

日経平均株価と日経ボラティリティ・インデックス間における負の関係の日中データ分析

柴田 舞¹⁾

要旨

本論文は、日経ボラティリティ・インデックス（日経 VI）と日経平均株価について、2016 年の 1 年間にわたり日中の取引時間中に観測された数値及び価格を使い、ボラティリティと株価リターンの関係を統計的に分析した。具体的には、まず、既存研究が少ない日経 VI について日中変動を確認した。それによると、取引開始直後にやや高い値を付けた後、日中には値が低くなり、そして取引終了時に向けてやや高くなるといった、アルファベット U 字型の特徴が確認された。続いて単位根検定によって、日経 VI は、変化率を分析に用いることを確認した。これらの基礎的な分析の後に、日経 VI 変化率を被説明変数として、そのラグ値や日経平均株価のリターンを説明変数とした回帰モデルを推定し、リターンとボラティリティ変化率の間に負の関係が確認された。リターンの観測頻度を 5 分、10 分、そして 15 分と変えて、それぞれについてモデルを推定したが、いずれの場合にも、この負の関係が確認された。さらには、同様の変数を用いたパラメータ変化モデルをカルマン・フィルターによる最尤法で推定し、推定されたパラメータの値を分析したところ、日経 VI 変化率を被説明変数とした場合の、同時点の日経平均リターンの係数は、前述の負の関係に加えて、日中の時間に依存して関係性が変化することが明らかにされた。それは、前場にはゼロから大きく外れており、後場にはややゼロに近づくといった変化であった。リターンが観測される長さが短い 5 分では、10 分や 15 分よりも、はっきりとした変化がみられた。

1. はじめに

日本経済新聞社が 2010 年 11 月 19 日から算出している「日経平均ボラティリティ・インデックス」（以下では日経 VI と表す）は、大阪取引所上場の日経 225 オプション価格を使って計算されており、東京証券取引所 1 部上場の 225 銘柄で算出される日経平均株価の変動であるボラティリティを表す指数として活用されている²⁾。

日経 VI は、シカゴ・オプション取引所（CBOE）の Volatility Index（略称 VIX）の日本版と言えよう。VIX は、シカゴ・オプション取引所が考案し、1993 年以降、算出と公表をしているボラティリティ指数であり、S&P500 オプション価格を用いてその時点から 30 日後の予想されるボラティリティを計算している。なお、VIX の歴史と計算方法については Whaley（2009）が詳しい。

VIX はインプライド・ボラティリティ（IV）とは異なる。IV は、オプション価格付け理論モデルであるブラック・ショールズ・モデルをベースに算出していた一方、VIX はモデルをベースとせず算出

ていることが、最大の違いと言えよう。

VIXの特徴は、それが指数であり、予測値であることである。このため、指数の値そのもの、あるいは上昇や下落といった変化が、市場判断に広く使われている。それゆえに、「恐怖指数」(英語では“investor fear gauge”)と呼ばれることもある。その理由は、仮にVIXが高まると、すなわち1か月後の株式市場のボラティリティが高まることを意味するが、経験的にボラティリティが高いときには株式市場では価格が下落する傾向があるため、結局のところVIXの高まりは株価下落を予測するからである。

実証分析によると、VIXは株式市場の期待リターンに影響を与えることが指摘されている(Durand, Lim and Zumwalt 2011)。また、VIXの差分と株価指数リターン間には負の相関が示されている(Fleming, Ostdiek, and Whaley 1995)。これらの実証結果は、ファイナンス理論で指摘されるリターンとリスクの関係とは逆であろう。理論的には、高いリスクに対して、投資家は、高いリスクプレミアムを要求するはずである。しかし、実証分析では、理論とは異なり、このようにリターンとリスクの間に負の関係が指摘されている(Lundblad 2007)。

ところで、株式市場の実証分析では、かつては週次や日次データで分析されていたものが、近年では日中データの活用が進んでいる。VIXとリターンの関係の研究においても、日中データによる実証分析がすすめられており、日中のリターンとボラティリティを分析したBadshah他(2016)によると、リターンとボラティリティの間には負の関係があることを示し、さらに、リターンが正か負かによって、その関係が異なっていて、ボラティリティ変化の分布の条件下でリターンからボラティリティへの効果が異なり、VIXの分布の裾でははっきりとした関係がみられるとされる。

本論文において、明らかにしたいことは次の点である。まず、日経VIの日中データの変動の統計的特徴を明確にする。次に、日本の株式市場において、日経VIと、その原資産となる日経平均株価のリターンの関係を明確にする。これによって、先行研究と同様に負の関係が示されるのかを確かめる。さらに、パラメータ変化モデルを用いて、日経平均リターンと日経VIリターンの負の関係の時間変化を明らかにする。この理由は、次のとおりである。恐怖指数と呼ばれることから推察すると、日経VIの値が高いときには日経平均株価が低下している可能性がある。その関係を明らかにしたいが、詳しくは後述するが、日経VIは非定常系列であるため、そのままでは分析に用いることができない。また、VIXに関する先行研究の結果が日経VIに当てはまるのであれば、日経VIリターンの分布の裾では、日経平均リターンとの負の関係が一層はっきりと表れるはずである。この2点の特徴を合わせて分析するには、各時点におけるリターンとボラティリティの関係が分かればよいであろう。そこで、回帰モデルにおいて、パラメータ変化モデルを分析し、その係数の推定値を分析に用いる。

本論文の構成は以下のとおりである。まず第2節でデータについて説明し、第3節でデータの処理と基本統計量を確認し、さらに単位根検定を実施し、第4節で時系列モデルを用いた実証分析を行い、最後の第5節で研究をまとめる。

2. 日中データ

本論文では、日経平均株価および日経VIの日中データを使う。取引時間や、データが公表される頻度が異なるため、それぞれについて説明する。なお、本論文で用いるデータはすべて、日本経済新聞社より、有償で入手した³⁾。

