人的資本蓄積を含む世代重複経済における財政政策の成長効果 [1)]

吉　田　真理子

1．はじめに

本稿では，家計は自らの効用を最大にすることを目的として行動し，また企業は自社の利潤最大化を目標に生産量を決定する利己的主体による分権的経済で，毎期新しい家計が誕生する世代重複経済を想定する．家計は若年期，中年期そして老年期の 3 期間を生き，若年期にのみ教育を受けると考える．教育にかかる費用は資本市場からの借り入れで賄い，中年期に返済すると仮定する．家計が生まれたときの人的資本の初期水準は親のそれに等しく，若年期の教育投資により中年期の人的資本水準は親世代のそれより上昇すると考える．中年期の家計は親世代の水準より上昇した人的資本を企業に供給することにより賃金所得を得る，と同時に若年期の教育投資にかかった費用を返済する．老年期には退職していると想定するため，家計は中年期の所得の一部を老後の消費のために貯蓄する．

以上で想定する経済には，毎期教育を受ける若年期世代，労働をする中年期世代そして貯蓄を取り崩して消費を行う老年期世代の 3 世代が共存することになる．したがってこのモデルを用いると，中年期世代への課税を財源として若年期への教育補助および老年期世代への年金給付という政府による所得再分配政策が分析可能となる．

人的資本蓄積過程を含む世代重複モデルの先行研究としては，C. Azariadis and A. Drazen（1990）が挙げられる．この論文では家計の教育投資が経済全体の人的資本水準を高める人的資本過程を導入した 1 部門 2 世代重複経済での定常均衡の存在証明を行っている．また，F. Docquier, O. Paddison and P. Pestieau（2007）は，人的資本蓄積を組み込んだ 3 期間世代重複モデルを用いて，分権的経済の定常均衡と集権的経済のそれを比べることで，最適な均斉成長経路を達成するための所得分配政策を提示している．しかしながら F. Docquier et al.（2007）では 3 期間世代重複経済の定常均衡の存在証明は省かれている．

本稿の目的は F. Docquier et al.（2007）で構築された 3 期間世代重複経済に政府の財政政策を導入し，唯一の定常均衡が存在するための十分条件を提示すること，さらにその条件の下で分権的経済の均斉成長率への財政政策の効果を分析することである．

論文の構成としては，続く 2 節において家計および政府の行動を説明する．3 節では企業の行動を説明する．4 節では家計の効用最大化行動により導かれる貯蓄関数と完全競争市場における企業の利潤最大化行動によって導かれる賃金率および利子率の関数を用いて資本市場の均衡条件を導出する．5 節では 4 節で提示された資本市場の均衡条件式を用いて定常均衡存在の十分条件を求める．6 節では，政府の財政政策に関する二つの前提条件の下で，教育補助，一括課税および一括移転に関する四つの組合せそれぞれについて均斉経路（Balanced growth path）への影響を分析する．7 節で結論を述べ，最後の 8 節に数学付録として

本文の主要な式の誘導を記載する．

2．家計と政府

最初に本節では家計の 3 期間の行動を説明する．若年期は教育を受ける期間とする．教育にかかる費用は資本市場からの借入で賄うと考える．次の中年期は若年期の教育投資により得られた人的資本を企業に供給し賃金所得を得て財を消費すると同時に，若年期の教育にかかった費用を返済する．さらに所得の一部を老年期の消費のために貯蓄する．老年期は退職していると想定し，中年期の貯蓄を取り崩して消費を行うと考える．家計はすべて同質と仮定し，簡単化のために毎期誕生する家計数は 1 とする．以下では t 期に中年期を過ごす家計を t 世代と呼ぶことにする．

まず t 世代の行動を記述する．t 世代は若年期である t − 1 期に人的資本への教育投資を e_{t-1} 行うと考える[2)]．t 世代の人的資本の水準を h_t，親世代である t − 1 世代の人的資本の水準を h_{t-1} として，人的資本関数を以下で定義する．

$$h_t = \phi(e_{t-1},\ h_{t-1}) \tag{1}$$

（1）式は，任意の世代の人的資本水準がその世代の若年期における教育投資と親世代の人的資本水準に依存することを意味している．ここで，(1) 式の人的資本関数について以下を仮定する．

仮定 1：(1)　$\dfrac{\partial\phi}{\partial e_{t-1}}>0,\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial e_{t-1}{}^2}<0,\ \dfrac{\partial\phi}{\partial h_{t-1}}>0,\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial h_{t-1}{}^2}<0,$

(2)　ϕ 関数は e_{t-1} および h_{t-1} について一次同次である

(3)　$$\lim_{e_{t-1}\to 0}\left(\frac{\partial\phi}{\partial e_{t-1}}\right)=\lim_{h_{t-1}\to 0}\left(\frac{\partial\phi}{\partial h_{t-1}}\right)=\infty,$$
$$\lim_{e_{t-1}\to \infty}\left(\frac{\partial\phi}{\partial e_{t-1}}\right)=\lim_{h_{t-1}\to \infty}\left(\frac{\partial\phi}{\partial h_{t-1}}\right)=0$$

