粘着的な長期利子率のある景気循環モデルと金融政策
—ケインズの正常逆鞘からの検討—

大　内　雅　浩

1．はじめに

周知のように利子率の期間構造理論に関する純粋期待仮説は，残存期間 n 年物の長期利回り（yield）i_L が各期における 1 年物の短期利回り（yield）i の平均になるという仮説である（$i_L = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} i_{t+j-1}$）．それゆえ，将来の短期利子率が一定であるケースでは，純粋期待仮説は短期利子率と長期利子率の水準が一定になり，イールドカーブ（yield curve）が水平になる．その仮説の拡張版であるヒックスの流動性選好仮説は，残存期間ないしは満期が長い債券での資金調達の場合に投資家が流動性を犠牲にすることから，十分なプレミアムを投資家に支払わなければならないとする仮説である．それゆえ，将来の短期利子率が一定になる単純なケースでさえ流動性を犠牲にする報酬としてプレミアム ρ が追加されるので長期利子率は短期利子率よりも高くなり，つまり，イールドカーブが右上がり（順イールドカーブ）になる（$i_L = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} i_{t+j-1}+\rho$）．

本稿では，ファイナンス理論やケインズが先物市場で先物価格が将来の直物価格の期待値を下回ることを主張した「正常逆鞘」を利用し，イールドカーブの右上がりを示すことで不明瞭な（リスク）プレミアムの意味が少しでも明らかになるだろう．現実には現在の短期利子率を変更させる金融調節はリスクプレミアムの介在によって必ずしも長期利子率を迅速に動かせないことがある．そこで，本稿の主要な目的は，景気循環モデルに粘着的な長期利子率を導入することによって，均衡の不安定性や景気安定化政策（いくつかの金融パラメータからなる「金融政策プログラム」）を分析することである．ここでは，景気循環を内生的に発生させるような単純な 2 変数からなる Kaldor 型モデルで考えていく．また，リスクプレミアムについての考察については，議論を簡単にするために株式市場経済を考える．したがって，資本提供者が企業に要求する資本コストは株式の期待要求収益率（株主資本コスト）に一致することになる．

本稿は以下の節から構成される．第 2 節では，CAPM（資本資産評価モデル）によるリスクプレミアムとケインズの正常逆鞘の視点から順イールドカーブを導出し，粘着的な長期利子率のモデル化を検討する．第 3 節では，粘着的な長期利子率を導入した Kaldor 型モデルによって，システムの安定性と「金融政策プログラム」による景気安定化政策を分析する．そして，最終節で本稿の結論と付録が示される．

2．リスクプレミアムと長期利子率の粘着性

2.1　ケインズの正常逆鞘（ノーマル・バックワーデーション）と順イールドカーブ

この項では，先物価格の相場は将来の直物価格より低くなるというケインズの正常逆鞘をファイナンス理論（資本資産評価モデル：CAPM）の視点から導出する．CAPM は株式のリスクプレミ

アムを理論的に評価するモデルである．この理論のリスクプレミアムとは企業や事業活動に伴うユニークなリスクを引き受けることへの報酬ではなく，市場リスク（システマティック・リスク）のみに与えられる報酬のことであり，CAPMの主要な結論となっている．正常逆鞘の理論的な解釈の研究はDusak（1973）が挙げられる[1]．この研究を参考にして，ヒックスの流動性仮説を再解釈した順イールドカーブを導出しよう．資産の直物価格 S_t で購入した資産を将来の $E_t(S_{t+1})$ で売却できると予想するならば，このときの株式 i の期待要求収益率 μ_{ri} は以下のように定義できる．

$$\mu_{ri} \equiv \frac{E_t(S_{t+1})}{S_t} - 1, \tag{1}$$

E_t（・）は時点 t の期待値演算子である．この（1）式の μ_{ri} は資本資産評価モデル（CAPM: capital asset pricing model）によってリスクを評価して計算できる（CAPMの概要は付録1を参照）．

$$\frac{E_t(S_{t+1})}{S_t} - 1 = r_f + (\mu_M - r_f)\,\beta_i. \tag{2}$$

ただし，r_f：無リスク資産の利子率である．右辺第2項がリスクプレミアム（システマティック・リスク）を表している．無リスク利子率に上乗せされるリスクプレミアムの部分は，個別株式の期待要求収益率 μ_{ri} と市場全体の期待要求収益率 μ_M がどれほど連動するかどうかで表したリスク β_i（本稿では、単に「市場相関リスク」と称する）に対して，すべての株式に共通の定数 $\mu_M - r_f$（β_i に対する傾き「リスクの価格」と一般に呼ばれる）を掛けたものである．その市場相関リスク β_i はCAPMで $\frac{Cov(\mu_{ri}, \mu_M)}{\sigma^2_{\mu_M}}$ と定義されているが以下のように計算を展開していこう．ただし $Cov(\mu_{ri}, \mu_M)$ は μ_{ri} と μ_M の共分散，$\sigma^2_{\mu_M}$ は μ_M の分散である．

$$\beta_i \equiv \frac{Cov\left(\frac{E_t(S_{t+1})}{S_t} - 1, \mu_M\right)}{\sigma^2_{\mu_M}} = \frac{Cov(E_t(S_{t+1}), \mu_M)}{S_t \sigma^2_{\mu_M}}. \tag{3}$$

この（3）式を（2）式に代入して S_t で解けば，

$$S_t = \frac{1}{1 + r_f}\left\{E_t(S_{t+1}) - (\mu_M - r_f)\frac{Cov(E_t(S_{t+1}), \mu_M)}{\sigma^2_{\mu_M}}\right\}, \tag{4}$$

となる．これは無リスク利子率 r_f で割引いた現在価値（$E_t(S_{t+1})/(1+r_f)$）を将来の価格変動リスクで評価し直した現在価格式である．ところで，t 時点における，先物価格 $F_{t+1,t}$ と直物価格 S_t の関には無裁定条件が成立すると仮定する[2]．

$$S_t(1 + r_f) = F_{t+1,t}. \tag{5}$$

これを（4）式に代入して $F_{t+1,t}$ について解くと，

$$\therefore F_{t+1,t} = E_t(S_{t+1}) - (\mu_M - r_f)\frac{Cov(E_t(S_{t+1}), \mu_M)}{\sigma^2_{\mu_M}}, \tag{6}$$

