い価格が提示されている, もしくは, かなり低い価格が提示されている. このような状況を,

$$DV = C_{m,itk\tau}^* - \left(C_{s,itk\tau} + \beta_0 M_{itk\tau} + \sum_{s=1}^4 \beta_{\tau,s} D_{\tau,s} + \sum_{j=4}^5 \beta_{op,j} D_{op,s} \right). \quad (11)$$

$$DV = C_{m,itk\tau}^* - \left(C_{s,itk\tau} + \beta_0 M_{itk\tau} + \sum_{s=1}^3 \beta_{\tau,s} D_{\tau,s} + \beta_{op} D_{op} \right). \quad (12)$$

を定義し, この DV が,

$$b) DV > a \text{ or } DV < b (< 0) \quad (13)$$

となる場合とした.

以上をまとめると, モデルは,

$$M_{itk\tau} C_{m,itk\tau}^* = M_{itk\tau} C_{s,itk\tau} + \beta_0 M_{itk\tau}^2 + M_{itk\tau} \sum_{s=1}^4 \beta_{\tau,s} D_{\tau,s} + M_{itk\tau} \sum_{j=4}^5 \beta_{op,j} D_{op,s} + M_{itk\tau} u_{itk\tau}$$

$$M_{itk\tau} C_{m,itk\tau}^* = M_{itk\tau} C_{s,itk\tau} + \beta_0 M_{itk\tau}^2 + M_{itk\tau} \sum_{s=1}^3 \beta_{\tau,s} D_{\tau,s} + M_{itk\tau} \beta_{op} D_{op} + M_{itk\tau} u_{itk\tau} \quad (14)$$

$$u_{itk\tau} = \epsilon_t + \epsilon_k + \epsilon_{itk\tau}$$

$$C_{m,itk\tau} = \begin{cases} C_{m,itk\tau}^* \\ 0 \end{cases} \text{ if } a) \text{ or } b).$$

として表すことができる. このモデルを Kanoh and Takeuchi (2006) と同様に, シミュレーションを用いた推定方法を使って推定した. この推定方法では, 観測されない価格と観測された価格が同時分布に従うことを仮定し, その同時分布を使って観測された価格を条件とした観測されていない価格の条件付き密度分布を導出している. この条件付き密度関数から観測されていなかったデータをシミュレーションし, シミュレーションで得られた疑似データを使って推定を行うことを提案している.

3.3 推定結果

モデルに分散不均一性を仮定していない OLS の推定結果と分散不均一性を仮定して推定した FGLS の結果を表 3 と表 4 に示す。推定したモデルは、

$$M_{itk\tau}(C_{m,itk\tau} - C_{s,itk\tau}) = \beta_0 M_{itk\tau}^2 + M_{itk\tau} \sum_{s=1}^4 \beta_{\tau,s} D_{\tau,s} + M_{itk\tau} \sum_{j=4}^5 \beta_{op,j} D_{op,s} + M_{itk\tau} u_{itk\tau}$$

$$M_{itk\tau}(C_{m,itk\tau} - C_{s,itk\tau}) = \beta_0 M_{itk\tau}^2 + M_{itk\tau} \sum_{s=1}^3 \beta_{\tau,s} D_{\tau,s} + M_{itk\tau} \beta_{op} D_{op} + M_{itk\tau} u_{itk\tau} \quad (15)$$

$$u_{itk\tau} = \epsilon_t + \epsilon_k + \epsilon_{itk\tau}$$

$$C_{m,itk\tau} = \begin{cases} C_{m,itk\tau}^* \\ 0 & \text{if } a) \text{ or } b). \end{cases}$$

であり、理論価格を左辺へ移項した状態で推定をしていることに注意されたい。表では、上記モデルの推定結果を示している。

表 3 では日経 225 オプションの結果を示している。まず OLS と FGLS の結果の違いを比較すると、推定方法の違いによって係数 β の推定結果はあまり変化がなかった。しかし、FGLS で σ が有意に推定されていることから分散不均一性は存在していることがわかる。マネネスに依存する係数、取引種別に依存する係数は全て正の値として有意に推定された。残存期間に依存する係数は負