$\dfrac{e_{t-1}}{h_{t-1}}\equiv\bar{e}_{t-1}$ と定義すると，仮定 1 から以下の関数 $\varphi(\cdot)$ が定義できる．

$$\frac{h_t}{h_{t-1}}=\phi\left(\frac{e_{t-1}}{h_{t-1}},1\right)\equiv\varphi(\bar{e}_{t-1}) \tag{2}$$

仮定 1 の下では関数 $\varphi(\cdot)$ について以下の関係が成り立つことが確認できる．

$$\varphi'(\bar{e}_{t-1})>0,\ \ \varphi''(\bar{e}_{t-1})<0,$$
$$\lim_{\bar{e}_{t-1}\to 0}\varphi'(\bar{e}_{t-1})=\infty,\ \ \lim_{\bar{e}_{t-1}\to \infty}\varphi'(\bar{e}_{t-1})=0$$

（2）式を書き換えると次式となる[3)]．

$$h_t=\varphi(\bar{e}_{t-1})h_{t-1} \tag{3}$$

次に，t 世代の中年期と老年期の消費を求める．想定する経済では消費財であり，かつ耐久財として貯蓄手段ともなり得る財が 1 種類取引されているとする．t 世代の中年期の消費を c_t^1，老年期の消費を c_t^2 で表し，t 世代はこれらの消費から生涯効用 U_t を得ると考える．効用関数は以下で表される．

$$U_t=U\left(c_t^1,\ c_t^2\right) \tag{4}$$

ここで，政府による課税と教育補助および一括移転を導入する．政府は中年期世代に一括課税し，それを財源として若年期世代には教育費用の一部を補助し，老年期世代には年金として一括移転を実施すると考える．t 期の政府の教育補助率を $0<\sigma_t<1$，t 世代の中年期への一括課税を $T_{t,1}>0$，そして老年期への一括移転を $T_{t,2}>0$ で表す．政府は毎期均衡予算を実施していると想定すると，任意の t 期の政府の予算制約式は以下の式で与えられる．

$$\sigma_t e_t+T_{t-1,2}=T_{t,1} \tag{5}$$

t 世代の予算制約式を導く．既に述べたように t 世代の人的資本水準は若年期の教育投資により中年期には h_t となる．これを企業に供給することで賃金所得を得る．t 期の市場の賃金率を w_t で表すと，t 世代の人的資本 h_t から得る所得は $w_t h_t$ となる．この所得から若年期の教育投資費用の借入を返済しなければならないが，その際には市場

利子率が追加される．t 期の市場利子率を r_t で表し $1+r_t \equiv R_t$ と定義すると，教育費の返済額は $R_t(1-\sigma_{t-1})e_{t-1}$ となる．さらに，老年期の消費のために持ち越す貯蓄を s_t で表す．以上の想定の下で（3）式を用いて t 世代の中年期と老年期の予算制約式を導くと以下の 2 式となる．

$$c_t^1 = w_t\varphi(\bar{e}_{t-1})h_{t-1} - R_t(1-\sigma_{t-1})e_{t-1} - s_t - T_{t,1} \qquad (6)$$

$$c_t^2 = R_{t+1}s_t + T_{t,2} \qquad (7)$$

簡単化のため家計の時間選好率を毎期一定と仮定し $0<\gamma\leq 1$ で表し，t 世代の効用関数（4）式を以下の式で特定化する．

$$U_t = \log c_t^1 + \gamma \log c_t^2 \qquad (8)$$

（6）式と（7）式の予算制約式を（8）式の効用関数に代入し，効用最大化の必要条件を求めると $\left(\partial U_t / \partial e_{t-1}\right)=0$，および $\left(\partial U_t / \partial s_t\right)=0$ となり，$\dfrac{\gamma}{1+\gamma} \equiv \hat{\gamma}$ と定義し（3）式を用いることにより以下の 2 式が導かれる [4)]．

$$\varphi'(\bar{e}_{t-1}) = \frac{R_t(1-\sigma_{t-1})}{w_t} \qquad (9)$$

$$s_t = \hat{\gamma}\left\{w_t h_{t-1}\left[\varphi(\bar{e}_{t-1}) - \varphi'(\bar{e}_{t-1})\bar{e}_{t-1}\right] - T_{t,1} - \frac{T_{t,2}}{\gamma R_{t+1}}\right\} \qquad (10)$$