を得る．この式は，ケインズが先物価格の相場が将来の直物価格の期待値より少なくとも低くなることを主張した「正常逆鞘」（ノーマル・バックワーデーション：normal back-wardation）の一つの数学的解釈である[3) 4) 5)]．この逆鞘現象が先物を買い建てて利益を得る投機家をひきつけ，先物を売り建てて危険を回避する商品生産者のような需要を満足させることになる．（6）式を不等号関係で表しておこう．

$$F_{t+1,t} < E_t(S_{t+1}). \tag{7}$$

それによって，利回りと資産価格の逆の関係によって，利子率に関する「正常逆鞘」も成立する．

$$\therefore i_{f\,t+1,t} > E_t(i_{t+1}) \tag{8}$$

そこで，ある n 年間，t 時点で将来の1年物短期利子率を先物短期利子率 i_f によって決めておけば，長期利子率 i_L は利子率の期間構造理論による次の裁定式で表される．

$$i_L = \frac{1}{n}(i_t + i_{f\,t+1,t} + \cdots + i_{f\,t+n-1,t}). \tag{9}$$

右上がりのイールドカーブ（順イールド）を導出するためには2年物債券の例で考えれば十分であろう．残存期間（満期）2年の式は $i_L = (1/2)(i_t + i_{ft+1,t})$ である．この式に正常逆鞘の関係（8）を考慮すれば $i_L > (1/2)(i_t + E_t(i_{t+1}))$ が得られる．簡単に $E_t(i_{t+1}) = i_t$ のケース，すなわち期待短期

利子率が現在の短期利子率と同水準であることが予想されているとしよう[6]．これを代入すれば，金融市場で多く観察される通常の順イールドの関係を得る．

$$i_L > i_t. \qquad (10)$$

2.2　ケインズの要求収益率について

ここでは，本稿が想定したリスクとケインズのリスク（危険）を比較検討してみよう．企業者の投資量（資本資産の購入）に影響を及ぼす割引率（要求収益率）について，ケインズが記しているのは一般理論の第 11 章（Keynes（1936））である．ここで企業者は借手とも呼ぶ．かりに事業資金を国債などの安全資産で運用する場合には無リスクで標準的な純粋利子率を得ることができる．しかし，借手（企業者）が自分の資金を危険にさらして危険を伴う事業に投資する場合には要求する予想収益を現実に獲得できるかどうか分からない．したがって，「借手（企業者）の危険プレミアム」は安全資産で獲得できる純粋利子率を超えるだけの企業者自らのプレミアムである．「貸手の危険プレミアム」は借手の債務不履行に対するプレミアムである．したがって，ケインズは，資本の限界効率と比較するべき要求収益率は，標準的な純粋利子率＋借手（企業者）の危険プレミアム＋貸手の危険プレミアムとした．さらに，ケインズはこれらの二つの危険が連動することによって貸手の危険プレミアムが借手のプレミアムの一部を重複していることを記している[7]．景気変動等で借手の危険プレミアムが増大したときには債務不履行の危険が増すことになることから，貸手の危険プレミアムも連動し増大するという洞察は論理的である．このとき，借手と貸手のプレミアムは一部二重計算されるので全体の要求収益率は急上昇することになる．以上の検討から，「借手のリスクプレミアム」は本稿では直接的に対象外であるように思われる．しかしながら，借手（企業者）が市場経済で事業をしている以上，貸手は市場の動きとともに借手が抱くリスクの変化をある程度同一視しているだろう．したがって，本稿ではケインズの「借手のリスクプレミアム」を全く考慮していないわけではない．なぜならば，景気変動等の「市場相関リスク」（システマティック・リスク）のみが期待収益として要求されるというのがCAPM の一つの結論だからである[8]．

2.3　粘着的長期利子率のモデル化

本項では，景気循環モデルで扱う長期利子率について考える．利子率の正常逆鞘（8）式の乖離分はリスクプレミアムであることから $\tilde{\beta}$ という記号で表しておくと，

$$i_f = E(i) + \tilde{\beta}, \qquad (11)$$

のように書ける．この $\tilde{\beta}$ は景気変動等のシステマティック・リスクを反映している．これは CAPM を用いた（6）式の導出過程からも明らかである．したがって，潜在生産量 Y^* より現実の生産量 Y が小さい（大きい）ときにはリスクプレミアムが上昇（減少）すると考えられる．したがって，以下のようなリスクプレミアムの変動式を仮定する．

$$\tilde{\beta} = \phi\beta(Y^* - Y)\,;\, 0 \leqq \phi \leqq 1,\ \beta > 0. \qquad (12)$$

ただし，ϕ はリスクプレミアムを減ずる政策変数である．例えば，金融市場における信用秩序維持のマクロ金融安定化策（「プルーデンス政策」）が挙げられる．その種の政策を何もしない場合には $\phi = 1$ とする．β は調整速度である．

ところで，短期利子率は以下の式のように中央銀行が景気に対して循環的な金利政策（テーラー・ルール）を行なうと仮定しよう[9]．

$$i = i_0 + \eta(Y - Y^*) \geqq 0\,;\, i_0 > 0,\ \eta > 0. \qquad (13)$$

ただし，i_0：均衡短期名目利子率，η：調整速度である．

景気変動に対応したイールドカーブの変動のイメージを図で説明しておこう．経済が潜在生産量 Y^* を超えているとき $(Y^* < Y)$，短期利子率が上昇し長期利子率の上昇は抑制されるのでイールドカーブの傾きは緩やかになる．反対に経済が潜在産出量 Y^* を下回るとき $(Y < Y^*)$，短期利子率が低

下し長期利子率の低下は抑制されるのでイールドカーブの傾きは急になる（**図1**参照）.