表 3. 日経 225 : 推定結果 (OLS と FGLS)

	OLS			FGLS		
	BS	GARCH	EGARCH	BS	GARCH	EGARCH
β_0	64.76 * (27.00)	103.65 * (25.41)	133.55 * (26.29)	45.86 * (0.093)	100.36 * (0.10)	138.56 * (0.097)
$\beta_{\tau,1}$	- 134.28 * (33.85)	- 220.43 * (31.86)	- 251.63 * (32.96)	- 139.47 * (0.088)	- 245.63 * (0.10)	- 282.29 * (0.097)
$\beta_{\tau,2}$	- 95.48 * (34.82)	- 172.51 * (32.77)	- 205.71 * (33.91)	- 95.10 * (0.093)	- 194.47 * (0.11)	- 233.48 * (0.10)
$\beta_{\tau,3}$	- 94.55 * (35.35)	- 161.76 * (33.27)	- 191.78 * (34.42)	- 98.40 * (0.090)	- 189.39 * (0.10)	- 223.62 * (0.099)
$\beta_{\tau,4}$	- 83.60 * (36.16)	- 139.77 * (34.02)	- 172.24 * (35.21)	- 89.12 * (0.094)	- 163.08 * (0.11)	- 200.48 * (0.10)
$\beta_{op,4}$	47.46 * (14.42)	40.91 * (13.57)	42.37 * (14.04)	56.88 * (0.083)	56.65 * (0.091)	55.43 * (0.086)
$\beta_{op,5}$	26.48 * (13.03)	22.95 (12.26)	22.54 (12.69)	20.17 * (0.088)	17.73 * (0.096)	16.73 * (0.091)
σ_t^2	—	—	—	14477.50 * (752.43)	14011.60 * (577.22)	13984.91 * (569.79)
σ_k^2	—	—	—	2673.17 * (499.68)	4317.85 * (1247.85)	4606.87 * (1179.85)
σ_{itk}^2	—	—	—	22662.98 * (4234.86)	16040.23 * (3004.94)	18246.15 * (5029.61)
R^2	0.021	0.046	0.051	0.024	0.049	0.054

注) カッコ内の数値は標準誤差を表す。

の値として有意に推定されている。特に、残存期間の係数を比較してみると、残存期間が小さくなるほどその値が大きくなることがわかる。以上から、日経225オプションの価格差は、マネネスと残存期間、取引種別に依存していることがわかる。

S&P500オプションの結果を表4に示している。表より、マネネスの係数は日本と同様に正の値で、残存期間の係数は負の値で推定された。残存期間の係数を比較すると、残存期間が長いほど推定値が小さくなるという結果がBS, GARCHモデルでは得られている。長期オプションを表すダミー変数の係数も負となり、長期オプションの価格差が負へ偏る傾向がある。これらの係数関係は日本の結果と同様である。しかし、アメリカのデータではOLSとFGLSで係数の有意性が異なっており、OLSでは全ての係数が有意であっ

たが、FGLSでは取引種別に依存する係数が有意ではなくなった。特にEGARCHモデルではFGLSで推定するとマネネスの係数も有意ではなくなる。さらに、EGARCHモデルのFGLSによる残存期間に依存した係数の推定値の大小関係があまり変わらないところから、アメリカのデータの場合、理論価格をEGARCHモデルで推定したとき、その価格差の平均はマネネス、残存期間、取引期間のどれにも依存していないという結果が得られている。

最後に分散の推定値の比較を行う。日本のデータでは全てのモデルで、アメリカのデータではGARCH, EGARCHモデルで、権利行使価格に対する分散不均一性と取引日に依存する分散不均一性が有意に推定された。日本のデータでは取引日に依存する分散不均一性の値は権利行使価格に対する分散不均一性と比較して大きな値として計算

表4. S&P500：推定結果 (OLSとFGLS)