（9）式は t 世代の若年期における最適な教育投資水準の条件式であり，（10）式は t 世代の中年期における貯蓄関数を表す．

3．企業

本節では，各期の企業行動を説明する．本稿で考える 1 種類の財は個別企業により物的資本と人的資本の 2 種類の資本を投入することで生産されると考える．ここでは説明を簡潔にするため物的資本は 1 期間で完全消却されること，さらに企業は経済全体で 1 つ存在すると仮定する．既に述べたように t 世代の人的資本水準は若年期の教育投資により h_t となるから t 期の総人的資本を H_t，t 世代の家計数を N_t で表すと，総人的資本は以下の式で求められる．

$$H_t = N_t h_t \qquad (11)$$

本稿では $N_t=1$ と仮定しているため，（11）式から $H_t=h_t$ となる．t 期の産出量を Y_t，経済全体の物的資本を K_t で表すと企業の生産関数は以下の関数で与えられる．

$$Y_t = F(K_t,\ H_t) \qquad (12)$$

ここで，総人的資本は(3)式から $H_t = h_t = \varphi(\bar{e}_{t-1})h_{t-1}$ である．生産関数については以下を仮定する．

仮定 2：（1） $\dfrac{\partial Y}{\partial K_t}>0,\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial K_t{}^2}<0,\ \dfrac{\partial Y}{\partial H_t}>0,\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial H_t{}^2}<0,$

（2） F 関数は K_t と H_t について一次同次である

（3） $\displaystyle\lim_{K_t\to 0}\left(\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}\right)=\lim_{H_t\to 0}\left(\frac{\partial Y_t}{\partial H_t}\right)=\infty,$

$\displaystyle\lim_{K_t\to \infty}\left(\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}\right)=\lim_{H_t\to \infty}\left(\frac{\partial Y_t}{\partial H_t}\right)=0$

$\dfrac{Y_t}{H_t}\equiv \bar{y}_t$，$\dfrac{K_t}{H_t}\equiv \bar{k}_t$ と定義すると，仮定 2 より（12）式の生産関数は $\bar{y}_t = F(\bar{k}_t,\ 1) \equiv f(\bar{k}_t)$ で表されることになる [5)]．

完全競争市場を仮定すると企業の利潤最大化行動により利子率と賃金率について以下の関係が成り立つ．

$$f'(\bar{k}_t) = r_t \qquad (13)$$

$$f(\bar{k}_t) - k_t f'(\bar{k}_t) = w_t \qquad (14)$$

（13）式と（14）式から利子率と賃金率について以下の関数が定義できる．

$$R_t = 1 + r_t = 1 + f'(\bar{k}_t) \equiv R(\bar{k}_t) \qquad (15)$$

$$w_t = f(\bar{k}_t) - k_t f'(\bar{k}_t) \equiv w(\bar{k}_t) \qquad (16)$$

生産関数の仮定から $R'(\bar{k}_t)<0$，$w'(\bar{k}_t)>0$ が確認できる．

4．資本市場の均衡条件

まず，$\bar{e}_{t-1}$ における人的資本関数の弾力性を $\theta(\bar{e}_{t-1})$ で表記すると，弾力性は以下の式で定義できる．

$$\frac{\bar{e}_{t-1}\varphi'(\bar{e}_{t-1})}{\varphi(\bar{e}_{t-1})} \equiv \theta(\bar{e}_{t-1}) \tag{17}$$

仮定1により $\varphi''(\bar{e}_{t-1})<0$ であるから，弾力性について以下の不等号が成り立つ．

$$\theta(\bar{e}_{t-1}) < 1 \text{ }^{6)} \tag{18}$$

次に，t期の資本市場の均衡条件を求める．3節ですでに仮定したように物的資本は毎期完全消却されるため，t期の総投資はt+1期の総物的資本に等しくなる．経済全体の総貯蓄を S_t，t+1期の総物的資本を K_{t+1} で表すと資本市場の均衡条件は以下の式で与えられる．

$$S_t = K_{t+1} + (1-\sigma_t)e_t N_t \tag{19}$$

家計数については $N_t=1$ を仮定していることから $S_t=s_t$ となり，（10）式を（19）式に代入すると以下の式となる．

$$K_{t+1} = \hat{\gamma}\left\{w_t h_{t-1}\left[\varphi(\bar{e}_{t-1}) - \varphi'(\bar{e}_{t-1})\bar{e}_{t-1}\right] - T_{t,1} - \frac{T_{t,2}}{\gamma R_{t+1}}\right\} - (1-\sigma_t)e_t \tag{20}$$

（20）式に人的資本関数の弾力性の定義式である（17）式を代入したのち，両辺を H_t で除すと，$H_t=h_t$ より以下の均衡条件式が得られる 7)．

$$k_{t+1}\varphi(\bar{e}_t) = \hat{\gamma}\left\{\left(1-\theta(\bar{e}_t)\right)w_t - \bar{T}_{t,1} - \frac{\bar{T}_{t,2}}{\gamma R_{t+1}}\right\} - (1-\sigma_t)\bar{e}_t \tag{21}$$

ここで，（21）式では $\frac{T_{t,2}}{h_t} \equiv \bar{T}_{t,2}$，$\frac{T_{t,2}}{h_t} \equiv \bar{T}_{t,2}$ と定義している．また，最適教育投資の条件式（9）式に（15）式と（16）式を代入すると以下の式が得られる．

$$\varphi'(\bar{e}_{t-1}) = (1-\sigma_t)\frac{R(\bar{k}_t)}{w(\bar{k}_t)} \tag{22}$$