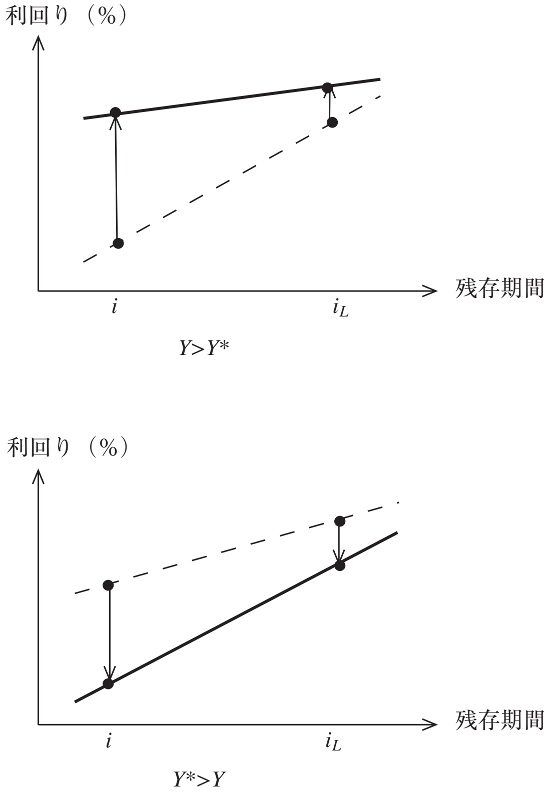
そこで，現在の短期利子率と将来に履行される先物利子率に影響を与える金融政策を考慮して，利子率の期間構造の（9）式を以下のように近似して書き表すことができると仮定する.

$$i_L = \bar{\mu}\,(\theta_1 i + \theta_2 i_f) > 0\,;\ \bar{\mu} = const,\ \theta_1 > 0,\ \theta_2 > 0. \quad (14)$$

ただし，$\bar{\mu}$は長期利子率の値として，現実的な値を与える平均パラメーターで一定とする．θ_1は現在の短期利子率の調節に政府・金融当局が重みをおくかどうかを表す金融政策パラメーターであり，θ_2は将来の利子率に影響を与えることに政府・金融当局が重みをおくかどうかを表す金融政策パラメーターである[10].

以上から，長期利子率（14）に（11）式，（12）式，（13）式を代入し，前項と同様に単純に

図1



出所）筆者作成.

$E_t(i_{t+1}) = i_t$を想定すれば以下の式を得る.

$$i_L = \bar{\mu}\,[(\theta_1 + \theta_2)\{i_0 + \eta(Y - Y^*) + \theta_2\phi\beta(Y^* - Y)\}]\ or$$
$$= \bar{\mu}\,[(\theta_1 + \theta_2)i_0 + \{\eta\theta_1 + (\eta - \phi\beta)\,\theta_2\}\,(Y - Y^*)]. \quad (15)$$

3. 粘着的長期利子率のKaldor型景気循環モデルへの適用

3.1　モデル

この節では本稿で想定する順イールドカーブの動きをKaldor型の景気循環モデルに導入する．想定するイールドカーブは循環的な短期金利政策と反循環的なリスクプレミアムの相反する2つの効果をもつことから粘着的な長期利子率を備えることになった．以下で示す本稿のモデルは，通常のKaldor型の仮定を前提とした，いわゆるKaldor型モデルである[11]．したがって，本稿で検討される金融政策の違いによっては，大域的安定性や極限閉軌道の各ケースの結論に達するだろう．ここでの目的は，長期利子率の粘着性がシステム（16）の不安定性を増大させるときに，以下本稿で称する「金融政策プログラム」による安定化政策を理論的に検討することにある．通常，Kaldor型モデルは2変数の微分方程式体系で表現されている．本稿モデルも結論から言えば，粘着的な長期利子率を組み入れたとしても以下のような単純な2変数の体系で表現されている.

$$\left.\begin{aligned}
&[1]\ \dot{Y} = \alpha\left[C(Y) + I(Y, K, i_L) + \bar{G} - Y\right];\ \alpha > 0\\
&\qquad \equiv F_1(Y, K),\\
&[2]\ \dot{K} = I(Y, K, i_L)\\
&\qquad \equiv F_2(Y, K),\\
&\text{ただし，}\ i_L = \bar{\mu}\,[(\theta_1 + \theta_2)\{i_0 + \eta\,(Y - Y^*)\\
&\qquad + \theta_2\phi\beta(Y^* - Y)\}].
\end{aligned}\right\} (16)$$

［1］式はケインジアンの財市場における数量調整過程を表した微分方程式である．ドット記号（・）は時間に関する微分記号を表している．αは財市場の数量調整速度，Yは現実の生産水準

（所得水準）である．$C(Y)$ はケインズ型の消費関数で Y の増加関数 ($0<C_Y\equiv\partial C/\partial Y<1$) である．$I(Y,K)$ はカルドア型の投資関数ある．投資は生産量 Y（企業利潤と正に動くと仮定）の増加関数 ($I_Y\equiv\partial I/\partial Y>0$) であり，資本ストック K の減少関数 ($I_K\equiv\partial I/\partial K<0$) となっている．本稿では，Kaldor（1940）の想定とは異なるが利子率（「粘着的な」長期利子率（15）式）の存在による投資の変動も考えている[12]．ただし，それは長期利子率の減少関数 ($I_{iL}\equiv\partial I/\partial_{iL}<0$) である．$\bar{G}$ は政府支出で一定とする．（16）の［2］式は資本蓄積方程式である．この方程式の部品は［1］式と同じ投資関数である．

このような Kaldor 型モデルの要点は，非線形の投資関数の存在にある．その形はある経済の中間に位置する生産水準 Y^* が基準となる．$Y<Y^*(Y^*<Y)$ のとき $I_{YY}\equiv\partial^2 I/\partial Y^2>0\,(<0)$ が想定される[13]．そこで Kaldor 型モデルの仮定は以下のようなものである．

Kaldor 型モデルの仮定：

生産水準 Y^* の中間領域では，生産量 Y に対する限界投資支出が限界貯蓄性向より大きい．すなわち，$I_Y+I_{iL}\bar{\mu}\{\eta\theta_1+(\eta-\phi\beta)\theta_2\}>1-C_Y$ が成立する．十分小さい Y と十分大きい Y の領域では，生産量 Y に対する限界投資支出は限界貯蓄性向より小さい．すなわち，$I_Y+I_{iL}\bar{\mu}\{\eta\theta_1+(\eta-\phi\beta)\theta_2\}<1-C_Y$ が成立する．また，投資 I および生産量 $Y\geqq 0$ に対する限界投資支出はともに正である．すなわち，$I>0$，$I_Y+I_{iL}\bar{\mu}\{\eta\theta_1+(\eta-\phi\beta)\theta_2\}>0$.