	OLS			FGLS		
	BS	GARCH	EGARCH	BS	GARCH	EGARCH
β_0	14.15 * (2.53)	14.31 * (2.48)	15.21 * (2.47)	18.96 * (3.09)	12.65 * (6.02)	11.62 (6.01)
$\beta_{\tau,1}$	- 23.81 * (2.67)	- 18.25 * (2.61)	- 17.10 * (2.60)	- 34.78 * (2.72)	- 18.78 * (4.96)	- 13.29 * (4.98)
$\beta_{\tau,2}$	- 22.02 * (2.66)	- 17.45 * (2.60)	- 17.05 * (2.59)	- 32.77 * (2.73)	- 17.53 * (4.98)	- 13.04 * (5.00)
$\beta_{\tau,3}$	- 19.34 * (2.63)	- 16.36 * (2.57)	- 16.63 * (2.56)	- 30.12 * (2.73)	- 16.86 * (4.97)	- 13.19 * (4.99)
β_{op}	- 4.65 * (1.29)	- 5.26 * (1.26)	- 5.73 * (1.26)	- 2.94 (2.34)	- 2.58 (4.34)	- 3.68 (4.45)
σ_t^2	—	—	—	112.53 * (0.54)	19.81 * (0.16)	5.67 * (0.26)
σ_k^2	—	—	—	0.000037 (0.00090)	11.01 * (1.48)	2.69 * (0.30)
σ_{itk}^2	—	—	—	71.87 * (5.14)	16.20 * (5.19)	19.28 * (4.51)
R ²	0.017	0.012	0.015	0.016	0.0094	0.014

注) カッコ内の数値は標準誤差を表す。

されたが、アメリカのデータでは分散の大小関係は理論価格のモデルによって異なっている。これらの結果から、どちらのオプション市場でも、取引日に依存する分散不均一性と権利行使価格に依存する分散不均一性は有意に存在し、オプション価格差は、オプション価格差間で相関していることが判明した。

また、ボラティリティ・モデルの違いによる推定結果の違いを比較する。日本ではBS, GARCH, EGARCH モデル共に同じ係数の有意性、正負、大小関係が得られているが、アメリカではボラティリティ・モデルによって推定結果が異なっている。係数の有意性からみれば、EGARCH モデルの価格差は他の要因に依存していない。このことから、アメリカではRMSEの意味でも、このモデルの係数の有意性からもEGARCH モデルによる予測が最も良いといえる。以上から、価格差のバイアスは、ボラティリティ・モデルを変えることで、存在するかないか、もしくは、その大小関係が変化する。また、分散不均一性は相関関係の強弱はボラティリティ・モデルに依存して変化するが、アメリカと日本の両方のデータでボラティリティ・モデルに依存せず有意に存在していた。したがって、分散不均一性は、日本特異の特徴ではない可能性が高い。

表5には、観測されなかった価格が、どの切断条件によってシミュレーションされたか示してい

る。日本のデータでは0円切断点としてシミュレーションされたデータが多い。負方向の切断は0円切断の半分位の数しか生じていない。対してアメリカでは負の切断ポイントとしてシミュレーションされたデータ数が0円切断点としてシミュレーションされたデータ数を大きく上回っている。ここにも、アメリカと日本のデータでは違いが生じている。

図6は、推定途中で発生させた0値データの疑似データをプロットしている。日本のデータは理論価格の値がかなり低いときでも正と負の両方向にオプション価格が発生している。アメリカのデータは理論価格が $C_s > 0$ の場合綺麗な線上にいらんでいることから理論価格の値が大きく影響していることがわかる。表5から負の価格となるシミュレーション価格も存在していることがわかっていて、 $C_s = 0$ の時に観測されないオプション価格のシミュレーションされた値をヒストグラムにしたときには、負の価格と正の価格の両方が発生していることがわかる。これらの図から、アメリカのデータで負のトランケーションは $C_s = 0$ の場合にしか発生しておらず、 $C_s > 0$ の場合は全て負方向の切断となった。アメリカのFGLSの推定結果では、係数の有意性の推定結果は各ボラティリティ・モデルで異なっていたが、シミュレーションされた値はBS, GARCH, EGARCH モデルで同様の特徴を持っている。

表5. 0値のシミュレーション結果

	切断条件	BS	GARCH	EGARCH
日経 225 (74obs.)	0	52	47	52
	+	0	0	0
	-	22	27	22
S&P500 (42obs.)	0	4	7	9
	+	0	0	0
	-	38	35	33