2.1 日経平均株価

日経平均株価は、日本経済新聞社が、東京証券取引所市場1部上場の内国株から225銘柄を選定し、それらの株価で計算した、株価の平均値である。

日中データは15秒間隔で計算されている。1日の始値が9時00分15秒に配信され、続いて同30秒、45秒に新しい値が配信される⁴⁾。これに続き、毎分00秒、15秒、30秒、そして45秒に配信される。本論文では、毎分00秒に配信されるデータを採用することで、1分刻みの株価指数データとして編集する。

前場と後場の終了時刻付近のデータ配信は、前述の規則性から外れている。2016年1月4日のデータを確認すると、前場終了時刻の11時30分には11時30分00秒と同01秒、そして11時35分02秒に配信されている。同日の後場終了時刻の15時00分には15時00分00秒と同01秒、そして15時15分02秒に終値が配信されている。この中で、前場、後場ともに終了時刻の5分02秒後に配信された値が、それぞれ終値である。なお、終値であることは、データ内「歩み値フラグ」と名付けられたデータで判断される。

2.2 日経ボラティリティ・インデックス

日経VIは、日本経済新聞社が算出する、ボラティリティの指数である。日経平均株価の1か月先の変動率を表すとされ、日経225先物価格と日経225オプション価格をもとに計算されている。

日経ボラティリティ・インデックスを日本経済新聞社が算出している方法を説明する。なお、具体的な算出方法は、日本経済新聞社『「日経平均ボラティリティ・インデックス」リアルタイム算出要領』を参照のこと。まず、第*t*期における第1限月のボラティリティ $\sigma_{1,t}$ と、第2限月のボラティリティ $\sigma_{2,t}$ を、 $i=1,2$ として、次の式で算出する。

$$\sigma_{i,t} = \sqrt{\frac{1}{(T_i - t)/Y_{365}} \left(1 + \frac{L_{i,t}(T_i - t)}{Y_{360}} \right) \sum_{j=0}^{n_j} \left(\frac{V(K_{i,j,t}, T_i, t)}{K_{i,j,t}^2} + \frac{V(K_{i,j+1,t}, T_i, t)}{K_{i,j+1,t}^2} \right) \Delta K_{i,j,t}}$$

ただし、 T_i は i 限月の満期、 Y_{365} は 365 日ベースの年間秒数、 Y_{360} は 360 日ベースの年間秒数、 $L_{i,t}$ は前営業日付のユーロ円 LOBOR（第1限月は1か月物、第2限月は2か月物を使用）、 $K_{i,j,t}$ は時点 t の i 限月の j 番目（昇順）の行使価格である。さらに、 $V(K_{i,j,t}, T_i, t)$ はオプション価格であり、 $j=0$ あるいは $j=n_j+1$ では 0、 $j=1$ から p_t-1 のときには（ただし p_t は時点 t の直近限月の先物価格 $< K_{i,j,t}$ を満たす最小の j とする）、時点 t の満期 T_i のプット・オプション価格、さらに、 $j=p_t$ から n_j については、時点 t の満期 T_i のコール・オプション価格である。

続いて、満期が30日になるように、次式に従い、 $\sigma_{1,t}$ と $\sigma_{2,t}$ で線形補間する。

$$\text{指数値} = \sqrt{\frac{1}{M} \left(\frac{(M - (T_1 - t))(T_2 - t)}{T_2 - T_1} \sigma_{2,t}^2 + \frac{((T_2 - t) - M)(T_1 - t)}{T_2 - T_1} \sigma_{1,t}^2 \right)} \times 100$$

ただし、 M は 30 日の秒数である。このようにして計算された値が、日本経済新聞社より発信されている。

本指数は、9時00分15秒から15秒間隔で配信されている⁵⁾。昼休みは無く、9時00分15秒から15時09分45秒まで連続してデータが配信される。昼休みがない理由は、日経VI算出に必要とされる日経225先物と同オプションが上場されている大阪取引所のルールによる。

ただし、データを詳細にみると、例えば1月4日には、15時09分45秒の後に15時16分30秒と、15時20分00秒にもデータが配信されており、15時20分00秒のデータに終値を意味するデータが付され

ている。日経VI算出ベースとしている日経225オプション取引と日経225先物取引が終了するのは15時15分であり、それらの原資産である日経平均株価を算出する株が取引きされている東京証券取引所の取引終了時刻より15分遅いという特徴がある。

2.3 時間外データ

データを詳細にみると、日中の取引時間が過ぎた後の時刻を持つデータが散見される。これらは、2銘柄間の同時性を担保できないことを理由に、分析には使わない。

また、日経平均株価と日経VIの回帰分析では、データが配信される時間が短い日経平均株価に合わせて、データを用いる。

3. データ処理および基本統計量

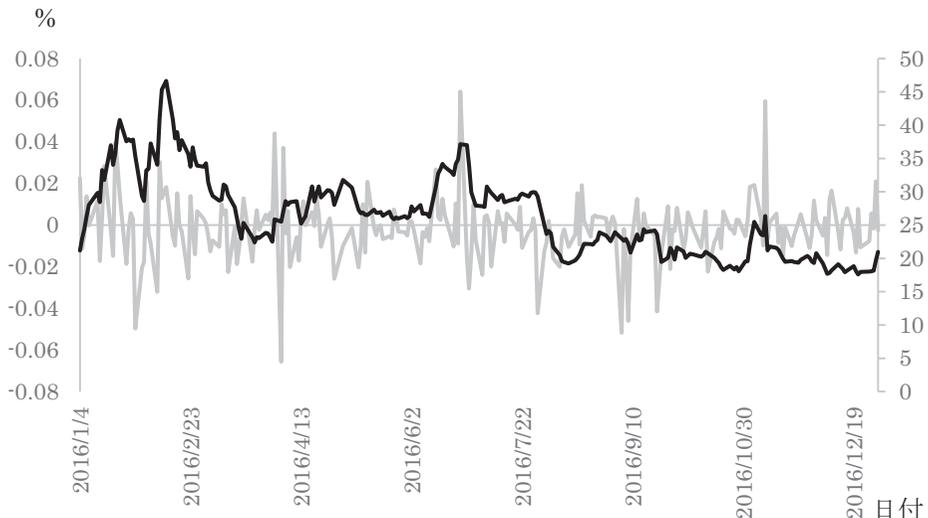
本節では、日中データの図による解釈と、基本統計量の分析を行う。なお、先行研究では、VIXの変化率と原系列が散見されるが、分析対象が変化率であるべきか、あるいは原系列でよいのか、この点について、日経VI系列について確認が必要である。そこで、原系列と変化率について単位根検定を用いて判断する。