3.2　安定性分析

均衡点における動学的性質を分析する．体系（16）を均衡点で評価したヤコビ行列 J は以下のようになる．

$$\mathrm{J}\ \equiv\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22}\end{bmatrix} \tag{17}$$

ただし，

$$F_{11}=\alpha[(C_Y-1)+I_Y+I_{i_L}\bar{\mu}\{\eta\theta_1+(\eta-\phi\beta)\theta_2\}],$$
$$F_{12}=\alpha I_K<0,$$
$$F_{21}=I_Y+I_{i_L}\bar{\mu}\{\eta\theta_1+(\eta-\phi\beta)\theta_2\}>0,\ F_{22}=I_K<0.$$

したがって，2 変数の微分方程式体系における均衡点が小域的に安定となる必要十分条件は，ヤコビ行列 J の対角要素の和 ($tr\mathrm{J}=F_{11}+F_{22}$) が負で，かつ行列式 ($\det\mathrm{J}=F_{11}F_{22}-F_{12}F_{21}$) が正になるときである．

$$tr\,\mathrm{J}=\alpha[(C_Y-1)+I_Y+I_{i_L}\bar{\mu}\{\eta\theta_1+(\eta-\phi\beta)\theta_2\}]+I_K$$
$$=\alpha\left[(\underset{-}{C_Y}-1)+\underset{+}{F_{21}}\right]+\underset{-}{I_K}\lesseqqgtr 0, \tag{18}$$

$$\det\mathrm{J}=\alpha[(C_Y-1)+I_Y+I_{i_L}\bar{\mu}\{\eta\theta_1+(\eta-\phi\beta)\theta_2\}]I_K$$
$$-\alpha I_K[I_Y+I_{i_L}\bar{\mu}\{\eta\theta_1+(\eta-\phi\beta)\theta_2\}]$$
$$=\alpha(C_Y-1)I_K+\alpha A-\alpha A$$
$$=\alpha(\underset{-}{C_Y}-1)\underset{-}{I_K}>0. \tag{19}$$

ただし，$\alpha I_K[I_Y+I_{iL}\bar{\mu}\{\eta\theta_1+(\eta-\phi\beta)\theta_2\}]\equiv A$ で表記した．この計算から trJ の符号次第で動学的安定性が変わることが分かる．

ケース 1：$tr\mathrm{J}<0$，すなわち，

$$\eta\theta_1+(\eta-\phi\beta)\theta_2>\frac{(1-C_Y)-\frac{I_K}{\alpha}-I_Y}{I_{i_L}\bar{\mu}}.$$

ケース 2：$tr\mathrm{J}>0$，すなわち，

$$\eta\theta_1+(\eta-\phi\beta)\theta_2<\frac{(1-C_Y)-\frac{I_K}{\alpha}-I_Y}{I_{i_L}\bar{\mu}}.$$

これらのケースを検討する前に，粘着的な長期利子率の式（15）における $\eta\theta_1+(\eta-\phi\beta)\theta_2$ の部分を Q とおいておく．すなわち，

$$Q\equiv\eta\theta_1+(\eta-\phi\beta)\theta_2;$$
$$\eta>0,\theta_1>0,\theta_2>0,0\leqq\phi\leqq 1,\beta>0. \tag{20}$$

この Q は粘着的な長期利子率に対する政府・中央銀行の一連の以下の金融政策パラメーターを含んでいる．すなわち，η（テーラー・ルールによる短期名目利子率 i の調整速度），θ_1（Tailor ルールによる現在の短期利子率調節に重みをおくパラメーター），θ_2（将来の利子率に影響を与えることに重みをおくパラメーター；例：時間軸政策），

ϕ（信用秩序維持政策ないしはプルーデンス政策パラメーター）である．したがって，我々はこのQを景気に対する「金融政策プログラム」と呼んでおこう．

ケース１と**ケース２**から明らかなように，α（財市場の調整速度）も安定性のための条件である．ここでは「金融政策プログラムQ」の動きを特に検討するので，αは安定性を大きく左右する程度ではない現実的な小さい値であると初めから仮定しておく．

ここで，ヤコビ行列Jのトレース$(tr\mathrm{J})$の符号が切り替わる$(tr\mathrm{J}=0)$のような「金融政策プログラム」をQ_Hと書いておこう．ゆえに，以下の安定性に関する対応関係が成立する．

$Q \lesseqgtr Q_H \Longleftrightarrow tr\mathrm{J} \gtreqless 0$　（複号同順）　（21）

ケース１に関しては，カルドア型モデルの性質によってこの2変数の微分方程式体系の一意的な均衡点が大域的に安定となる．そのための追加の判別条件として，R^2内のすべての点(Y, K)において，$F_{11}F_{22} \neq 0$が成立するか，あるいは，R^2内のすべての状態変数の点(Y, K)において，$F_{12}F_{21} \neq 0$が成立しなければならないという「Oleckの定理」の十分条件が知られている（詳しくはGandolfo（2009）21章を参照）．明らかに$F_{12}F_{21} \neq 0$であるのでケース1の均衡点は大域的安定である．

命題１：非負象限R^2_+内のすべての点(Y, K)おいて，$Q>Q_H$が成立していると仮定する．ここで，非負象限R^2_+内のすべての点(Y, K)おいて，$\det\mathrm{J}>0$，$F_{12}F_{21} \neq 0$が成立している．そのとき，均衡点は大域的安定となる．

ケース２に関しては，**仮定**による性質から，均衡点のまわりに閉軌道が存在し，均衡点以外の点から出発した解が必ず閉軌道のうちの1個（極限閉軌道：limit cycle）に収束することが確認される．この極限閉軌道の存在について，2変数体系のみに適用できる「ポアンカレ＝ベンディクソンの定理：Poincaré-Bendixson theorem」の判定法（十分条件）で確かめておこう．

ポアンカレ＝ベンディクソンの定理：R^2におけるC^1級動学システム体系の均衡を含まない非空かつコンパクトな極限集合は閉軌道である（説明・証明に関してGandolfo（2009）23章，Hirsch and Smale（1974）11章，Lorenz（1993）2章を参照）．

命題２：$Q<Q_H$ならば，非負象限R^2_+の$Y-K$平面に少なくとも1個の閉軌道が存在する．また，均衡点以外の（16）体系の点は必ずその少なくとも1個の閉軌道に収束する．

証明：付録2を参照．

ここで，小域的な解の振る舞いとして振動（循環）の有無について付言しておこう．（16）体系の特性方程式$\lambda^2-(tr\mathrm{J})+\det\mathrm{J}=0$における解が共役複素根をもてば循環運動が発生する．2次の特性方程式の判別式Δが負となるケースは以下のようになる．

$$\begin{aligned}\Delta &= (tr\mathrm{J})^2 - 4\det \mathrm{J} < 0\\ &= [\alpha\{(C_Y-1)+I_Y+I_{i_L}\bar{\mu}Q_\Delta+I_K^2\}]^2\\ &\quad -4\alpha(C_Y-1)I_K<0. \qquad (22)\end{aligned}$$