注) 切断条件は、0は $C_m < 0$ を示し、+は $DV > a$ を示し、-は $DV < b (< 0)$ を示している。

図 6. シミュレーションで発生させた市場価格の散布図

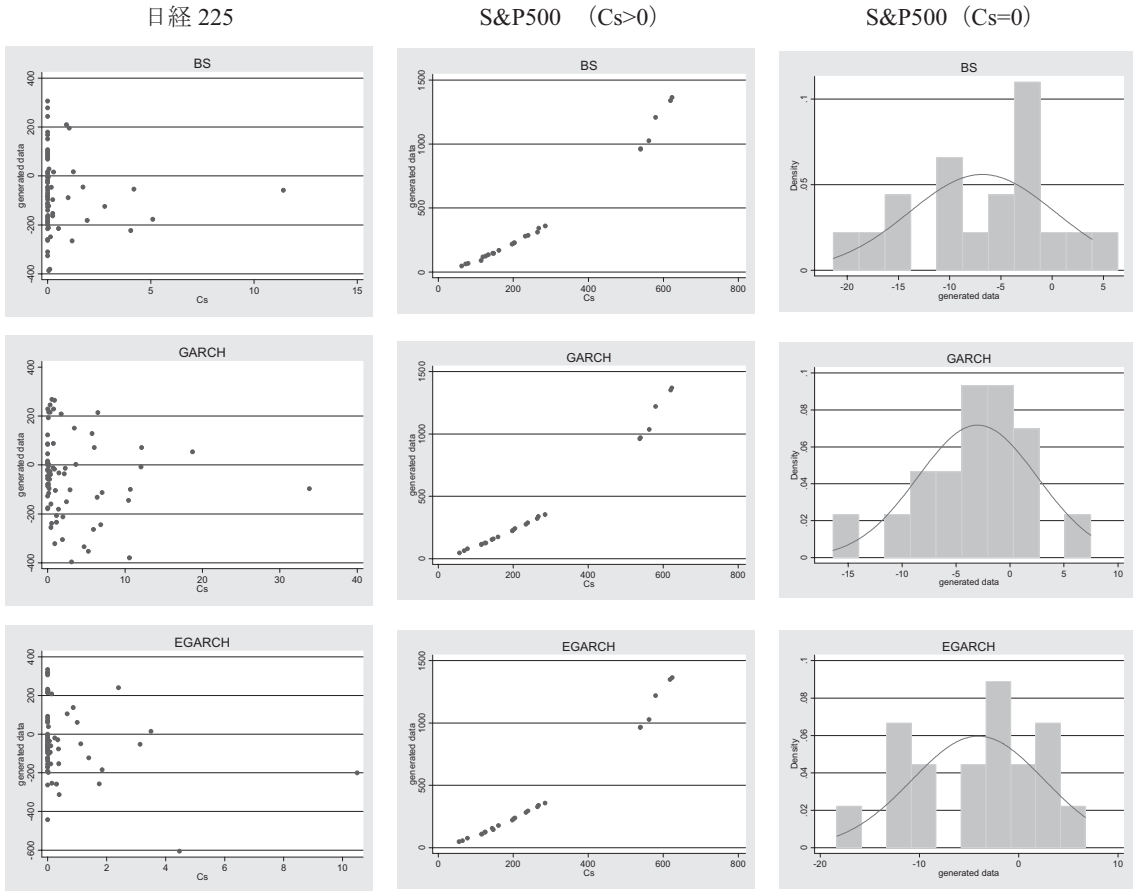


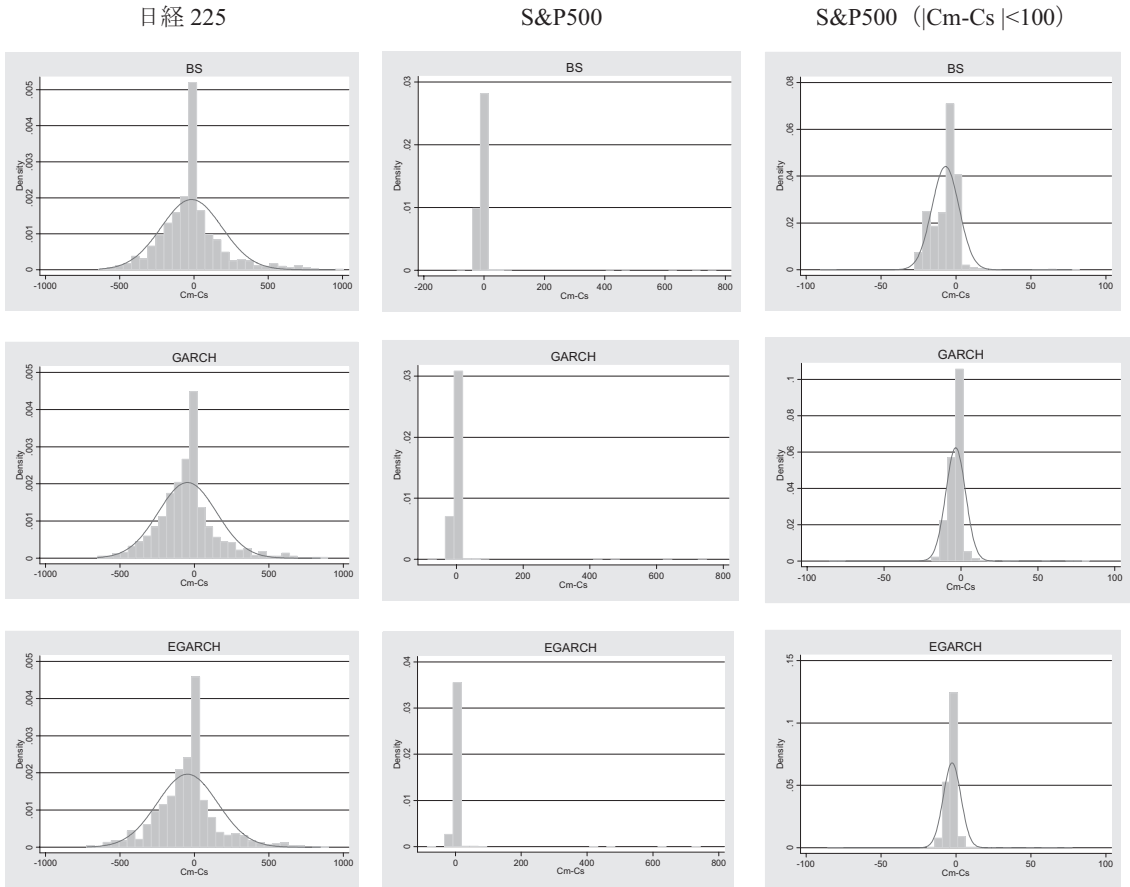
表 6. シミュレーションした値を用いた価格差の基本統計量

	日経 225				S&P500			
	平均	標準偏差	歪度	尖度	平均	標準偏差	歪度	尖度
BS	- 16.20	204.43	0.92	5.88	- 4.98	36.14	16.38	299.04
GARCH	- 46.69	195.88	0.63	5.24	- 1.36	36.03	17.18	317.85
EGARCH	- 46.32	203.21	0.41	5.14	- 0.53	35.67	17.29	320.53

最後にシミュレーションによって発生させた疑似データを使用して価格差の分布を考える。表 6 に基本統計量を示している。表より、日本のデータでは、価格差の平均が大きく負になった。このことから、オプションの買手が、より大きなリスクプレミアムを要求していることがわかる。アメ

リカのデータでは疑似データを使う前と比べて歪度の符号が正に反転した。また、日本と同様に、分布の裾はより厚くなっている。しかし、価格差の平均に関しては大きくなった。各統計量の変化を比べるとアメリカのデータの変化が大きい。0 値を考慮することで分布の傾き自体が変わってし