3.1 図解と基本統計量

日中データの図と基本統計量を用いて分析する。分析期間は、2016年初から年末まで、すなわち2016年1月4日から12月30日までである。

日経VIについて図を用いて確認する。図1は、1分間隔の日経VI原系列と日経VI変化率の、1日当たりの平均値のグラフである。ただし、9時1分と15時20分を除いて計算した。なお、日経VI変化率

図1 日経VI原系列と変化率



- 注) 1. グレーの線はVI変化率(主軸, %), 黒線はVI原系列(第2軸)である。横軸は日付(年/月/日)である。
 2. 日中の1分間隔のデータの、1営業日内の平均値を示した。9時1分と15時20分は除いて計算した。

は、次の式で計算した。

$$R_{vi,t} = 100 \times [\ln(VI_t) - \ln(VI_{t-1})] \quad (1)$$

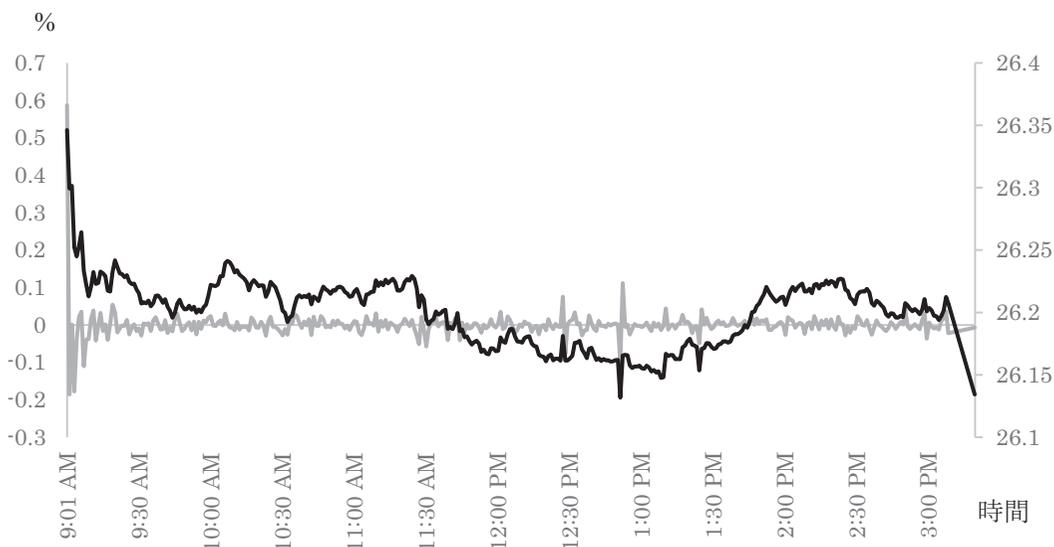
ただし、 VI_t は第 t 期の日経 VI の値であり、 t は時点を表し、 $t=1, \dots, T$ である。 T はサンプルサイズである。

図1のグレー線はVI変化率（主軸）を、黒色線はVI原系列（第2軸）を表す。まず原系列（黒線、第2軸）に注目すると、それが高い日や低い日がある。最大値の46.644が観測された2016年2月12日は、「11日の外国為替市場で円相場が1ドル＝110円台まで急伸。世界的な株安と相まって投資家心理を冷やし、幅広い銘柄に売りが膨らんだ。」（日本経済新聞2016年2月13日朝刊18ページ）とのことで、投資家心理が冷えたことと日経VIが高まったことが一致している。最小値の17.596が観測された2016年12月21日は、「前日の米国株高の流れを引き継ぎ午前の取引は小高く推移したが、午後になると当面の利益を確定する売りが増えて下落に転じた。」（同2016年2月22日朝刊18ページ）とある。なお、グラフ全体を見ると、山や谷のような形状を繰り返していて、日経VIが高い時期や低い時期があることが読み取れる。

同じ図1の日経VI変化率（グレー線、主軸、%）によると、上下に変化している。最大値である0.064が観測された2016年6月24日は、英国の欧州連合（EU）からの離脱が国民投票で決まったことを受けて株式市場が荒れた日である（同2016年6月25日）。最小値である-0.066が観測された2016年4月4日は、円高と株式相場値下がり観測された日である（同2016年4月5日朝刊17ページ）。要するに、ニュースに対して市場が大きく反応した日であるため、変化率が絶対値が大きくなったことがわかる。

次に図2には、日中の日経VI変動を示した。各日に観測される日経VIについて、同一時刻のデータを集めて平均をとった。9時1分から1分刻みで15時9分までのデータと、終値である。図中グレー線

図2 日経VI日中変化



- 注) 1. グレーの線がVI変化率（主軸、%）、黒線がVI原系列（第2軸）である。
 2. 9時1分から1分刻みで15時9分までのデータと、15時20分の終値である。同一時刻のデータの、1年間にわたる平均値である。