ただし，$Q \equiv \eta\theta_1+(\eta-\phi\beta)\theta_2$を$Q_\Delta$と表しておく．上式を整理すれば以下のような関係が成り立つことが分かる．ただし$tr\mathrm{J}=0$であるときの$Q_H \equiv \{(1-C_Y)-\frac{I_K}{\alpha}-I_Y\}/I_{i_L}\bar{\mu}(\gtreqless 0)$を考慮すれば，以下の大小関係が成立している．

$$Q_\Delta > \frac{4\{\alpha(C_Y-1)I_K\}^{\frac{1}{2}}}{\underset{(-)}{I_{i_L}\bar{\mu}}} + \underset{(?)}{Q_H}. \qquad (23)$$

したがって，$Q_\Delta \lesseqgtr Q_H$の不等号関係は不確定であり振動が発生する領域は明らかではないが，システムが不安定である場合のみか，安定・不安定の両方の場合に振動が発生する．

3.3　金融政策プログラムと安定性について

前項では「金融政策プログラム」と本稿で名づけたQの内容について明らかではなかったが，ここではシステムが不安定である場合の有効な金融政策について具体的に検討する．本稿ではリスクプレミアム$\tilde{\beta}$の変動式（(12）式）によって長期利子率の粘着性を与えた．生産量Yの増加に対する限界投資支出$(I_Y + I_{iL}\bar{u}\{\eta\theta_1 + (\eta - \phi\beta)\theta_2)$は**仮定**により正であるが，その大きさ（傾き）がある程度小さく抑制されなければ，trJが正となってシステムの不安定性は解消されなくなる．そこで，景気変動に反応するリスクプレミアムの調整速度βについて考える．

議論を単純にするために，再度，前項と同じ以下の**ケース１（安定）**と**ケース２（不安定）**を振り返る．同じくQ_Hは不安定が安定に切り替わるような det J = 0 となる点である．

ケース１（安定）：trJ<0，すなわち，

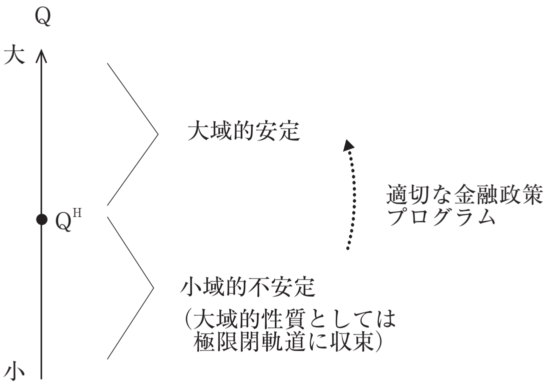
$$Q \equiv \eta\theta_1 + (\eta - \phi\beta)\theta_2 > Q_H.$$

ケース２（不安定）：trJ>0，すなわち，

$$Q \equiv \eta\theta_1 + (\eta - \phi\beta)\theta_2 < Q_H.$$

最初は**ケース１**の安定的な状態とする．ここで，リスクプレミアムについての調整速度βが連続的に十分に大きくなっていき，**ケース２**の不安定の状態に切り替わったとしよう．ただし，そのとき，「金融政策プログラムQ」の各政策パラメーター（η，θ_1，θ_2，ϕ）は所与とする．ここで「金融政策プログラムQ」を変更して再び**ケース１**のような安定的な状態に回帰するためには，以下にある金融政策プログラムのリストの組合せを検討し，適切に実行する必要があることがわかる（**図２**も参照）．例えば，βが十分に大きく**ケース２**である場合には，ϕを十分に小さくし，θ_1かθ_2のどちらかか，あるいは，両方を十分に大きくするプログラムが有効である．ただし，前項と同じように財市場の調整速度αは十分

図２



出所）筆者作成．

に小さい値を仮定している．

- ・η（テーラー・ルールによる短期名目利子率iの調整速度：η>0）を十分に高くする．
- ・θ_1（Tailor ルールによる現在の短期利子率調節の重み：θ_1>0）を十分に大きくする．
- ・θ_2（将来の利子率に影響を与える重み；時間軸政策：θ_2>0）を十分に大きくする．
- ・ϕ（信用秩序維持政策ないしはプルーデンス政策：0≦ϕ≦1）を十分に小さくする[14]．

4．おわりに

本稿では以下の２点を検討した．(1）CAPMと正常逆鞘による順イールドカーブの導出から粘着的な長期利子率のモデル化を試み，(2）長期利子率の粘着性のある単純な２変数からなる景気循環モデル（Kaldor モデル）を利用して動学的安定性について考察した．ここでは，景気に対して反循環的なリスクプレミアムの変動による長期利子率の粘着性がシステムの安定性を損なう要因であった．景気後退の場合を例にすれば，本稿の結論から，高止まりする長期利子率の低下に影響を与える政策プログラムとして，将来利子率へのコミットメント（時間軸効果をともなう政策）やプルーデンス政策のような金融政策の実行が有効であった[15]．ケインズは「貨幣論Ⅱ：貨幣の応用理論」(Keynes（1930)）の中で，深刻な不況では，

中央銀行が債券を無制限に買うことを義務付けない限り，長期利子率が正常以上に高くなる傾向があることを述べている[16]．また，中央銀行の無制限の買いオペ政策が制限されるような現実的な情況を分析している．さらに，「一般理論」（Keynes（1936））では中央銀行が短期利子率の操作に専念し，長期利子率に断固たる姿勢で臨まなければ「流動性の罠」に陥ると述べている[17]．本稿では，長期国債のような資産を無制限に買い切るオペが拒まれるような状況においても必要とされる金融政策プログラムを検討したことになる．最後に，ケインズの以下の「一般理論」の文章を引用しておこう．

> 「完全雇用を提供するに足る高い水準に有効需要を維持することが困難であるのは，慣行的でかなり安定的な長期利子率と，気まぐれで高度に不安定な資本の限界効率とが結びついているためであることが，いまや読者には明瞭となったはずである．」（邦訳：p.201）