図7. シミュレーション推定値を用いた Cm-Cs の分布



まっていることから、0 値が含む情報はオプション価格分析で重要であると考えられる。

疑似データを使用したヒストグラムを図7に示した。日本のデータでは、観測されない市場価格を負の値で発生させた疑似データで置き換えたことから、分布は右へより傾いた。アメリカのデータでは右の分布の裾が推定前より厚くなっていることがわかる。価格差の絶対値が100より小さい部分のヒストグラムをみても右の分布の裾が厚くなっている。

4. おわりに

本論文では、オプション市場価格と理論価格の差を価格差として定義し、分析を行った。また、日本とアメリカのコールオプションの比較を行っ

ている。

日本のデータでは、価格差はマネネスと権利行使価格、残存期間に依存していた。さらに、その分散も、権利行使価格と取引日に依存している。残存期間については、残存期間が長くなるほど、価格差の負のバイアスが大きくなるという結果が得られている。この結果は、価格差の絶対値が残存期間に依存して増加するという、Long and Officer (1997) の結果と整合的である。さらに、取引種別で比較を行うと、取引期間が長いオプションのほうが、価格差の負のバイアスが大きいという結果が得られている。

アメリカのデータでは、日本と異なる係数推定値の結果が得られた。特に EGARCH モデルから計算された理論価格を用いた推定結果では、マネ

ネスと取引期間に対応する係数は有意ではなく、残存期間に対応するダミーは有意ではあったが、残存期間の違いによる大きな差は見られなかった。以上のことから、EGARCHモデルから計算された理論価格を用いた場合、アメリカのデータでは、価格差は、マネネス、残存期間、取引期間の全てに依存していないことになり、分散の不均一性だけが存在していることになる。

また、BS, GARCH, EGARCHモデルの3つのモデルから計算される理論価格を使用して3種類の価格差モデルの推定を行っている。日本のデータでは、推定された係数の符号や大小関係に、このようなボラティリティ・モデルの違いによる差は生じなかった。これらの結果からは、ボラティリティ・モデル・エラーによるものではなく、価格差の特徴が観測できたと考えられる。しかし、アメリカの結果ではボラティリティ・モデルによって推定結果が異なっている。日本のデータを用いたとき、全てのモデルで共通して有意だった今回の係数の推定結果は日本独自の特徴だと考えられる。逆に、権利行使価格に依存する分散の不均一性は日本とアメリカで共通する特徴といえる。

また、取引が行われないオプションの切断理由は、0円の切断か、負方向の切断のどちらかであるという結果が得られた。シミュレーションで発生させたデータを用いて価格差の分布を見たとき、アメリカのデータではその傾きが変わっていたことから0円もしくは観測されないデータに含まれる情報は、オプション価格差の分析で重要であると考えられる。

いくつかの課題を挙げておく。まず、本論文では、アメリカと日本のデータを満期から3ヵ月前、2ヵ月前までのデータを使って分析している。しかし、実際のオプション市場ではより多くのオプションが取引されており、ここでは、そのような長期のオプションを全て分析から外してしまった。特に、アメリカのデータでは3ヵ月前までのデータしか使っておらず、より長期のデータを含

んだ分析を行う必要がある。さらに、すでに述べたように、オプションの権利行使価格は原資産価格の動きが激しいとき、途中で追加される。このような途中で追加されるオプションには取引が活発に行われているものもあるため、分析に取り入れる必要があるだろう。以上のように、本論文で使用したデータは拡張の余地があり、より充実したデータを使用して、オプションの価格差の特徴をつかむ必要がある。第2に、本論文ではボラティリティ・モデルとして3つのモデルの推定を行った。しかし、アメリカの結果が示すように、ボラティリティ・モデルの違いによって、価格差モデルの推定結果が変化している。このことから、価格差の特徴はボラティリティ・エラーから生じている可能性が否定できず、本論文で使用したボラティリティ・モデルの他にも、現実のボラティリティによりフィットしたモデルを推定し、価格差の特徴に変化が生じるか分析する必要があるだろう。最後に、本論文ではオプション価格自体に焦点を当てて分析を行っている。これを、インプライド・ボラティリティと、過去のボラティリティ変動モデルから計算されるヒストリカル・ボラティリティとの比較と捉え直して分析をする必要があるだろう。

(早稲田大学大学院商学研究科助教)

