簡略化王朝モデルと生涯時間制約[1)]

金　谷　貞　男[2)]

1．序論

私見によれば，近代経済学における人口成長に関する論文の中で，三つのグループの論文集がそれぞれその一時代を作ったと思われる[3)]．そのグループの中で，一番従来の最適成長論に忠実に人口成長の議論に貢献した論文としては，Becker and Barro（1988），Barro and Becker（1989）の「王朝モデル」が上げられる．王朝モデルはマクロ経済学の立場から人口成長に接近したものである．利他主義が整合的に定義された重複世代モデルは，永遠に生きる個人の無限視野モデルと等価であることが知られている．その際，子供の数が選択変数であった場合に，どれほどの子供の数が選択されるか，を論じたのが王朝モデルである．

現実の経済発展過程を見ると，人口は長期的には「人口転換理論」[4)] にしたがって，変化してきたことが人口学者によって観察されている[5)]．この観察によれば，ほぼ産業革命と時を同じくして[6)]，死亡率が減少し，このために出生率と死亡率との差である人口成長率の増加がまず起きる．その後に出生率の減少が起き，その結果人口成長率の減少が起き，現代に至る．これは産業革命期のほとんどすべての国の歴史について見られる現象であるので「人口転換理論」の名がある．

本論文は王朝モデルを論じる．私たちは Jones and Schoonbroodt（2010）の提案した枠組みに基づいて，元々の王朝モデルを簡単化し，人口転換理論を再現できるか試みた．その結果，私たちが得た結論は次の三点である．まず，第一に，私たちは資本が一切存在せず，各期間を通じて子供の数 n を通じてのみ，各個人は自分の子孫と繋がっているとした．この場合には，個人の最適解は，子供の数を含めた同じ解が，繰り返し子供の世代の最適解として採用されることが予想される．すなわち，定常解が最適解の最有力な候補となる[7)]．すると，前に再帰的に定義された王朝効用関数を解くことができ，私たちは最適な子供の数を計算できる．とりわけ，その場合，個人が子供の数に対して，比例的な利他主義を持つか，逓減的な利他主義を持つかは問題にならない．これは，Barro and Becker（1989）の「比例的な利他主義を仮定するとモデルに解がない」との結論と異なる．この結論が Jones and Schoonbroodt（2010）の，「資本は存在しない」との仮定によるのか，Barro and Becker（1989）モデルに誤謬が存在するのかは明らかではない．

第二に，前述の解法において，逓減的な利他主義を仮定すると，最適解は一般に二つになることが示される[8)]．私たちは以下の分析を簡単に行いたいので，Barro and Becker（1989）とは逆に，比例的な利他主義を仮定した．実際に，人口を外生とする伝統的な最適成長論では，こちらとしているのが普通であるが，この問題の詳しい検討は事後に委ねる．

第三に，この簡略化した王朝モデルに，制約条件として予算制約式の他に生涯時間制約式を導入すると，人口転換理論を生涯時間の機会費用の観

点から説明しうる可能性が示唆される[9]．つまり，私たちはこの「簡単化王朝モデル」を用い，家計生産関数を導入してモデルを構築する．その結果，予算制約式と生涯時間制約式の二つの制約が導入される．一般に観察されるところでは，低開発経済では賃金率が低く，そのため生涯時間の機会費用が低い．先進国経済では賃金率が高く，そのため生涯時間の機会費用が高い．すると，二つの制約条件式のうち，低開発経済では予算制約式の重要度が高くなり，先進国経済では生涯時間制約式の重要度が高くなる．それで，私たちは極度に高い賃金率が仮定された場合の定常状態と極度に低い賃金率の定常状態を比較する．その結果，高い賃金率が成立する経済の定常状態では，生涯時間制約式の重要性が高く，低い賃金率が成立する経済の定常状態の場合より，最適な子供の数が小さいことが示される．つまり，当初の低開発国から先進国に移行するに連れて，時間の機会費用が増加し，その結果，子供の数が減ることを説明する．これは，私たちの簡単化王朝モデルの範囲で，人口転換理論を説明するものである．特に，従来の最適成長論のモデルと一致する，整合的な利他主義の仮定の下で，上記事実を説明し得た点が特徴である．