本稿では完全雇用水準を阻害する長期利子率の安定性（粘着性）を特に検討したのである．

付録 1：CAPM の概要

資本資産評価モデル（CAPM: capital asset pricing model）において株式の期待要求収益率を求める式は以下で与えられる．

$$\mu_{ri} = r_f + (\mu_M - r_f)\,\beta_i \tag{24}$$

ただし，左辺の μ_{ri}：株式 i の期待要求収益率（期待リターン），右辺第 1 項の r_f：安全資産の利子率である．第 2 項がリスクプレミアムを表している．すなわち，ある危険資産である株式の期待リターン μ_{ri} は，無リスク資産の利子率 r_f にリスクプレミアムと呼ばれる第 2 項 $(\mu_M - r_f)\beta_i$ を追加して評価されている．つまり，ハイリスク・ハイリターンの原則を示している．この β_i は個別株式の収益率 μ_{ri} が市場全体の期待収益率 μ_M とどれほど強く相関しているかを表す，いわば「市場相関リスク（本稿で称した）」である．すなわち，このモデルにおいて投資家が言う「リスク」が高いという意味は景気変動に左右される市場にどの程度相関しているかを指している．それゆえ，この「市場相関リスク」β_i を引き受ける報酬のみが上乗せられる．企業や事業個別の事情によるユニークなリスクに対する報酬は上乗せされることはない．理論的にユニーク・リスクは分散投資によって消滅するからである．それゆえ，「危険資産」のある証券が全く市場のリスクと無関係（共分散がゼロ）である場合には，その資産のリターンのばらつき（リスク＝標準偏差）がたとえ大きくても，その期待リターンは国債等の無リスク資産と同じものが要求されることになる．再度，μ_M を説明しておけば，証券市場に占める時価総額の比率ですべての証券を保有したときのポートフォリオから得られる期待リターンである．このようなポートフォリオは「市場ポートフォリオ」（記号を M とおく）と呼ばれる．具体例として TOPIX（東証株価指数）連動型投資信託のような金融資産が挙げられる．また，「市場相関リスク」β_i の数学的表現は $Cov(\mu_{ri}, \mu_M)/\sigma^2_{\mu M}$ である．証券 i と市場ポートフォリオ M の相関を表す ($Cov(\mu_{ri}, \mu_M)$ は μ_{ri} と μ_M の共分散，$\sigma^2_{\mu M}$ は μ_M の分散)．なお $\beta = 1$ ならば保有する株式 i が市場ポートフォリオそのものになる ($\beta_i = {}_M Cov(M, M)/\sigma^2_M = \{\sigma_M \sigma_M \rho(M, M)\}/\sigma^2_M$. $\rho(M, M) = 1$ より $\beta_{i=M} = 1$)．

CAPM 式の導出はファイナンス理論のテキスト，例えば Luenberger（1998），大村（2010）等を参照にされたい．ただし，このような CAPM 理論を導出するときの仮定はやや強いものである．（1）すべての投資家はある一定の同一期間にわたって期待リターンとリスクの 2 つの尺度を利用して，証券に関する最適なポートフォリオを選択する，（2）すべての投資家は危険回避的に行動する，（3）すべての投資家は同一の無リスクの利子率で自由に貸借可能である，（4）すべての証券は無限に分割可能であり，税金や取引費用は存在しない（証券市場の完全性），（5）すべての投資

家はすべての証券の期待リターンとリスク，およびすべての証券において 2 つの組合せの共分散について同一の予想をもつ（同質的期待の仮定），(6) 市場に存在する証券の既発行残高は所与とする（株式発行コストが大きいため短期的には変化しない）．以上の諸仮定から，すべての投資家が証券市場に占める時価総額の比率ですべての証券のバスケットを保有する（「市場ポートフォリオ」）．この資産の評価（価格付け）理論は，1950 年代に Markowitz の平均 - 分散アプローチ・ポートフォリオ理論をベースに，1960 年代に主に Sharp らによって構築された．1960 年代後半から 70 年代にかけて多くの検証が行われたが主にロール（Roll）が検証の限界を指摘したこともあって，CAPM の強い前提を緩めた無裁定評価理論（APT: arbitrage pricing theory）や理論的な導出を伴わない実務的な計測モデルが開発されてきた（例えば Luenberger（1998），大村（2010）を参照）．CAPM の有効性の存在が疑われることがあるが，CAPM の重要な貢献は主に（1）資産のリスクを他資産のリスクから独立に評価することはできない点，（2）リスクに対する報酬は分散投資では消滅しない景気変動等のシステマティック・リスクに対する報酬のみである点，（3）ハイリスク・ハイリターンの原則を理論的に明らかにした点があげられるであろう．

付録 2：命題 2 の証明

最初に（16）体系の閉軌道の存在について確認しておく．「もし集合 Λ 内で trJ が恒等的にゼロではなく，かつ符号が変化しなければ，集合 Λ 内で閉軌道は存在しない」という判別基準（Bendixson's negative criterion（例えば，Gandolfo（2009）23 章，Lorenz（1993）2 章））がある．これによれば，$Q\,(\equiv \eta\theta_1 + (\eta - \phi\beta)\theta_2)$ が所与のとき（18）式の trJ は仮定により符号を変える可能性があるので直ちに閉軌道の存在は排除されない．

そこで，位相図を利用しながら，均衡点以外の点の解軌道が極限閉軌道となることを示していこう．以下の非空でコンパクトな集合 Λ を定義する．

$$\Lambda \equiv \{(Y, K)\ |0 \leqq Y \leqq \bar{Y} \equiv f^{-1}(0),\ 0 \leqq K \leqq \bar{K} \equiv g(\bar{Y})\} \tag{25}$$

ただし，$\dot{Y}=0$ の曲線を $K=f(Y)$, $\dot{K}=0$ の曲線を $K=g(Y)$ とする（**図 3** 参照）．また，$\dot{Y}=0$ 線および $\dot{K}=0$ 線の傾きは，（16）体系で各微分方程式を 0 とおいたときに Y と K で全微分して整理して以下のように求められる．ただし，仮定に留意する．

$$\left.\frac{dK}{dY}\right|_{\dot{K}=0} = -\frac{I_Y + I_{i_L}\bar{\mu}\{\eta\theta_1 + (\eta - \phi\beta)\theta_2\}}{I_K} > 0,$$