注

- 1) 未知の配当を考慮したオプション価格モデルの実証分析では他に Chance, Kumar and Rich (2000) がある。
- 2) 権利行使価格の設定方法について詳しくは、大阪証券取引所とCBOEのHPを参照のこと。
- 3) ARCH型モデルの分布に注目した先行研究もある。Bollerslev (1987) と Watanabe (2000) では、原資産価格の収益率の分布が正規分布より裾の厚い分布に従っていることを指摘している。しかし、渡部 (2003) では、そのような裾の厚い分布をモデルに用いても、オプション価格の予測は向上するとは限らないという結果が得られ

ている。

- 4) 離散型の Duan 変換については Bauwens and Lubrano (2002) を参照のこと。

参考文献

- 三井秀俊 (1998) 「日経 225 株価指数とオプション価格の確率的分散変動モデルによる分析」『ファイナンス研究』24, pp.23-40.
- (2000) 「日経 225 オプション価格の GARCH モデルによる分析」『現代ファイナンス』7, pp.57-73.
- 三井秀俊・渡部敏明 (2003) 「ベイズ推定法による GARCH オプション価格付けモデルの分析」『日本統計学会誌』第 33 巻, 第 3 号, pp.307-324.
- 渡部敏明 (2000) 『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.
- (2003) 「日経 225 オプションデータを使った GARCH オプション価格付けモデルの検証」『金融研究』22, 別冊 2, pp.1-34.
- Bauwens, L. and M. Lubrano (2002) “Bayesian option pricing using asymmetric GARCH models,” *Journal of Empirical Finance*, 9, pp.321-342.
- Black, F. and M. Scholes (1973) “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, pp.673-659.
- Bollerslev, T. (1986) “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31, pp.673-659.
- (1987) “A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return,” *Review of Economics and Statistics*, 69, pp.542-547.
- Bookstaber, R. M. (1981) “Observed Option Mispricing and the Nonsimultaneity of Stock and Option Quotations,” *The Journal of Business*, 54, pp.141-155.
- Brandt, W. M. and T. Wu (2002) “Cross-sectional tests of deterministic volatility functions,” *Journal of Empirical Finance*, 9, pp.525-550.
- Chance, D. M., R. Kumar and D. Rich (2000) “Dividend Forecast Biases in Index Option Valuation,” *Review of Derivatives Research*, 4(3), pp.285-303.
- Crouhy, M. (1994) “Extensions of the Black-Scholes Model to the case of Stochastic Volatility,” unpublished manuscript.
- Duan, J. C. (1995) “The GARCH Option Pricing Model,” *Mathematical Finance*, 5, pp.13-32.
- Duan, J. C. and H. Zhang (2001) “Pricing Hang Seng Index options around the Asian financial crisis-A GARCH approach,” *Journal of Banking and Finance*, 25, pp.1989-2014.
- Easley, D., M. O'Hara, and P. S. Srinivas (1998) “Option Volume and Stock Prices: Evidence on Where Informed Traders Trade,” *The Journal of Finance*, 53, pp.431-465.
- Guidolin, M. and A. Timmermann (2003) “Option prices under Bayesian learning: implied volatility dynamics and predictive densities,” *Journal of Economic Dynamics & Control*, 27, pp.717-769.
- Kanoh, S. and A. Takeuchi (2006) “An Analysis of Option Pricing in the Japanese Market,” *Hitotsubashi University Research Unit for Statistical Analysis in Social Sciences A 21st-Century COE Program Discussion Paper Series*, 145.
- Long, D. M., D. T. Officer (1997) “The Relation between Option Mispricing and Volume in the Black-Sholes Option Model,” *Journal of Financial Research*, 20(1), pp.1-12.
- Nelson, D. B. (1991) “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach,” *Econometrica*, 59, pp.347-370.
- Nishina, K. and M. M. Nabil (1997) “Return dynamics of Japanese stock index options,” *The Japanese Economic Review*, 48, pp.43-64.
- Watanabe, T. (2000) “Excess Kurtosis of Conditional Distribution for Daily Stock Returns: The Case of Japan,” *Applied Economics Letters*, 7, pp.353-355.