5．定常均衡の存在

想定する分権的世代重複経済の定常均衡を以下で定義する．

定義1：経済の定常均衡を，任意のtについて一定の σ，$\bar{T}_1$，$\bar{T}_2$ の下で，$\bar{e}_t=\bar{e}$ および $\bar{k}_t=\bar{k}$ が成り立ち，かつ c_t^1，c_t^2，h_t，k_t，Y_t の変化率が一定の状態と定義する．

（21）式に（15）式と（16）式を代入すると，上の定義より（21）式と（22）式については定常状態では以下の2式が成立することになる．

$$\bar{k}\varphi(\bar{e}) = \hat{\gamma}\left\{\left(1-\theta(\bar{e})\right) - w(\bar{k}) - \bar{T}_1 - \frac{\bar{T}_2}{\gamma R(\bar{k})}\right\} - (1-\sigma)\bar{e} \tag{23}$$

$$\varphi'(\bar{e}) = (1-\sigma)\frac{R(\bar{k})}{w(\bar{k})} \tag{24}$$

また，定常状態における政府の均衡予算式は以下で与えられる 8)．

$$\sigma\bar{e} + \frac{\bar{T}_2}{\varphi(\bar{e})} = \bar{T}_1 \tag{25}$$

ここで，分析の簡単化のため以下を仮定する．

仮定3：人的投資関数の弾力性について，以下を仮定する 9)．

$$\theta(\bar{e}) = \bar{\theta} \tag{26}$$

仮定3と（18）式から $\bar{\theta}<1$ であることが確認できる．（25）式を（23）式に代入し σ を消去し，さらに（26）式を用いると次式が得られる．

$$\bar{k}\varphi(\bar{e}) = \hat{\gamma}\left(1-\bar{\theta}\right)w(\bar{k}) - \bar{e} + (1-\hat{\gamma})\bar{T}_1 - \left[\frac{\hat{\gamma}}{\gamma R(\bar{k})} + \frac{1}{\varphi(\bar{e})}\right]\bar{T}_2 \tag{27}$$

定常状態の存在を証明するために横軸を $\bar{k}$，縦軸を $\bar{e}$ とする座標上に（24）式と（27）式のそれぞれの曲線を描く．まず，（24）式を $\bar{k}$ と $\bar{e}$ ついて全微分すると以下の式が得られる．

$$\left.\frac{d\bar{e}}{d\bar{k}}\right|_{(24)} = \frac{(1-\sigma)R'(\bar{k})w(\bar{k}) - R(\bar{k})w'(\bar{k})}{\left[w(\bar{k})\right]^{2}\varphi''(\bar{e})} \qquad (28)$$

$\varphi''(\bar{e})<0$，$R'(\bar{k})=f''(\bar{k})<0$ および $w'(\bar{k})=\bar{k}f''(\bar{k})>0$ から，（28）式の符号は以下で与えられる．

$$\left.\frac{d\bar{e}}{d\bar{k}}\right|_{(24)} > 0 \qquad (29)$$

（29）式より（$\bar{k}$，$\bar{e}$）座標上で（24）式は右上がりの曲線で描けることが確認できる．

次に，仮定 3 の下で（27）式を $\bar{k}$ と $\bar{e}$ について全微分すると以下の式が得られる．

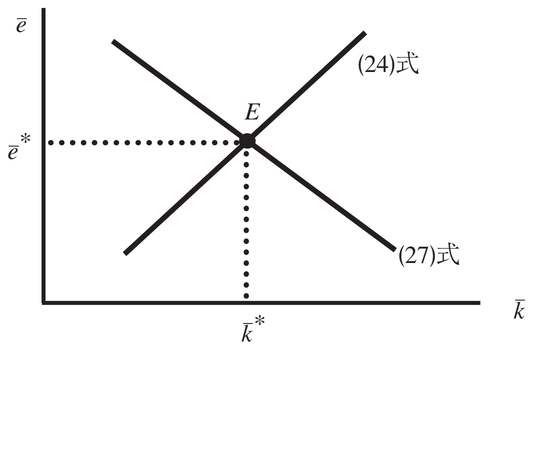
$$\left.\frac{d\bar{e}}{d\bar{k}}\right|_{(27)} = \frac{\hat{\gamma}(1-\bar{\theta})w'(\bar{k}) - \varphi(\bar{e}) + \dfrac{\hat{\gamma}R'(\bar{k})\bar{T}_2}{\gamma\left[R(\bar{k})\right]^{2}}}{\varphi'(\bar{e})\bar{k} + 1 - \dfrac{\varphi'(\bar{e})\bar{T}_2}{\left[\varphi(\bar{e})\right]^{2}}} \qquad (30)$$

（30）式について，任意の t について，$\bar{T}_2 < \left[\varphi(\bar{e}_t)\right]^2\left\{\bar{k}_t + \dfrac{1}{\varphi'(\bar{e}_t)}\right\}$ および $w'(\bar{k}_t)<1$ が満たされるならば，以下の不等式が成り立つ[10]．

$$\left.\frac{d\bar{e}}{d\bar{k}}\right|_{(27)} < 0 \qquad (31)$$

（31）式は上記の条件が満たされるとき，図 1 で示すように（24）式と同じ座標上で（27）式が右下がりの曲線で描けることを意味する．以上より（24）式と（27）式の交点で求められる定常均衡は図 1 の点 E で唯一存在することになる．

図 1.