が日経 VI 変化率 (主軸, %), 黒線が日経 VI 原系列 (第2軸) である。横軸は時刻を表す。

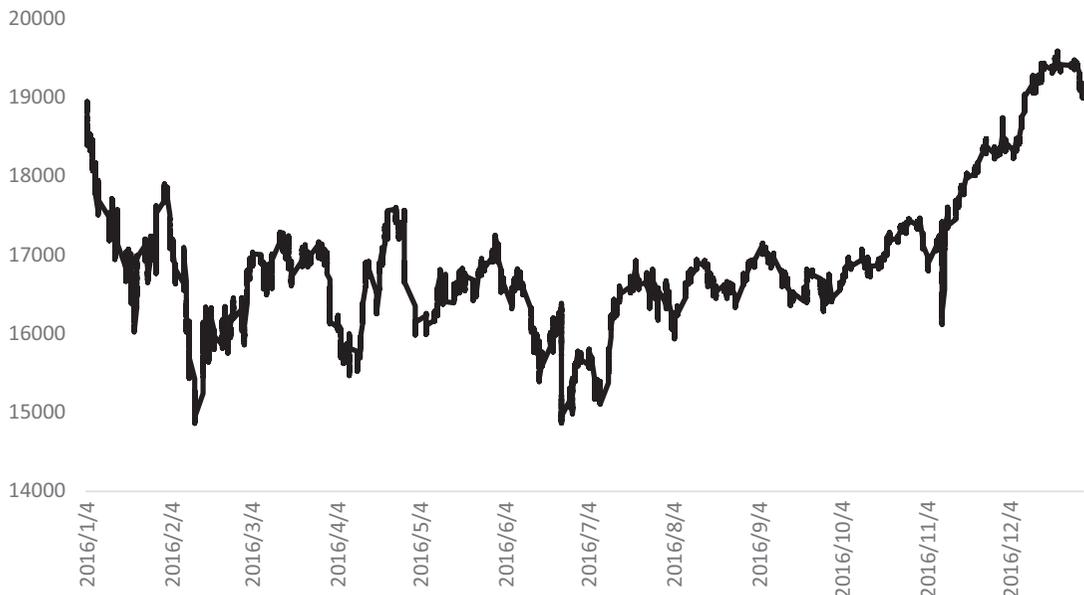
まず原系列に注目すると、終値データを除けば、日経 VI は1日のはじめに高く、次第に低下し、終わりにかけて高まるという、アルファベットのU字型をしている。なお、9時1分の日経 VI 平均値は26,346であり、すべての時間の平均26,200より、高い。このように取引開始時のボラティリティが高い理由は、市場に流入する情報が時間に対して一定であると仮定するとき、前営業日の最終取引から、当日のはじめの取引までに情報が蓄積されていて、それがはじめの取引で一度に市場に流入するから、と考えられる。なお、VIX ではないが、ボラティリティの分析において、日中変化のU字パターン、すなわち1営業日のはじめと終わりのボラティリティが高く、間の時間帯のボラティリティが低いいため、アルファベットのU字型になるという特徴は指摘されている (Andersen and Bollerslev 1997)。

ただし、日経 VI については1日の前半では平均よりも高めであり、後半では平均より低い値から高い値へと上昇している点は、特徴的である。また、1日の最後に記録されるボラティリティが、他の時間に比べて、十分に低いことも確認される。これは、日経平均を算出する東証1部と、日経 VI の算出に使われる日経 225 オプションの取引終了時間の差に起因する可能性がある⁶⁾。

なお、このように、1営業日中の最初と最後のボラティリティは、他の時間帯と異なる変動をすることを理由に、のちの実証分析では分析対象から外す。

次に日経 VI 変化率 (図2 グレー線) をグラフで確認すると、やはり1日の始めの時間帯に高い値を示す。この変化率は、前営業日の最終値から、当該日最初の値までの変化率であるため、他の時間帯よりも長い時間にわたる変化率である。時間間隔の長さが、変化率が高い理由と考えられる。そこで、今後の分析では、最初の変化率を除く。終値の変化率は、平均値とほぼ同値である。しかし、これは他の時間帯とは異なり1分刻みではないことと、原系列で取り除くため、変化率でも分析対象から外す。

図3 日経平均株価



- 注) 1. 日中の1分間隔のデータを示した。9時1分から11時30分までと、12時31分から15時までのデータを示した。
 2. 期間は、2016年1月4日から同年12月30日までである。
 3. 縦軸は円、横軸は日付(年月日)である。

表 1 基本統計量

	日経 VI	R_{vi}	R_{nk}
平均	26.200	-0.002	-0.000
標準偏差	6.029	0.325	0.061
最小値	17.150	-25.613	-2.096
最大値	50.160	23.327	1.645

- 注) 1. 日経 VI 原系列, 日経 VI リターン, そして日経平均株価リターンの基本統計量である. 1 分データから算出した. ただし, 1 日の最初と最後の値を除いてある.
 2. R_{nk} の平均は, -0.0001 である.

図 3 は, 日経平均株価の 1 分間隔のグラフである. 毎分 00 秒の値を, その時分の値として採用した. 縦軸が円, 横軸が日付である. グラフによると, 年始に下落で始まり, 2 月に低い値を付けた後, 上下を繰り返す. 6 月に低い値を付けた後は, 年末に向けて上昇している.

基本統計量を表 1 にまとめた. 表 1 第 1 列に基本統計量名, 第 2 列に日経 VI 原系列, 第 3 列にその変化率の統計量をまとめた. それぞれ 1 分毎データの基本統計量である. ただし, 1 日の最初と最後のデータは取り除いてある. 原系列は平均が 26.200 であり, 最小値 17.150 から最大値 50.160 の間で変化している. 一方の変化率は, 平均は -0.002 であり, 標準偏差が 0.325 なので, 平均は 0 と言って差し支えない. 最小値の -25.613 から最大値の 23.327 までの間で, 広く分布している. 表 1 第 4 列には, 日経平均株価リターンの基本統計量をまとめた⁷⁾. リターンは次の式で計算される. ある t 期の日経平均株価の値を p_t とするとき, $R_{nk,t} = 100 \times [\ln(p_t) - \ln(p_{t-1})]$ として計算される. 基本統計量によると, 平均は -0.0001 であり, 標準偏差が 0.061 であるため, 平均は 0 とみなされる. 最小値は -2.096, 最大値は 1.645 である.

3.2 単位根検定

本節では, 日経 VI の原系列について単位根検定を行う. 単位根検定実施のためには, 1 日のはじめに観測される 9 時 1 分の日経 VI は除外している. また, 15 時 20 分の終値も除外しているため, 最後のデータは 15 時 9 分である.

単位根検定のために, 次式において $y_t = VI_t$ (ただし, VI_t は第 t 期に観測される日経 VI の値) として, 次の式を推定する.

$$\Delta y_t = \mu + \alpha_0 y_{t-1} + \sum_{p=1}^P \alpha_p \Delta y_{t-p} + u_t \quad (2)$$

ただし, $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ であり, 時点を表す t は $t=1, \dots, T$, $T=90151$ である. μ, α_0, α_p はパラメータ, u_t は誤差項, P はラグ値である. なお, ラグ値は, SBIC によって $p=8$ が選ばれた.