論文の構成は以下のようになっている．第2章において，Jones and Schoonbroodt（2010）のモデルを展開し，生涯時間の制約式を導入し，最適条件を導く．第3章において，上記の比較をおこない，最適な子供の数が高い賃金率の方が小さいことを導く．また，このモデルの特殊な場合が，Barro and Becker（1988）モデルであること示す．第4章において，今後の研究の方向を議論する．

2. モデル

生涯時間を導入するには，モデルに家計生産関数を導入すればよい．以下，家計生産関数の仮定にしたがって，モデルを再構築しよう．

2.1　目的関数

離散的な期間が0から∞まで続くとしよう．各期に生きる個人[10]は，1期間のみを生きるとする．個人は自分の子供に対して利他的であると仮定する．すなわち，第i期に生きる個人は自分自身の生涯効用 $v(z_i)$ と第i+1期に生きる子供の王朝効用 U_{i+1} とから，再帰的に定義される次のような王朝効用関数 U_i を最大化すると仮定する[11]．

$$U_i = v(z_i) + \alpha n_i\ U^*_{i+1} \tag{1}$$

ただし，（1）式における王朝効用 $U_{i+1}{}^*$ は，子供の世代が受け取る最適王朝効用であるので，第i期の個人の問題では，所与とされる．

また，α は子供の効用の総計に対する，この個人が持つ割引率であり，

$0 < \alpha < 1$

の定数である．n_i は第i期の個人の子供の数であり，第i+1世代の個人となる．これは第i期の個人にとって，非負の選択変数である．

生涯効用 $v(z_i)$ は，

$$v(z) \geq 0,\ v'(z) > 0,\ v''(z) < 0,$$
$$\lim_{z\to 0} v'(z) = \infty,\quad \lim_{z\to\infty} v'(z) = 0$$

を満たす通常の効用関数である．ここではJones and Schoonbroodt（2010）の議論に基づいて，第一の不等式のように正の範囲に関数を限ることとする．

この生涯効用関数は，物理的財 c_i に対して直接に定義されるのではなく，物理的財とそれを家計内で処理する時間 t_{ci} とから生産される産物[12] z_i に対して定義されるとしよう[13]．これは家計生産に関して要求される標準的な仮定である．とりわけ，私たちはこれがコブ＝ダグラス関数で示されるとしよう．すなわち，

$$z_i = c_i{}^{\varphi}\, t_{ci}{}^{(1-\varphi)} \tag{2}$$

とする．ここにおいて，ϕ は

$0 \leqq \phi \leqq 1$

を満たす技術的定数である．これに対し，z_i，c_i，

t_{ci} はこの個人の非負の選択変数である．

2.2　制約条件

私たちはこの個人が次の 2 種類の制約下にあると仮定する．すなわち，予算制約と個人の生涯の時間制約である．まず，私たちの新たに追加する仮定である，生涯時間の制約について語ろう．各期の中で，個人は次のように時間を分割するとする．

$$t_{ci} + t_{wi} + \gamma n_i = T \tag{3}$$

t_{wi} は第 i 期に生きる個人の労働時間であり，非負の選択変数である．γ は子供一人生産に要する時間であり，非負の定数とする．子供一人に γ だけかかるのであるから，子供全体では，γn_i になる．また，T は 1 期間の中の個人の時間の総計であり，正の定数とする．たとえば，1 期間の長さとして 60 年とすれば，T = 60 である．ここで，T/γ の大きさが問題になることが，後に示される．（1）式より，いかなる子供の数 n_i に対しても，王朝効用関数が定義されるために，

$$\alpha \frac{T}{\gamma} < 1 \tag{4}$$

と仮定しておこう [14]．

次に，私たちは予算制約について語る．私たちは Jones and Schoonbroodt（2010）の示唆にしたがって，資本をモデルが存在しないという仮定を用いてモデルを展開しよう．また，技術革新も簡単化のためにこの論文では考慮しない．