以上から次の命題が得られる．

命題 1：任意の t について，$\bar{T}_{t,2} < \left[\varphi(\bar{e}_t)\right]^2\left\{\bar{k}_t + \dfrac{1}{\varphi'(\bar{e}_t)}\right\}$ および $w'(\bar{k}_t)<1$ が満たされるならば，想定する分権的 3 期間世代重複経済には唯一の定常均衡点（$\bar{k}$，$\bar{e}$）が存在する．

生産関数をコブ＝ダグラス型生産関数で特定化した場合について命題 1 の条件 $w'(\bar{k}_t)<1$ を求める．生産関数は $A>0$ および $0<\alpha<1$ について $f(\bar{k})=A\bar{k}^{\alpha}$ と書き表されるため，次式が成り立つ．

$$w'(\bar{k}) = -\bar{k}f''(\bar{k}) = (1-\alpha)f'(\bar{k}) \qquad (32)$$

企業の利潤最大化の最適点では $f'(\bar{k})<1$ が満たされるため，（32）式から $w'(\bar{k})<1$ となり，命題 1 の賃金率に関する条件は満たされることが理解できる．

6．財政政策の成長効果

定常均衡における成長率を均斉成長率と定義し g^* で表すと，g^* は定常均衡の定義から $g^*=\varphi(\bar{e})-1$ で表示されることになる[11]．本節では，定常均衡における経済の成長経路を均斉経路（Balanced Growth path）と呼び，政府の財政政策の均斉成長経路への影響を調べる．均衡財政を条件とする財政政策の選択肢として若年期世代への教育補助，中年期世代への課税および老年期世代への一括移転について以下の二つのケースを考える．

ケース 1：中年期の一括課税を一定とする
ケース 2：老年期の一括移転を一定とする

上記二つのケースについて順に分析する．前節の定常均衡の存在証明に用いた（24）式と（27）式に注目すると，（24）式は一括税 $\bar{T}_1$ および一括移転 $\bar{T}_2$ から独立であり，（27）式は教育補助率 σ から独立であることが確認できる．人的資本投資関数 $\varphi(\cdot)$ は教育投資の増加関数であるから，財政政策の二つのケースについて定常均衡である

（24）式と（27）式の交点の教育投資 $\bar{e}$ の変化から成長効果が分析できる．

ケース１：$\bar{T}_1$ 一定

（1）若年世代への教育補助費を増加し，老年世代への一括移転を減少させる場合

経済は当初定常均衡（$\bar{k}^*$，$\bar{e}^*$）の状態にあると考える．ここで，政府が $\bar{T}_1$ を一定に維持し教育補助率 σ を上昇させると，（28）式より（$\bar{k}^*$, $\bar{e}^*$）における（24）式の曲線の傾きが小さくなることが確認できる．

一方，（27）式については $\bar{k}=\bar{k}^*$ における $\bar{T}_2$ の増減による $\bar{e}^*$ への影響を調べるために（$\bar{k}^*$，$\bar{e}^*$）で（27）式を $\bar{e}^*$ と $\bar{T}_2$ ついて微分する．結果は次式で与えられる．

$$\left\{\bar{k}^*\varphi'(\bar{e}^*)-\frac{\bar{T}_2\varphi'(\bar{e}^*)}{\left[\varphi(\bar{e}^*)\right]^2}+1\right\}d\bar{e}^* = -\left\{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma R(\bar{k}^*)}+\frac{1}{\varphi(\bar{e}^*)}\right\}d\bar{T}_2 \qquad (33)$$

（33）式より，命題1の定常均衡存在の条件である $\bar{T}_2<\left[\varphi(\bar{e})\right]^2\left\{\bar{k}+\dfrac{1}{\varphi'(\bar{e})}\right\}$ が定常状態において満たされるならば下の不等式が成り立つ．

$$\frac{d\bar{e}^*}{d\bar{T}_2}<0 \qquad (34)$$

（34）式の結果から，当初経済が定常均衡点 E にあるとき，$\bar{T}_2$ を減少させると $\bar{k}=\bar{k}^*$ における $\bar{e}$ の値が上昇するので，図2に示すように（27）式の曲線は上方に移動することが理解できる．したがって，図2より明らかなように（24）式と（27）式の交点は右上方の E' へ移動することになり交点の $\bar{e}^*$ は上昇する．$\varphi'(\bar{e})>0$ および $g^*=\varphi(\bar{e}^*)-1$ から，$\bar{e}^*$ の上昇により均斉成長率 g^* も上昇する．

（2）若年世代の教育補助費を減少し，老年世代への一括移転を増加させる場合

上記の（1）の逆方向の分析により，政府が $\bar{T}_1$ を一定に維持し教育補助率 σ を引き下げ，老年期世代への一括移転を増加させると，図3に示すように定常均衡を示す交点は左下方に移動し，$\bar{e}^*$ は減少し均斉成長率 g^* は低下する．

図2.