このモデルにおいて, 日経 VI 系列が単位根を持つ場合には $\alpha_0=0$ となることが知られている. したがって, $\alpha_0=0$ を帰無仮説, $\alpha_0 < 0$ を対立仮説として t タイプテストを実施する. α_0 の推定値は -1.747×10^4 , その標準誤差は 0.658×10^4 , t 値は -2.654 であった. Dickey-Fuller の表によると (山本 1995 付表 2), 標本サイズが無限大のケースでは, 片側 5% 臨界値が -2.86 である. したがって, 単位根

が存在するとする帰無仮説は棄却されない。すなわち、日経VI原系列は単位根を持つと結論づけられる。この結果を踏まえて、本論文では日経VIの変化率を分析に用いる。なお、5分、10分、そして15分のリターンについても同様に単位根検定を行ったところ、検定統計量の値はそれぞれ -2.502, -2.456, -2.506 であり、いずれのケースでも単位根が存在するという帰無仮説が棄却されなかった。

4. 時系列モデルによる実証分析

4.1 非対称性の分析

本節では、Badshah 他 (2016), Fleming, Ostdiek, and Whaley (1995) を参考にして、次の回帰モデルを推定する。

$$R_{vi,t} = \alpha + \alpha' d_t + \sum_{l=1}^L \beta_l R_{vi,t-l} + \sum_{l=0}^L \gamma_l R_{nk,t-l}^+ + \sum_{l=0}^L \delta_l R_{nk,t-l}^- + \varepsilon_t \quad (3)$$

ただし、 α , α' , β_l , γ_l , δ_l はそれぞれパラメータである。 $R_{vi,t}$ は日経VI変化率であり、(1)式のとおりである。 $R_{nk,t-l}^+$ は、 $R_{nk,t-l} > 0$ であれば $R_{nk,t-l}$ 、そうでなければ 0 となる変数である。 $R_{nk,t-l}^-$ は、 $R_{nk,t-l} < 0$ であれば $R_{nk,t-l}$ 、そうでなければ 0 となる変数である。 $R_{nk,t-l} = 0$ は、データに含まれていなかった。 ε_t は攪乱項である。

時系列モデルを推定する際に問題になるのが、夜間と昼休みである。これらは、日中の連続的に取引される時間帯と異なり、長い時間が空いてしまう。そこで、被説明変数が t 時点のとき、説明変数との間に夜間や昼休が含まれる場合には 1、そうではない場合には 0 となるダミー変数 d_t を、モデルに取り入れた。

本モデルは、リターンの間隔を変えて、5分、10分、そして15分の3パターンで推定した。5分リターンは、1分リターンを5分間について足し合わせて作成した。すなわち、9時6分から9時10分までの5つの1分間リターンの合計値を9時10分のリターンとし、続いて9時11分から9時15分までの5つの1分間リターンの合計を9時15分のリターンとする、という具合に、その後も続けて計算した。前述のとおり1日の最初の価格は分析に用いないことにしたため、9時5分のリターンを使わず、9時10分以降を分析に用いた。10分リターンと15分リターンも、同様にして該当時間内の1分リターンを合計することで作成した。

推定結果は表2にまとめた。第1列は説明変数であり、続いて5分リターンの実証結果が第2列、10分の結果が第3列、同様に15分の結果が第4列に記載されている。それぞれ、上段が推定値、下段が標準誤差であり、ホワイトによる修正を施している。推定値の肩の***, **, そして* はそれぞれ、有意水準1%, 5%そして10%で統計的に有意であることを示す。決定係数は自由度修正済み決定係数の値である。各リターンの中で複数のモデルを推定し、SBICが最小になるモデルの結果を報告する。

推定結果によると、次のことがわかる。本論文で注目している、ボラティリティの非対称性について確認するため、まずは $R_{nk,t}^+$ の係数を見ると、5分では -2.515 である。すなわち、日経平均リターンが上昇するとき、ボラティリティが下がっていることがわかる。一方、 $R_{nk,t}^-$ の係数は -2.114 である。マイナスのリターンにマイナスの符号をかけた結果がプラスなので、リターンが低下したときには、ボラティリティが高まっている。ここで確認できるのは、次の2点である。(1) $R_{nk,t}$ がプラスでもマイナスでも、 $R_{nk,t}$ と $R_{vi,t}$ に負の相関がある。(2) その数値は、 $R_{nk,t}$ がプラスの場合に、より大きく0から離れる。

続いて1期と2期のラグの係数を確認する。5分では、1期ラグの $R_{nk,t-1}^+$ の係数は有意ではなく、

表2 推定結果

	5分	10分	15分
定数項	0.025 *** 0.007	0.043 *** 0.013	0.022 0.019
ダミー	-0.093 *** 0.026	-0.063 * 0.036	-0.097 ** 0.042
$R_{vi,t-1}$	-0.026 *** 0.008	-0.059 *** 0.012	-0.049 *** 0.015
$R_{vi,t-2}$	-0.066 *** 0.008	-0.043 *** 0.012	-0.083 *** 0.015
$R_{nk,t}^+$	-2.515 *** 0.060	-2.502 *** 0.082	-2.509 *** 0.098
$R_{nk,t}^-$	-2.114 *** 0.051	-2.119 *** 0.067	-1.953 *** 0.081
$R_{nk,t-1}^+$	-0.031 0.063	-0.744 *** 0.085	-0.380 *** 0.104
$R_{nk,t-1}^-$	0.118 ** 0.053	-0.031 0.073	0.057 0.086
$R_{nk,t-2}^+$	-0.324 *** 0.062	0.334 *** 0.085	0.284 *** 0.103
$R_{nk,t-2}^-$	-0.218 *** 0.053	0.024 0.073	-0.326 *** 0.085
決定係数	0.263	0.286	0.286
標本の大きさ	14455	7105	4655