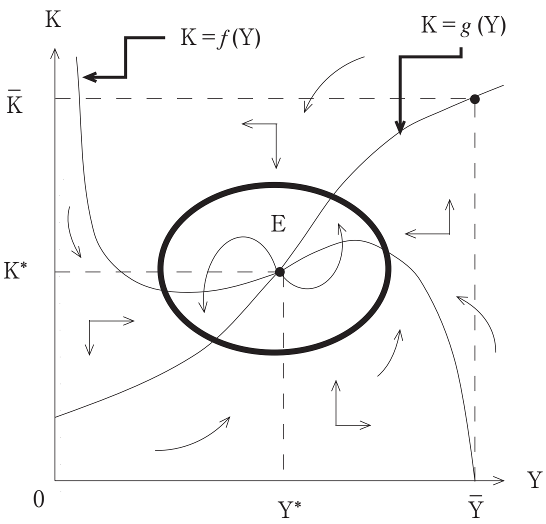
$$\left.\frac{dK}{dY}\right|_{\dot{Y}=0} = -\frac{\alpha\left[(C_Y - 1) + I_Y + I_{i_L}\bar{\mu}\{\eta\theta_1 + (\eta - \phi\beta)\theta_2\}\right]}{I_K} \lesseqqgtr 0$$

$$\Longleftrightarrow (C_Y - 1) \gtreqqless I_Y + I_{i_L}\bar{\mu}\{\eta\theta_1 + (\eta - \phi\beta)\theta_2\}$$

（複号同順）．（26）

カルドアの位相図は**図 3** のように書けて構造安定的であるとする．このとき，閉集合 Λ 外から解は必ず Λ 内に吸引されるが再び Λ 外に出ることはない．また，Λ 内では，$Q<Q_H$ の場合 $trJ>0$ であり，均衡点は小域的に不安定である（**ケース 2 の状態**）．したがって，均衡点以外の点は均衡点

図 3



出所）筆者作成．

に収束しない．ポアンカレ＝ベンディクソンの定理の検討により，極限閉軌道の存在が確かめられた．

注

1）資産の「現在価格」を求める Dusak（1973）の方法は，CAPM そのものである．なぜなら，CAPM は期待要求収益率を求めることもできるが，本稿の本文で説明されるように，CAPM 式を変形すれば本来の「評価（価格付け）」モデルとなるからである．ただし，Dusak（1973）の方法は資産の直物価格 S_t を求める際に右辺にも同じ S_t がでてしまうので，本稿では Luenberger（1998）：邦訳第７章を参考にリスクを再計算して右辺の S_t を取り除いた式で表記してある．

2）もし不等号で表されるならば裁定の機会が生じてリスクなしに利益を得ることが可能になる．例えば $S_t(1+r_f)<F_{t+1,t}$ の状態であるときは，利子率 r_f で S_t を借りて現物を１単位購入し，現時点で先物価格 $F_{t+1,t}$ で売り契約を結べばよい．将来時点で１単位を売却して $F_{t+1,t}$ を得て借入れ額 $S_t(1+r_f)$ を返済すれば，$F_{t+1,t}-S_t(1+r_f)$ を無リスクで得る裁定取引が可能である．逆の不等号の場合も，同じように裁定取引が可能である．このような機会が消滅するためには，無裁定条件が成立しなければならない．

3）ケインズの「正常逆鞘」は, Keynes (1930)，邦訳：第29章第５節「先物市場」の理論にある．「先物価格の相場は，現在の直物価格よりは上にあるが，予想される将来の直物価格よりも，少なくとも正常の逆鞘の額だけは低くならざるをえない」(邦訳：p.149)

4）農作物を生産する農家は，農作物の価格低下による収入減のリスクを回避するために，先物を買い建てるときの先物価格 $F_{t+1,t}$ が将来の直物価格の予想 $E_t(S_t+1)$ よりもたとえ低くても，先物市場で契約に応じる可能性がある．一方，農作物を購入するような生産企業は，価格上昇リスクを回避するために先物価格が将来の直物価格の予想より多少高くとも契約に応じる可能性がある．ケインズは通常の先物市場では，危険回避的に先物を売り建てて危険を回避する需要の方が先物を買い建てる需要よりも相対的に大きいと考えたのである．

5）ケインズの正常逆鞘や先物市場における逆鞘現象の是非をめぐる論争は多く，実証分析での結論はさまざまである．例えば，Bodie and Rosansky（1980），Fama and French（1987），Fort and Quirk（1987），Miffre（2000）は対象先物商品に差異はあるが，先物市場に一定の正のリスクプレミアム（逆鞘）を見出すことで「正常逆鞘」の存在を支持している．一方で，花輪・小川・三隅（1998），Kolb（1992），Deaves and Krinsky（1995）等は存在を否定する結論を得ている．

6）不等式 $E_t(i_t+1)>i_t$ のケースは将来の短期利子率の予想が現時点の短期利子率より高くなる場合である．このとき，右上がりのイールドカーブ（順イールド）が明らかに成り立つ．しかし，逆の不等式 $E_t(i_t+1)>i_t$ のケースで短期利子率の予想がかなり低くなるような場合には，右下がりのイールドカーブ（逆イールド）となる場合もある．ここでは，金融市場で多く観察されている，通常の順イールドを対象としている．

7）一般理論からケインズの文章を引用しておこう．「二つの型の危険が投資量に影響する．それらは通常区別されていないけれども，区別することが重要である．……（中略）……さて第一の型の危険（借手の危険 - 引用者注）は平均化によってまた予想の正確さを高めることによって減少する可能性があるが，ある意味において，真の社会的費用である．しかし，第二のもの（貸手の危険 - 引用者注）は投資費用に対する純粋な追加であって，借手と貸手とが同一人物であったなら存在しないはずのものである．その上，第二の型の危険は部分的に企業者危険の一部を重複して含んでおり，投資の誘引となる最低予想収益率の大きさを求めるさいには，純粋利子率にこの企業者危険の一部が二度加えられること

になる．……（中略）……危険の一部がこのように二重に考慮されることは，私の知りかぎりこれまで強調されることはなかった．しかし，このことは場合によっては重要であろう．好況期には，これらの二つの危険すなわち借手の危険と貸手の危険の大きさについての一般の評価は，異常にまた無分別なほど低くなりがちである．」（邦訳：pp.142-143.）

8）ただし，ケインズは不確実性をめぐる心理や自己疑念を通した「非確率的」な期待の役割の重要性を訴えていたわけであるから，本稿の一連の考察では収まらないだろう．

9）ここでは中央銀行が実際の産出量と潜在産出量との差を特に重視して金融政策を行っているものとする．テーラー・ルールはそのほかに実際のインフレ率と目標インフレ率との差によっても適切な名目利子率を決定していると想定される（Tailor（1993））．本稿では産出量で定式化されたテーラー・ルールを想定していると解釈できる．