資本が存在せず，労働のみが投入要素であるとは，

$$c_i + \beta n_i = w\, t_{wi} \tag{5}$$

によって，個人の予算制約式が与えられることを意味する．ここで，β は子供一人の生産に要する財の量であり，非負の定数である [15]．w は労働生産性（＝実質賃金率）を示し，正の定数 [16] である．この式の左辺は，予算の使用法を示す．つまり，家計生産の投入のために使用されるか，子供の生産の投入のために使用されるか，である．右辺は労働投入に比例して，所得が増加することを示す．

Jones and Schoonbroodt（2010）の仮定をおくと，各期間で生涯効用を変化させうる技術的パラメーターは w と β であるが，技術革新がないとの仮定により，期間に関わらず一定である [17]．したがって，この仮定の下では w と β をたとえ状態変数と見なしても，その値は各期間で常に一定である．制御変数は n_i である．状態変数が各期において一定なので，最適な制御変数の値は各期において同一であると予想するのが自然である．すなわち，モデルは定常状態にある．

なお，また，生涯効用 v は非負との仮定から，U が負である可能性は排除されることを意味する．U が負であり，v が非負である定常解は存在しないからである．これらの議論は後の展開に影響を与える．

2.3　最適解

以上の二つの制約条件下に，当初の王朝的効用関数の最大化をおこなう．計算の簡明さのために，（2）式は代入することによって初めから消去しよう．すると，ラグランジェアンは，

$$\mathcal{L}_i = v(t_{ci}^{\varphi}\, c_i^{1-\varphi}) + \alpha n_i\, U_{i+1}^{*} + \lambda_i (w\, t_{wi} - c_i - \beta n_i) + \mu_i (T - t_{ci} - t_{wi} - \gamma n_i) \tag{6}$$

である．ただし，λ_i は所得の限界効用を示すラグランジェ乗数であり，μ_i は生涯時間の限界効用を示すラグランジェ乗数である．これを c_i，t_{ci}，n_i，t_{wi} について一次条件を求め，かつ前出の二つの制約条件式を加えると，c_i^{*}，t_{ci}^{*}，n_i^{*}，t_{wi}^{*} を最適解として，

$$v'(t_{ci}^{*\varphi}\, c_i^{*(1-\varphi)})(1-\varphi)\, t_{ci}^{*\varphi}\, c_i^{*(-\varphi)} - \lambda_i = 0, \tag{7}$$

$$v'(t_{ci}^{*\varphi}\, c_i^{*(1-\varphi)})\, \varphi\, t_{ci}^{*(\varphi-1)}\, c_i^{*(1-\varphi)} - \mu_i = 0, \tag{8}$$

$$\alpha U_{i+1}^{*} \quad \mu_i \gamma - \lambda_i \beta = 0, \tag{9}$$

$$-\mu_i + \lambda_i w = 0, \tag{10}$$

$$T = t^*_{ci} + t^*_{wi} + \gamma n^*_i \,, \tag{11}$$

$$w\, t^*_{wi} = c^*_i + \beta n^*_i \,, \tag{12}$$

を得る．第(7)式は c_i の生涯効用に及ぼす限界便益（第一項）が，所得の限界効用（ラグランジェ乗数 λ_i）に等しいことが最適条件であることを意味する．第(8)式は t_{ci} の生涯効用に及ぼす限界便益（第一項）が，生涯時間の限界効用（ラグランジェ乗数 μ_i）と等しいことが最適条件であることを意味する．第(9)式は，$U_{i+1}{}^*$ が存在する限りで，n_i の王朝効用に及ぼす限界便益（第一項）が，生涯時間の限界効用と所得の限界効用との線形結合に等しいことを意味する．第(10)式は t_{wi} の変化に応じたラグランジェ乗数間の関係を与える．(11)式より，t_{ci}，n_i，t_{wi} の非負制約は，

$$\frac{T}{\gamma} > n^*_i$$

を意味する．

(7)－(10)式は，二つのラグランジェ変数を消去することによって，

$$(1-\varphi)\, t^*_{ci}\ \ w = \varphi\, c^*_i \,, \tag{13}$$

$$\alpha U^*_{i+1} - \left(\gamma w + \beta\right) v'(t^{*\varphi}_{ci}\, c^{*(1-\varphi)}_i)(1-\varphi)\, t^{*\varphi}_{ci}\, c^{*-\varphi}_i = 0 \,, \tag{14}$$