- 注) 1. 各変数の上段が推定値，下段が標準誤差（ホワイトによる修正された標準誤差）である。
 2. 推定値の肩につく***, **, *はそれぞれ，有意水準1%，5%，そして10%で統計的に有意であることを示す。
 3. 各リターン系列の中で，SBICを最小にするラグ数に決めた。
 4. 決定係数は，自由度修正済みの決定係数である。

$R_{nk,t-1}^-$ の係数は，非対称性とは逆に，プラスで有意である。しかし2期ラグでは係数はマイナスである。

10分リターンでは， $R_{nk,t}^+$ と $R_{nk,t}^-$ の係数はいずれもマイナスで有意であり，ラグ値の係数の中では $R_{nk,t-1}^+$ と $R_{nk,t-2}^+$ の係数が有意であるが，他は有意ではない。

15分リターンでは， $R_{nk,t}^+$ と $R_{nk,t}^-$ の係数はいずれもマイナスで有意であり，ラグ値の係数の中では $R_{nk,t-1}^+$ と $R_{nk,t-2}^+$ ， $R_{nk,t-2}^-$ が有意である。

まとめると， $R_{vi,t}$ と $R_{nk,t}$ の負の関係は，同時点ではっきりとするが，ラグを伴うと不明確になってしまう⁸⁾。

4.2 パラメータ変化モデル

前節の推定結果によると、 $R_{vi,t}$ と $R_{nk,t}$ の負の関係が存在することが分かった。ただし、Badshah 他 (2016) によると、その関係は、VIX の分布の裾で反応が異なると指摘されている。ところで、分布の裾とは、VIX が大きく変化したときであり、それは珍しい、もしくはめったに表れないことである。そのような時は、具体的に、市場がどのような変化をしたときであろうか。また、「恐怖指数」という名が VIX に与えられていることを合わせて考えると、VIX が高いときには、市場心理が悪い方向に働き、リターンが反応する可能性も考えられる。そこで、前節の回帰分析をベースにして、パラメータが変化するモデルを推定し、そのパラメータを分析する。なお、パラメータ変化モデルの、カルマン・フィルターを用いた最尤推定については、Hamilton (1994) が詳しい。

ここでは、 t 期の説明変数を、変数の数 k を持つベクトルで \mathbf{x}_t と表す。ただし、 \mathbf{x}_t は定数項、 R_{vi} の 1 期と 2 期ラグの値、さらに R_{nk} の同時点と 1, 2 期ラグの値の合計 6 個の変数が含まれている。なお、ここではリターンをプラスとマイナスで区別しない。また、係数から成る $(k \times 1)$ ベクトルを β_t とする。このとき、回帰モデルは

$$R_{vi,t} = \mathbf{x}_t' \beta_t + \varepsilon_t$$

と表される。ただし ε_t は攪乱項である。さらに、時間に対して一定で β_t の平均を表す、要素 k ベクトルを $\bar{\beta}$ とし、 $\xi_t = (\beta_t - \bar{\beta})$ とすると、

$$R_{vi,t} = \mathbf{x}_t' \bar{\beta} + \mathbf{x}_t' \xi_t + \varepsilon_t$$

として表される。 ξ_{t+1} は、次の式に従って変化すると仮定する。

$$\xi_{t+1} = F \xi_t + \mathbf{v}_{t+1}$$

ただし、 \mathbf{v}_{t+1} は攪乱項であり、 F は $(k \times k)$ の行列で、 ξ_{t+1} は定常であると仮定する。

さらに、次の仮定をする。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{t+1} \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} | \mathbf{x}_t, \bar{y}_{t-1} \sim N \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \end{bmatrix} \right)$$

ただし、 $\bar{y}_{t-1} = \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t-2}, \dots, \mathbf{x}_1, R_{vi,t-1}, R_{vi,t-2}, \dots, R_{vi,1}$ とする。また、 \mathbf{Q} は $k \times k$ の対角行列、 σ^2 は定数とする。ここで、 $\xi_t | \bar{y}_t \sim N(\hat{\xi}_{t|t}, P_{t|t})$ とすると、

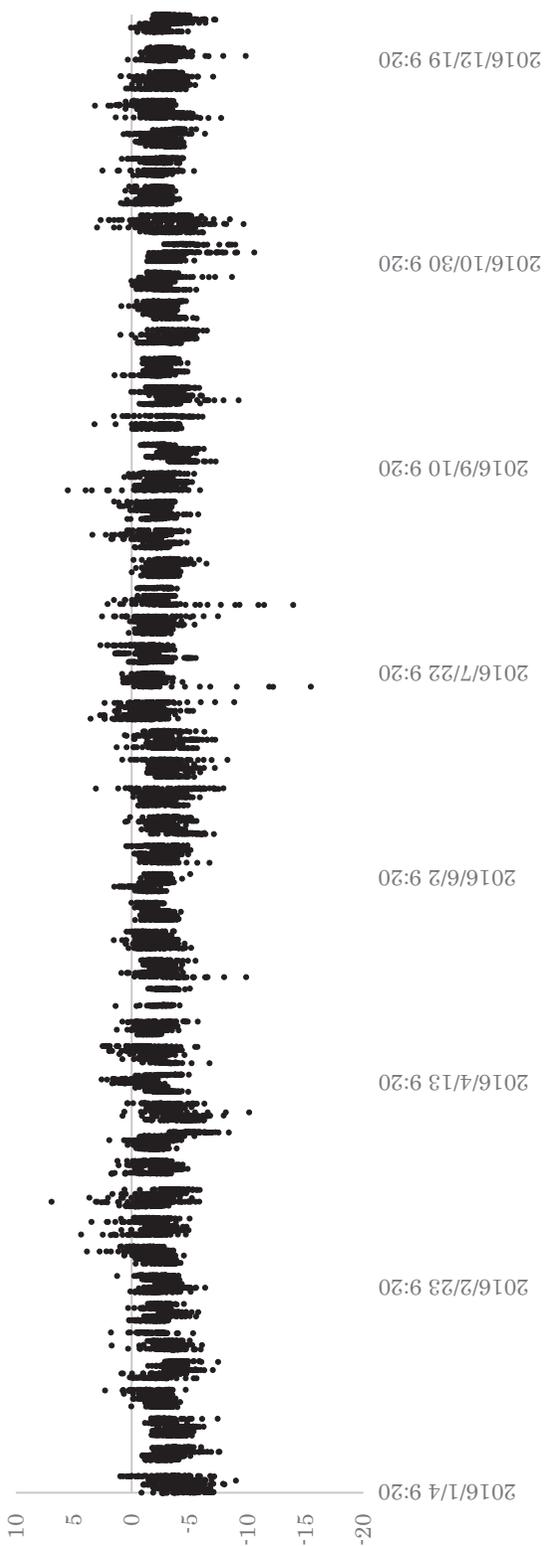
$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{t|t} &= \hat{\xi}_{t|t-1} + \{P_{t|t-1} \mathbf{x}_t' [\mathbf{x}_t' P_{t|t-1} \mathbf{x}_t + \sigma^2]^{-1} [R_{vi,t} - \mathbf{x}_t' \bar{\beta} - \mathbf{x}_t' \hat{\xi}_{t|t-1}]\} \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - \{P_{t|t-1} \mathbf{x}_t' [\mathbf{x}_t' P_{t|t-1} \mathbf{x}_t + \sigma^2]^{-1} \mathbf{x}_t' P_{t|t-1}\} \end{aligned}$$