10）具体的には，θ_1 として，直近の政策金利（コールレート）の調節に関係するもの，θ_2 として何らかの政策コミットメントのアナウンスが挙げられる．後者は，2001 年 3 月に導入された量的緩和政策で言えば，「消費者物価指数が前年比上昇率が安定的にゼロ％以上になるまで続ける」というような名目長期金利への影響を目的としたアナウンスがその例として挙げられるであろう．つまり，「時間軸政策」や「政策コミットメント」というような政策が該当する．

11）ここで，「Kaldor 型モデル」とは，Kaldor（1940）を微分方程式を用いて再定式化した Chang and Smyth（1971）モデルのことを指している．また，Kaldor 型モデルの研究として，Asada（1987），浅田（1997），吉田（2003）がある．

12）本稿と異なり，LM 方程式から利子率の動きを入れたモデルは，Asada（1987），浅田（1997）がある．

13）Y^* に比べて十分に Y が小さい経済では企業は遊休設備が負担になっているために，Y の増加の投資誘因効果は小さくなるとした．また，Y^* に比べて十分に Y が大きい経済でも，資本設備費，生産費，資金調達費用の高騰のために，同じく Y の増加の投資誘因効果は小さくなるとした．つまり，そのような領域では限界投資支出は小さいと仮定した．

14）ただし ϕ はリスクプレミアムを小さくするパラメーターであるので $\phi=0$ ならば β の影響は完全に消滅する．

15）本稿では，財政政策については検討しなかったが，借手（企業者）のリスクプレミアムを低下させる効果が期待される．

16）「自然利子率が非常に低く下がっているために，長期市場での借手の考えと貸手との間に，非常に広いまた異常な開きが存在するというような状況が，一時的ではあるが，生ずることがある．物価が下落しつつあり，利潤が低く将来は不確かであり，金融関係者の人気が沈滞しまた警戒的であるときには，自然利子率は，短期的ではあるが，ほとんどゼロにまで低下しているであろう．しかし，貸手が非常に厳しい要求をし，そして最も申し分のない担保付きでなければ，その資金を長期に投資しようとする意向をほとんど持たず，したがって証券利率が，ゼロに向かって下落してゆくどころか，反対に－中央銀行の操作は別として－正常以上に高くなると思われるのは，まさにこのような場合である．このような情況の下では，中央銀行に対して債券を買い入れる義務を課し，その価格が，中央銀行によって長期的な基準と考えられている高さをはるかに超えるようになるまで，それを実行させるのではないかぎり，長期利子の市場利率と自然利率とを相互に均等させることが，いったいどのようにして可能かという疑問がもたれるのは当然であろう．」（邦訳：p.391））

17）「かくして，世論に対して試験的な性質のものであるとか，容易に変更される可能性をもつとかという感じを与える貨幣政策は，長期利子率を

大幅に引き下げる目的に失敗するであろう．……（中略）……他方，同じ政策でも，もしそれが合理的であり，実行可能であり，公共の利益にかない，強い信念に根ざし，つぶれそうにない当局によって推進されるという理由で世論に訴えるなら，おそらく容易に成功するだろう．」（邦訳：p.204）

参考文献

浅田統一郎（1997）『成長と循環のマクロ動学』日本経済評論社.

大村敬一（2010）『ファイナンス論』有斐閣.

花輪俊哉・小川栄治・三隅隆司（1998）「商品先物価格のリスクプレミアムの存在に関する実証分析」『先物取引研究』第 3 巻，第 2 号，pp.1-27.

吉田博之（2003），『景気循環の理論』名古屋大学出版会.

Asada, T.（1987）Government Finance and Wealth Effect in a Kaldorian Cycle Model, *Journal of Economics/Zeitschrift für Nationalökonomie*, Vienna: Springer-Verlag, 47, pp.143-166.

Bodie, Z. and V. Rosansky（1980）Risk and Return in Commodity Futures, *Financial Analysts Journal*, 36, pp.27-39.

Chang, W. and D. Smyth（1971）The Existence and Persistence of Cycles in a Nonlinear Model: Kaldor's 1940 Model Re-examined, *Review of Economic Studies*, 38, pp.37-44.

Deaves, R. and I. Krinsky（1994）Do Futures Prices for Commodities Embody Risk Premiums?, *Journal of Futures Markets*, 15, pp.637-648.

Dusak, K.（1973）Futures Trading and Investors: An Investigation of Commodity Market Risk Premiums, *Journal of Political Economy*, 81, pp.1387-1406.

Fama, E. F. and K. G. French（1987）Commodity Futures Prices: Some Evidence on Forecast Power, Premiums, and the Theory of Storage, *Journal of Business*, 60, pp.55-73.

Fort, R. and J. Quirk（1988）Normal Backwardation and the Inventory Effect, *Journal of Political Economy*, 96, pp.81-99.

Gandolfo, G.（2009）*Economic Dynamics*（4th edition）, Berlin: Springer.

Hirsch, M. W. and S. Smale（1974）*Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, NewYork: Academic Press.（田村一郎・水谷忠良・新井紀久子訳（1976）『力学系入門』岩波書店）

Kaldor, N.（1940）A Model of the Trade Cycle, *Economic Journal*, 50, pp.78-92.

Keynes, J. M.（1930）*A Treatise on Money 2 The Applied Theory on Money*, London: Macmillan Press 1971.（長澤惟恭訳（1980）『貨幣論Ⅱ：貨幣の応用理論』（ケインズ全集 6）東洋経済新報社）

————（1936）*The General Theory of Employment, Interest, and Money*, London: Macmillan Press 1971.（塩野谷祐一訳（1983）『雇用・利子および貨幣の一般理論』（ケインズ全集 7）東洋経済新報社）

Kolb, R. W.（1992）Is Normal Backwardation Normal?, *Journal of Futures Markets*, 12, pp.75-91.

Lorenz, H. W.（1993）*Nonlinear Dynamical Economics and Caotic Motion*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.（田村一郎・水谷忠良・新井紀久子訳（1976）『力学系入門』岩波書店）

Luenberger, D. G.（1998）*Investment Science*, Oxford Unversity Press.（今野浩・鈴木賢一・枇々木規雄訳（2002）『金融工学入門』日本経済新聞社）

Miffre, J.（2000）Normal Backwardation is Normal, *Journal of Futures Markets*, 20, pp.803-821.

Talor, J. B.（1993）Discretion versus Policy Rules in *Practice, Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 39, pp.198-214.