になる．(13)式は $t_{ci}{}^*$ と $c_i{}^*$ の比が一定であり，かつ w に依存していることを示す．(14)式は，子供一人増加すると手に入る便益（割引最適王朝効用）が，子供一人生産するための費用（$\gamma w+\beta$）に所得の限界効用を乗じたものに等しいことを意味する．

王朝的効用関数の再帰的関係に注目すると，

$$U^*_i = v\,(t^{*\varphi}_{ci}\, c^{*(1-\varphi)}_i) + \alpha n^*_i\, U^*_{i+1}$$

である．ところが，前に述べたように，Jones and Schoonbroodt (2010) の設定においては，状態変数は各期間とも一定であり，したがって，各期間は常に等しい生涯効用を持ち，その結果，等しい王朝効用[18]を持つと考えられる．つまり，定常状態にあると考えられる．すなわち，

$$U^*_i = U^*_{i+1}$$

である．これらの条件から，

$$U^*_{i+1} = \frac{v(\,t^{*\varphi}_{ci}\ c^{*(1-\varphi)}_i\,)}{1-\alpha n^*_i} \tag{15}$$

を得る[19]．$U_{i+1}{}^*$ は正であったから，これは，$U_{i+1}{}^*$ が存在するためには，

$$n^*_i < \frac{1}{\alpha} \tag{16}$$

でなければならないことを意味する．これ以上の子供の数 $n_i{}^*$ に対しては，王朝効用が発散してしまうのである．

(15)式を(14)式に代入し，かつ(13)式を代入すると，

$$\frac{\alpha}{1-\alpha n^*_i} - \frac{t^{*\varphi}_{ci}\, c^{*(1-\varphi)}_i v'(\,t^{*\varphi}_{ci}\, c^{*(1-\varphi)}_i\,)}{v(\,t^{*\varphi}_{ci}\, c^{*(1-\varphi)}_i\,)} \left(\gamma w + \beta\right)(1-\varphi)\,\frac{1}{c^*_i} = 0 \tag{17}$$

となる．(13)式と(17)式と2本の制約条件式から，最適解 $t_{ci}{}^*$，$n_i{}^*$，$t_{wi}{}^*$，$c_i{}^*$ を求めれば良い．

さて，ここで，Becker and Barro の元のモデルが前提したように，任意の非負の $c_i{}^{\phi}$，t_{ci} に対して生涯効用 $v(c_i{}^{\phi} t_{ci}{}^{(1-\phi)})$ の弾力性は一定と仮定しよう．この仮定は，資本がある場合には，定常状態が存在するための必要条件であり，マクロ経済学では標準的に採用される仮定である．すなわち，

$$\frac{t^{\varphi}_{ci}\, c^{1-\varphi}_i\ v'(\,t^{\varphi}_{ci}\, c^{1-\varphi}_i)}{v(\,t^{\varphi}_{ci}\, c^{1-\varphi}_i)} > 0$$

が定数であると仮定し，単に σ と表記し，

$$0 < \sigma < 1$$

と仮定する．

すると，(17)式は，

$$\frac{\alpha}{1-\alpha n_i^*}-\sigma\left(\gamma w+\beta\right)(1-\varphi)\frac{1}{c_i^*}=0$$

となる．これに(12)式を代入して，変形すると，

$$t_{ci}^*+\varphi\sigma\left(\frac{\gamma w+\beta}{w}\right)n_i^*=\frac{\varphi\sigma}{\alpha}\left(\frac{\gamma w+\beta}{w}\right) \qquad (18)$$