である。さらに、 $\xi_{t+1} | \bar{y}_t \sim N(\hat{\xi}_{t+1|t}, P_{t+1|t})$ であり、それぞれ次の通りである。

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{t+1|t} &= F \hat{\xi}_{t|t} \\ P_{t+1|t} &= F P_{t|t} F' + Q \end{aligned}$$

以上のカルマン・フィルターを使うと、対数尤度関数は、次のとおりになる。

図4 パラメータ変化モデル



注) 1. パラメータ変化モデルで推定された日経平均リターンの係数の推定値である。縦軸は推定値の値、横軸は日付と時間である。

$$\sum_{t=1}^T \ln f(R_{vi,t} | \mathbf{x}_t, \bar{y}_{t-1}) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(\mathbf{x}'_t P_{t|t-1} \mathbf{x}_t + \sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{(R_{vi,t} - \mathbf{x}'_t \bar{\beta} - \mathbf{x}'_t \hat{\xi}_{t|t-1})^2}{\mathbf{x}'_t P_{t|t-1} \mathbf{x}_t + \sigma^2}$$

ただし $\hat{\xi}_{t|t-1}$ と $P_{t|t-1}$ ($t=1, \dots, T$) は、カルマン・フィルターを繰り返すことで得られる。この対数尤度を最大にすればよい。ここで、 $\mathbf{F}, \bar{\beta}, \mathbf{Q}, \sigma^2$ はパラメータとして扱う。なお、初期値として $\hat{\xi}_{1|0} = \mathbf{0}, \text{vec}(\mathbf{P}_{1|0}) = [\mathbf{I} - (\mathbf{F} \otimes \mathbf{F})]^{-1} \cdot \text{vec}(\mathbf{Q})$ とした。

スムージングのアルゴリズムは次のとおりである。

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{t|T} &= \hat{\xi}_{t|t} + J_t (\hat{\xi}_{t+1|T} - \hat{\xi}_{t+1|t}) \\ P_{t|T} &= P_{t|t} + J_t (P_{t+1|T} - P_{t+1|t}) J_t' \end{aligned}$$

ただし、 $J_t = P_{t|t} F' P_{t+1|t}^{-1}$ である。フィルタリングで得られた $\hat{\xi}_{t|t}$, $\hat{\xi}_{t+1|t}$, $P_{t|t}$, $P_{t+1|t}$ を使って、 $t=T$ から $t=1$ へ向けて繰り返せばよい。

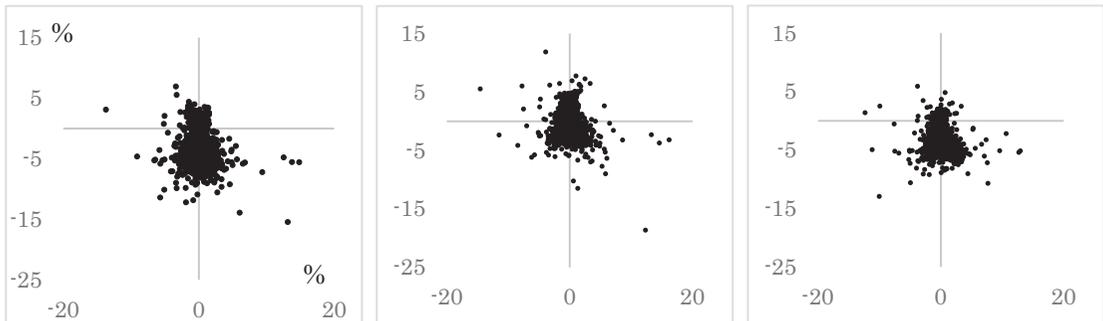
本モデルを5分、10分、そして15分のリターンで推定したが、主に5分リターンの結果を報告する。対数尤度は -5260.868 であった。推定されたパラメータの値を確認すると、 $\bar{\beta}$ は、 $-0.011, 0.105, -0.030, -2.534, 0.086, -0.064$ である。このうち、同時点の $R_{nk,t}$ の係数は -2.534 であり、負の関係が確認される^{9, 10)}。

続いて、 $\hat{\xi}_{t|T} + \bar{\beta}$ (すなわち β_t の推定値である) のうち、 $R_{nk,t}$ の係数を分析する。図4は、この係数の時間に対する散布図である。 $\bar{\beta}$ の推定値である -2.531 の周りに、上下して変化している。中ではいくつか0から大きく外れる時があり、具体的には3月15日12時40分の時点で高い値を、あるいは7月19日9時15分に低い値を示していることなどが確認される。

この係数の変化は $R_{vi,t}$ の変化と関係があるのか。そこで、推定された係数を縦軸に、 $R_{vi,t}$ を横軸にした散布図を示して確認する。図5に示した。左より順に、5分リターン、10分リターン、そして15分リターンの推定結果である。縦軸に対して見ると、多くの点がマイナスの範囲にある。やはり負の関係が確認される。ただし、少数ではあるが、プラスも、ある。それは、横軸の $R_{vi,t}$ がマイナスの時に、多い傾向がある。 $R_{vi,t}$ がマイナスの時には、 $R_{vi,t}$ と $R_{nk,t}$ には負の関係と正の関係が混在している。