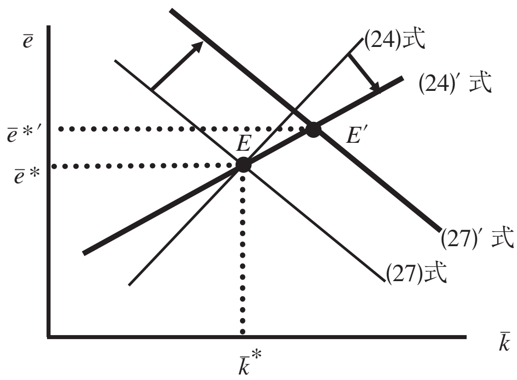
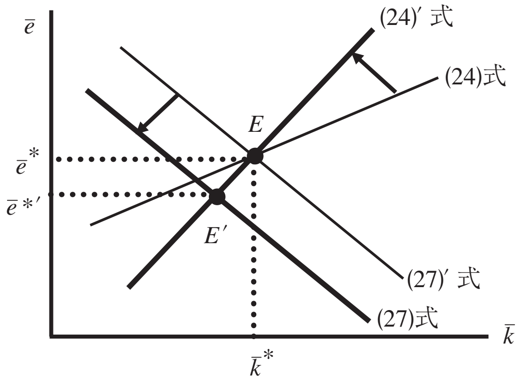


図3.



以上，ケース1について財政政策の成長効果は次の命題2にまとめられる．

命題２：

（1）中年期世代への課税一定の下で，若年世代への教育補助率を上昇し，老年世代への一括移転を減少すると均斉成長率 g^* は上昇する．

（2）中年期世代への課税一定の下で，若年世代への教育補助率を低下し，老年世代への一括移転を増加すると均斉成長率 g^* は低下する．

ケース２：$\bar{T}_2$一定

（1）中年期世代への一括課税の増加により若年世代の教育補助費を上昇する場合

経済は当初定常均衡にあると考える．$\bar{T}_1$の増加によるσの上昇は（27）式より（23）式の傾きを小さくする．一方，$(\bar{k}^*, \bar{e}^*)$において（27）式を$\bar{e}^*$と$\bar{T}_1$ついて微分すると，$\bar{T}_2 < \left[\varphi(\bar{e})\right]^2 \left\{\bar{k} + \frac{1}{\varphi'(\bar{e})}\right\}$が満たされるならば，以下の結果となる．

$$\frac{d\bar{e}^*}{d\bar{T}_1} = \frac{1-\hat{\gamma}}{\left\{\bar{k}^* \varphi'(\bar{e}^*) + 1 - \frac{\bar{T}_2 \varphi'(\bar{e}^*)}{\left[\varphi(\bar{e}^*)\right]^2}\right\}} > 0 \qquad (35)$$

（35）式から$\bar{T}_1$の増加は（27）式を上方にシフトさせることが理解できる．すなわち，上記の図2が示すように，交点Eは右上方のE'へ移動し$\bar{e}^*$は増加する．したがって，均斉成長率g^*は上昇する．

（2）中年期世代への一括課税を減少させ，若年世代の教育補助費を引き下げる場合

ケース２（1）の逆の分析により，上記の図3に示すように定常均衡を示す交点Eは左下方のE'へ移動し$\bar{e}^*$は減少し均斉成長率g^*低下する．

以上のケース２についての財政政策の定常均衡における成長効果は次の命題３にまとめられる．

命題３

（1）老年期世代への一括移転一定の下で，中年期世代への課税の増加により教育補助率を増加させると，均斉成長率g^*は上昇する．

（2）老年期世代への一括移転一定の下で，中年期世代への課税の減少により教育補助率を引き下げると，均斉成長率g^*は低下する．

７．結語

本稿では，各世代が若年期，中年期そして老年期の３期間を生きる世代重複経済を用いて勤労世代である中年期の家計に一括税を課し，それを財源として若年世代への教育補助と退職世代である老年期の家計に一括移転を給付する財政政策の成長効果を分析した．成長効果を分析するに先立ち，まず命題１で想定する経済において効率労働単位当たりの物的資本と教育投資が一定であり，かつ人的資本および各期の消費そして生産が一定の値で成長する定常均衡が唯一存在するための十分条件を提示した．