を得る．ここで，$\gamma w+\beta$ は子供一人を生産するための費用であり，w は生涯時間の機会費用であるから，

$$\left(\frac{\gamma w+\beta}{w}\right)$$

は生涯時間の機会費用 1 単位あたりの子供一人の生産費用であることに注意しよう．

以上から，最適解を求めると，

$$t_{ci}^*=\frac{\varphi\sigma}{1-\varphi\sigma}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\gamma w+\beta}{w}-T\right),$$

$$n_i^*=\frac{1}{\left(\frac{\gamma w+\beta}{w}\right)}\frac{T}{\left(1-\varphi\sigma\right)}-\frac{1}{\alpha}\frac{\varphi\sigma}{\left(1-\varphi\sigma\right)},$$

$$c_i^*=\frac{\sigma}{\alpha}(1-\varphi)\left(\gamma w+\beta\right)-\frac{\sigma(1-\varphi)wT}{1-\varphi\sigma}$$
$$+\frac{1}{\alpha}\frac{\varphi\sigma}{1-\varphi\sigma}\sigma(1-\varphi)\left(\gamma w+\beta\right),$$

$$t_{wi}^*=\frac{\sigma(1-\varphi)}{1-\varphi\sigma}\left\{\frac{1}{\alpha}\frac{\gamma w+\beta}{w}-T\right\},$$

となる．すると，

$$\frac{\partial n_i^*}{\partial w}=-\frac{T}{\left(1-\varphi\sigma\right)}\frac{\beta}{\left(\gamma w+\beta\right)^2}<0 \qquad (19)$$

に注意しておこう．(19)式から，n_i^* は w の単調減少関数になっている．

3．比較動学

(18)式を使って，比較動学をしてみよう．まず，賃金率 w が極めて大きい場合を考えよう．すると，

$$\lim_{w\to\infty}\frac{\gamma w+\beta}{w}=\gamma$$

であるから，(18)式は，

$$t_{ci}^*+\left(\varphi\sigma\gamma\right)n_i^*=\frac{\varphi\sigma\gamma}{\alpha}$$

となる．すると，子供の数として，

$$n_i^*=\frac{1}{(1-\sigma)}\left\{\frac{T}{\gamma}-\frac{\sigma}{\alpha}\right\}$$

を得る．ところが，(4)式の仮定から，

$$n_i^*=\frac{1}{(1-\sigma)}\left\{\frac{T}{\gamma}-\frac{\sigma}{\alpha}\right\}$$
$$<\frac{1}{(1-\sigma)}\left\{\frac{1}{\alpha}-\frac{\sigma}{\alpha}\right\}=\frac{1}{\alpha} \qquad (20)$$

を得る．

次に，賃金率 w が極めて小さい経済を考えよう．すると，

$$\frac{\gamma w+\beta}{w}\to\gamma+M\beta$$

である．ただし，M は巨大な正数である．すると，(18)式から，

$$n_i^*=\frac{1}{\alpha} \qquad (21)$$

である．これは前の(16)式から，子供の数 n_i が，とれる値の最大値である[20]．(20)式と(21)式を比較して，(21)式の方が n_i^* の値が大であることがわかる．

開発経済では賃金率が低く，そのため生涯時間の機会費用が低い．先進国経済では賃金率が高く，そのため生涯時間の機会費用が高い．すると，二つの制約条件式のうち，開発経済では予算制約式の重要度が高くなり，先進国経済では生涯時間制約式の重要度が高くなる．ここでの証明により，後者における子供の数は前者より大きいか

ら，結論として，開発経済では高い子供の数（そして人口成長率）が，先進国経済では低い子供の数（そして人口成長率）が成立することがわかる．つまり，私たちのモデルの範囲で，人口転換理論を説明できるのである．

私たちは生涯時間の制約式を元の Barro and Becker（1988）モデルに追加して，複雑化してしまった．このモデルの立場からは，Barro and Becker（1988）の元のモデルはどのように捕らえられるだろうか．私たちのモデルで特に，$\phi = 0$, $\gamma = 0$ とおいてみよう．すると，モデルは Jones and Schoonbroodt（2010）の仮定にしたがった場合の Barroand Becker（1988）モデルに一致する．なぜなら，このとき，

$$z_i = c_i^{\phi}\, t_{ci}^{(1-\phi)} = c_i$$

となるので，生涯効用 $v(z_i)$ は $v(c_i)$ となる．生涯時間制約式 $t_{ci} + t_{wi} + \gamma n_i = T$ は，

$$t_{wi} = T$$

となって，t_{wi} の選択の問題はなくなり，時間の制約式は消滅する．つまり，

$$c_i + \beta n_i = wT$$

の制約下で

$$U_i = v(c_i) + \alpha n_i\, U^*_{i+1}$$

を最大化する問題になる．これは Jones and Schoonbroodt（2010）の設定下での，Barroand Becker（1988）モデルに他ならない．こうして見ると，Barro and Becker（1988）モデルとは，生涯時間制約式を導入せず，賃金率の低い開発経済を念頭にしたモデルであることがわかる．

4．結語

本論文の結論はもとより不完全なものである．Jones and Schoonbroodt（2010）の設定により，二つの賃金率に対応するそれぞれの定常解における子供の数を求めたにすぎず，二つの定常状態の間の変化は論じていない．しかし，賃金率の相違が，当初の予算制約式の重要性から後の生涯時間の制約の重要性への変化をもたらし，これが当初の高い人口成長率から低い人口成長率への変化へ導いたかの主因である，とする議論に一端の合理化を与えたと考えられる．これは Becker の静学的人口論と同様の結論を，動学に拡張するものと解釈できる．とりわけ重要な点は，最適成長論が前提した整合的な利他主義の仮定の下で，上記事実を説明し得た点が，既存のモデルとの相違点である．

本来は内生的経済成長自体をモデルの中に取り込んで二つの定常状態を比較すべきであろう．しかし，Barro and Becker（1988）モデルの「子供への利他主義が規模に関して逓減的でないかぎり，子供の数への最適解がない」との議論に明確な答えがない現在の状況では，定常状態の分析に限るのが最適と考えられる．この点が，惜しまれるが，兎にも角にも最善をつくして研究の方向を示し得たのではないか．

付記

目的関数

$$U_i = v(c_i) + \alpha n_i^{1-\varepsilon}\, U^*_{i+1}$$

において，$\varepsilon = 0$ が本文の場合であり，$\varepsilon > 0$ が Barro and Becker（1988）の場合である．$\varepsilon > 0$ の場合には，ラグランジェアンは，

$$\mathcal{L}_i = v(c_i) + \alpha n_i^{1-\varepsilon}\, U^*_{i+1} + \lambda_i\,(wT - c_i - \beta n_i).$$

これを n_i^* で偏微分すると，

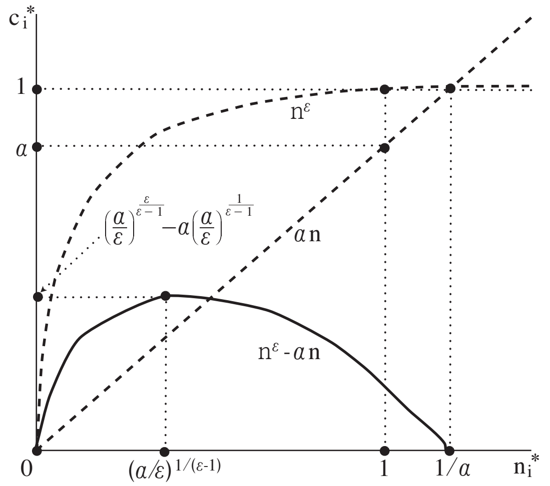
$$(1-\varepsilon)\,\alpha n_i^{*-\varepsilon}\, U^*_{i+1} - \lambda_i \beta = 0.$$

これから，$U_i^* = U_{i+1}^*$ なので，$n_i^* = n_{i+1}^*$ とすると，

$$c_i^* = \sigma(\gamma w + \beta)\frac{(1-\varphi)}{(1-\varepsilon)\alpha}\left(n_i^{*\varepsilon} - \alpha n_i^*\right)$$

となる．ここで，$\varepsilon > 0$ に対して，$n_i^{*\varepsilon} - \alpha n_i^*$ の図

図 1.