命題２では，定常均衡存在の十分条件の下で政府による課税は一定だか，若年期の教育補助と老年期への一括移転の配分比率変更により成長効果が異なることを提示した．命題２（1）では，教育補助を増加させ一括移転を減少させる政府の所得再分配政策は均斉成長率を上昇させること，命題２（2）では逆に教育補助を減少させ一括移転を増加させる所得再分配政策は均斉成長率を低下させる効果があることを明らかにした．この結果は，実際の日本経済において課税形態は異なるが，子供手当や高校授業料無料化等の政策が経済の成長戦略としては期待できることが示唆される．

命題３では，老年期世代への一括移転を一定に維持し，中年期世代への課税の増減により，若年期への教育補助を変動させる所得再分配政策の効果を分析している．結果としては，定常均衡存在の十分条件の下で命題３（1）では増税による教育補助の引き上げは正の成長効果があること，逆に命題３（2）では減税による教育補助の引き下げは成長効果としてはマイナスであることが提示された．

本稿では一括課税による財源確保を想定したが，財源を消費税および所得税により確保する場合の成長効果の分析が必要と考える．このテーマについては今後の研究課題とする．

８．数学付録

数学付録Ｂ（（9）式と（10）式の導出）

特定化された効用関数（8）式に予算制約式（6）

式と（7）式を代入する．

$$U_t = \log c_t^1 + \gamma \log c_t^2$$
$$= \log\left[w_t\,\varphi(\bar{e}_{t-1})h_{t-1} - R_t(1-\sigma_{t-1})e_{t-1} - s_t - T_t^1\right]$$
$$+\gamma \log\left[R_{t+1}s_t + T_t^2\right]$$

効用最大化の必要条件を求めると次の2式となる．

$$\frac{\partial U_t}{\partial e_{t-1}} = \frac{w_t\,\varphi'(\bar{e}_{t-1}) - R_t(1-\sigma_{t-1})}{w_t\,\varphi(\bar{e}_{t-1})h_{t-1} - R_t(1-\sigma_{t-1})e_{t-1} - s_t - T_t^1} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial U_t}{\partial s_t} = \frac{-1}{w_t\varphi(\bar{e}_{t-1})h_{t-1} - R_t(1-\sigma_{t-1})e_{t-1} - s_t - T_t^1} + \frac{\gamma R_{t+1}}{R_{t+1}s_t + T_t^2} = 0 \quad (37)$$

（36）式を整理すると本文の（9）式が導かれる．

$$\varphi'(\bar{e}_{t-1}) = \frac{R_t(1-\sigma_{t-1})}{w_t} \quad (9)$$

（37）式を$\frac{\gamma}{1+\gamma} = \hat{\gamma}$と（9）式を用いて整理すると次式となる．

$$s_t = \hat{\gamma}\left[w_t\,\varphi(\bar{e}_{t-1})h_{t-1} - R_t(1-\sigma_{t-1})e_{t-1} - T_t^1 - \frac{T_t^2}{\gamma R_{t+1}}\right]$$
$$= \hat{\gamma}\left\{w_t h_{t-1}\left[\varphi(\bar{e}_{t-1}) - \frac{R_t(1-\sigma_{t-1})e_{t-1}}{w_t h_{t-1}}\right] - T_t^1 - \frac{T_t^2}{\gamma R_{t+1}}\right\}$$

ここで，（9）式を代入すると，本文の（10）式が導かれる．

$$s_t = \hat{\gamma}\left\{w_t h_{t-1}\left[\varphi(\bar{e}_{t-1}) - \varphi'(\bar{e}_{t-1})\bar{e}_{t-1}\right] - T_t^1 - \frac{T_t^2}{\gamma R_{t+1}}\right\} \quad (10)$$

数学付録B（命題1の証明）

（27）式の傾きの符号を調べる．（30）式を以下に書き換える．

$$\left.\frac{d\bar{e}}{d\bar{k}}\right|_{(27)} = \frac{[\varphi(\bar{e})]^2\left[\gamma\left[R(\bar{k})\right]^2\left\{(1-\bar{\theta})\hat{\gamma}w'(\bar{k}) - \varphi(\bar{e})\right\} + \hat{\gamma}\bar{T}_2R'(\bar{k})\right]}{\gamma\left[R(\bar{k})\right]^2\left[[\varphi(\bar{e})]^2\left\{\varphi'(\bar{e})\bar{k}+1\right\} - \bar{T}_2\,\varphi(\bar{e})\right]} \quad (38)$$

命題1の条件である$w'(\bar{k}_t) < 1$が満たされるならば，$\hat{\gamma} < 1$，$1-\bar{\theta} < 1$および$\varphi(\bar{e}) \geq 1$であるから以下の不等式が成り立つ．

$$(1-\bar{\theta})\,\hat{\gamma}\,w'(\bar{k}) < \varphi(\bar{e}) \quad (39)$$

（39）式の結果と$R'(\bar{k}) < 0$および$\bar{T}_2 > 0$であることから，（38）式の分子は負の値となる．

一方，分母については命題の一括移転に関する条件から

$$[\varphi(\bar{e})]^2\left\{\varphi'(\bar{e})\bar{k}+1\right\} - \bar{T}_2\,\varphi'(\bar{e}) > 0$$

であるから，分母は正の値となり（38）式については$\left.\frac{d\bar{e}}{d\bar{k}}\right|_{(27)} < 0$が成立する．したがって，（27）式は（$\bar{k}$，$\bar{e}$）座標において右下がりの曲線で描かれる．

一方，本文で示したように（24）式の傾きについては$\frac{d\bar{e}}{d\bar{k}} > 0$であることが証明されるため，（24）式は右上がりの曲線であることが確認できる．以上より，（24）式と（27）式は同じ（$\bar{k}$，$\bar{e}$）座標におい一点で交わることになる．したがって唯一の定常均衡が存在することが証明される．　**証了**

注

1）本稿は日本大学経済学部科学研究制度の外部研究員としての研究成果をまとめたものである．記して感謝申し上げる．

2）若年期の消費をモデルに組み込むことで結論に変更は生じないため，説明の簡単化のため若年期の消費はモデルから省く．

3）$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{e}_{t-1}} = \varphi'\left(\bar{e}_{t-1}\right) > 0$, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial {\bar{e}_{t-1}}^2} = \frac{\varphi''\left(\bar{e}_{t-1}\right)}{h_{t-1}} < 0$となる．

4）数学付録A参照

5）仮定1より$f'(\bar{k}_t) > 0$, $f''(\bar{k}_t) < 0$, $\lim_{\bar{k}_t \to 0} f'(\bar{k}_t) = \infty$, $\lim_{\bar{k}_t \to \infty} f'(\bar{k}_t) = 0$あることが確認できる．

6）$\varphi''(\bar{e}_{t-1}) < 0$であるから，$\frac{\varphi(\bar{e}_{t-1}) - \varphi(0)}{\bar{e}_{t-1}} > \varphi'(\bar{e}_{t-1})$

が成り立つ．よって，$\varphi(\bar{e}_{t-1})-\bar{e}_{t-1}\varphi'(\bar{e}_{t-1})>\varphi(0)\geq 0$ より（18）式が導かれる．

7）（20）式の左辺をで割ると次式となる．$\frac{K_{t+1}}{H_t}=\frac{K_{t+1}}{H_{t+1}}\times\frac{K_{t+1}}{H_t}=\bar{k}_{t+1}\times\frac{\varphi(\bar{e}_t)h_t}{h_t}=\bar{k}_{t+1}\varphi(\bar{e}_t)$．同様に右辺を $H_t=h_t$ で割ることにより（21）式が得られる．

8）(5) 式の両辺を h_t で割ると，$\sigma_t\bar{e}_t+\frac{T_{t-1,2}}{h_{t-1}}\times\frac{h_{t-1}}{h_t}=\frac{T_{t,1}}{h_t}$ となり，(3) 式を代入すると，$\sigma_t\bar{e}_t+\bar{T}_{t-1,2}\times\frac{h_{t-1}}{\varphi(\bar{e}_{t-1})h_{t-1}}=\bar{T}_{t,1}$ となる．整理すると $\sigma_t\bar{e}_t+\frac{\bar{T}_{t-1,2}}{\varphi(\bar{e}_{t-1})}=\bar{T}_{t,1}$ が得られる．この式を定常状態について求めると（25）式となる．

9）例えば，人的投資関数を $\varphi(\bar{e}_t)=B\bar{e}_t^{\beta}$，$B>0$，$0<\beta<1$ と特定化すると，弾力性は $\theta(\bar{e}_t)=\beta$ で一定の値となり，仮定 3 が満たされる．

10）数学付録 B 参照

11）$g^*=\frac{h_t-h_{t-1}}{h_{t-1}}=\frac{\varphi(\bar{e})h_{t-1}-h_{t-1}}{h_{t-1}}=\varphi(\bar{e})-1$

参考文献

C. Azariadis and A. Drazen（1990）“Threshold externality in economic development,” *Quartary Journal of Economics* 105, pp.501-526.

E. Yong Song（2002）“Taxation, human capital and Growth,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26, pp.205-216.

F. Docquier, O. Paddison and P. Pestieau（2007）“Optimal accumulation in an endogenous growth setting with human capital,” *Journal of Economic Theory* 134, pp.361-378.

J. Li and S. Lin（2008）“Existence and uniqueness of steady-state equilibrium in a two-sector overlapping generations model,” *Journal of Economic Theory* 141, pp.255-275.

M. Angel and L. Gracia（2008）“On the role of public debt in an OLG model with endogenous labor supply,” *Journal of Macroeconomics* 30, pp.1323-1328.

P. Diamond（1965）“National debt is a neo-classical growth model,” *American Economic Review*. 55, pp.1126-1250.

S. J. Turnovsky（1992）“Alternative forms of government expenditure financing: A comparative welfare analysis,” *Economica*, 59, pp.235-252.