出所）筆者作成.

を描くと，図 1 のようになる．つまり，$0 \leqq n_i^* \leqq 1/\alpha$ の範囲では，$0 \leqq c_i^* < \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}-\alpha\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon-1}}$ に対して，一つの c_i^* に二つの n_i^* が対応してしまう．

なお，ここの，二つの n_i^* が一つの c_i^* に対応してしまうという結論は，生涯時間制約式を除いたモデルについて示したが，生涯時間制約式を追加したモデルでも全く同じ論理によって，成立する．

注

1）本研究は日本大学経済学部経済科学研究所の長期プロジェクトとしてなされた．経済科学研究所からの資金援助に対して謝辞を述べたい．
Research conducted thanks to the grant “Collaborative Research（A）, Research Institute of Economic Science”.

2）kanaya@mac.com.

3）順に見ると，まず，第一は Becker（1991）の人口に関する著作である．ベッカーはミクロ経済学の比較静学の手法を用いて，なぜ経済成長にともなって，人口増加率の減少と人的資本の蓄積が同時に進むのか，分析した．すなわち，親が子供に対して愛情を持つことを利他主義と呼ぶが，彼の議論によれば，利他主義がある場合には，親にとって子供を持つのは，耐久資本財を持つのと何も違わない．したがって，子供の数と他の財との間には，親は通常の無差別曲線が引ける．その財の量が子供の数に比例する場合には，その財の量と子供の数との間の予算制約線は原点に対して凸な形になる．後者が，ベッカーの展開した質と量の経済学が指摘する点である．この場合には，些少の予算の増加が多大な財の量の増加と減少した子供の数に結びつく．ところが，この際の「子供の数に比例する財」の一つとして，子供の人的資本形成が上げられる．ゆえに，経済成長にともなって，人的資本の増加と子供の数の減少が同時に起きる事になる．この議論の結果，子育ての費用が人口成長の重大な要因であるとの認識が一般に浸透し，これらの業績はベッカーがノーベル賞を受賞する際の大きな要素になった．第二が，王朝モデルである．

第三に，Galor and Weil（2000）の提唱した「統一的成長理論」がある．最初のベッカーの静学理論，および第二の王朝モデルは，経済成長にともなって人口成長率が減少する，あるいは一定になる，ことは説明しうるものの，産業革命期の当初に人口成長率がまず増加し，後に減少に転じた事実を説明することはできない．人口成長率が減少する，あるいは一定である，だけしか説明できないのである．これに対して，統一的成長理論は一つの統一的なモデルで，まず人口成長率が増加し，やがて減少する過程を説明できる．すなわち，人口転換理論を説明すると主張できる．この点は，統一的成長理論のすぐれた点ではあるが，疑問点も多々存在する．一番の問題点は目的関数における利他主義が整合的に定義されていない重複世代モデルである点である．このために，モデルは時間整合的でなくなっている．重複世代モデルは，利他主義が整合的に定義されているか，いないかによっ

て，その含意の経済学的正しさに多いに差を来す，というのが，経済学者の間の多数説と言える．この意味で，統一的成長理論は正統的な最適成長論とは相容れない．また，実際のモデルの妥当性についても，経済史家は疑問を投げかけている．これについては，Mokyr and Voth（2010）参照.

4）「理論」と言う名称で呼ばれているが，実態は経験則である．少なくとも経済理論ではない.

5） Chenaisis（1992）参照.

6） ただし，産業革命が人口転換の原因であるのか，あるいは人口転換がおきたので産業革命が起きたのかについてはまだ定説がない．Alter and Clark（2010）参照.

7） この場合でも，バブルによって，非定常解が解となる可能性がないわけではない．しかし，その場合でも定常解も解の最適条件を満たすことが普通である．本論文はバブルについては議論しない.

8） この論文の付記を参照されたい.

9） Barro and Becker（1989）も簡略化してみると，このモデルの特殊ケースであることが示される.

10）男性と女性との結婚の問題はこの論文においては無視し，一人の個人が子供を持つと仮定する.

11）Barro and Becker（1989）モデルでは，この王朝効用の再帰的な定義を生涯効用の無限級数に展開して解を求めている.

12）commodity と呼ばれる.

13）近年，一部の産物のみに家計生産を認め，残りの産物では家計生産を認めないという傾向があるが，ここでは Becker（1965）の議論に立ち返って，すべての産物に家計生産が適用されるとする.

14）現実では，n は人口成長率であって，出生率とは必ずしも等しくないことに注意しておこう．幼児死亡率が正である現実の世界では，この両者に大きな乖離が生まれる．この論文の最後に述べられるように，経済が十分成長しきった先進国経済の人口成長率こそ，γ に従って人口が成長する．そこで，米国経済など先進国経済を念頭におく．大体1世代間で，T/γ が5程度とすると，割引率 α が20％以下となる．1世代の長さが30年とすると，これは年率5％程度の割引率を意味する.

15）Barro and Becker（1989）モデルの議論に従って，β は直接に子供一人を生産するための費用であり，人的資本への投資は含まないとする.

16）私たちは賃金率 w が各期を通じて一定の場合のみをこの論文において考える．これは，この経済が技術革新のない，小国の経済モデルを考慮の対象としていると解釈することも可能である.

17）実は，技術革新が存在すると仮定すれば，賃金率 w は時間とともに増加し，v も増加する．この場合，U は定常状態にはならない．だが，その場合も技術革新が一定率で起きれば，U の値を求めることができる．私たちはこの論文では，簡単化のために技術革新は捨象する．同様に，β も一定の増加率を仮定すれば，U は一定速度で成長することを示されるが，このケースも本論文では簡単化のために捨象する.

18）私たちはこの論文では，王朝効用の解がバブルになり，発散する可能性は考慮しない.

19）この王朝効用の再帰的性質に着目して解を求める方法は，定常状態の上では，王朝効用を生涯効用の無限級数に展開して解を求める方法と等価であることは，等比級数の公式から明らかである.

20）なお，実際には，賃金率は小さいながら正であるので，この極限が達成されることはない.

参考文献

Alter, G. and G. Clark（2010）“Chapter 2: The Demographic Transition and Human Capital,” in *The Cambridge Economic History of Modern Europe, Vol.1*, edited by Stephen Broadway and Kevin H. O’Rourke, Cambridge University Press.

Barro, R. J. and G. S. Becker（1989）“Fertility Choice in a Model of Economic Growth,” *Econometrica*, 57, pp.481-501.

Becker, G. S.（1965）“A Theory of the Allocation of Time,” *Economic Journal,* 75, pp.493-517.

———（1991）*A Treatise on the Family,* Cambridge, Harvard University Press.

Becker, G. S. and R. J. Barro（1988）“A Reformulation of the Economic Theory of Fertility,” *Quarterly Journal of Economics,* 103, pp.1-25.

Chenaisis, J.（1992）*The Demographic Transition,* Oxford University Press.

Galor, O. and D. N. Weil（2000）“Population, Technology, and Growth: From Malthusian Stagnation to the Demographic Transition and Beyond,” *American Economic Review,* 90, pp.806-828.

Jones, L. E. and A. Schoonbroodt（2010）“Complements versus Substitutes and Trends in Fertility Choice in Dynamic Models,” *International Economic Review,* 51, pp.671-699.

Mokyr, J. and H. Voth（2010）“Chapter 1: Understanding Growth in Europe, 1700-1870: Theory and Evidence,” *in The Cambridge Economic History of Modern Europe,* Vol. 1, edited by S. Broadway and K. H. O’Rourke, Cambridge University Press.