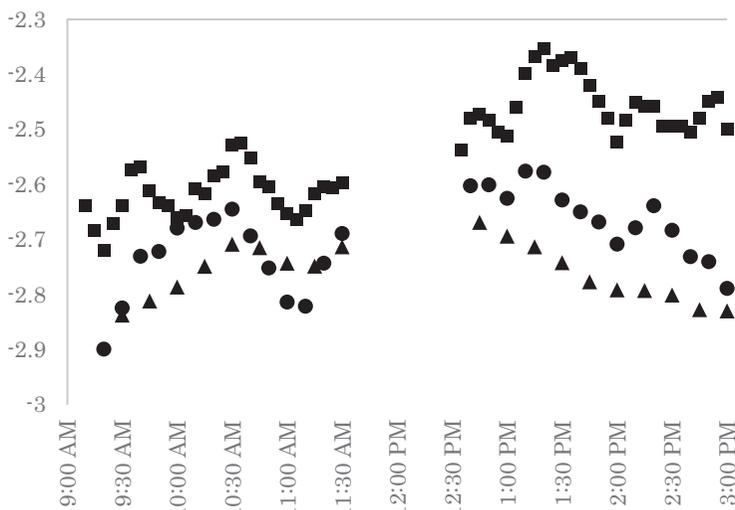
次に、別の観点から、この係数の変化を確認する。図6は、推定された係数を、同一時点について平均した値の、時間に対する散布図である。すなわち、5分リターンの推定結果では、9時10分の推定値

図5 パラメータの散布図 パラメータ変化モデル



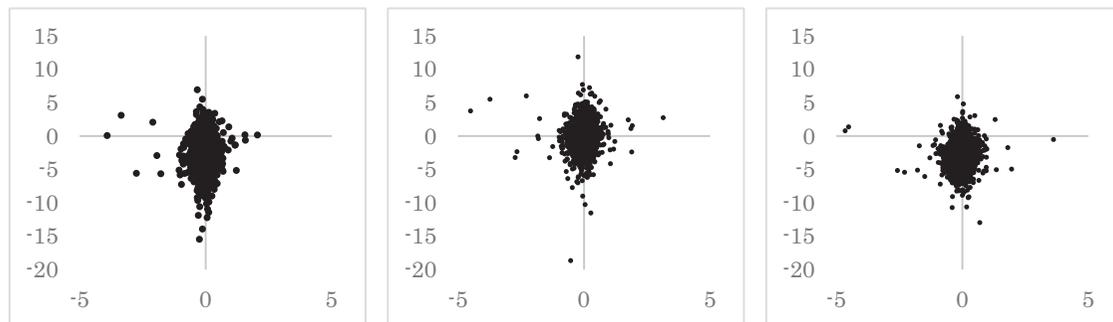
注) 左より順に、5分リターン、10分リターン、そして15分リターンの推定結果である。縦軸は $\bar{\beta} + \hat{\xi}_{t|T}$ のうち、 R_{nk} の係数である。横軸は同時点の R_{vi} である。

図6 時間平均 Rnk 同時点パラメータ



注) 縦軸は $\bar{\beta} + \hat{\xi}_{i|T}$ のうち日経平均リターンの係数である。
横軸は時間である。図中の四角が5分りターン、丸が10分りターン、そして三角が15分りターンを用いた推定結果である。

図7 パラメータとRnk



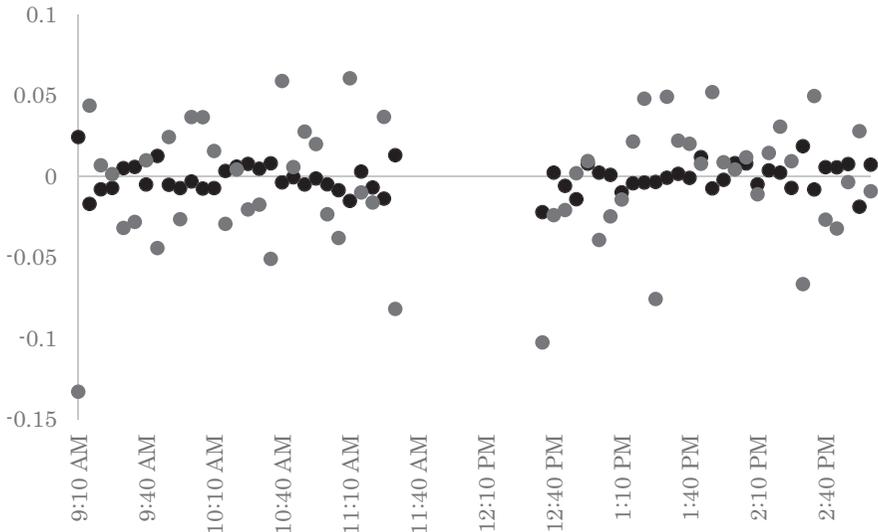
注) 左より順に、5分りターン、10分りターン、そして15分りターンの推定結果である。

縦軸は $\bar{\beta} + \hat{\xi}_{i|T}$ のうち日経平均リターンの係数である。横軸は同時点のRnkである。

を、2016年初から年末まですべての取引日について平均し、続けて9時15分について平均し、同様に15時まで続けた。10分りターンや15分りターンの推定結果についても同様である。5分りターンの推定結果（図中の四角）によると、前場ではその値が低く、後場ではやや高め傾向がみられる¹¹⁾。全体ではマイナスであるため、日経平均リターンとボラティリティの負の関係が確認されるものの、前場と後場で、その反応の強さに違いがある点は、新しい発見である。前場が低く後場に高い傾向は10分りターンの推定結果（図中の丸）でも確認できるが、15分りターンの結果（図中の三角）では、はっきりしない。これらの値の平均を計算すると、5分では前場の平均値が -2.618 、後場の平均値が -2.455 であるのに対し、10分ではそれぞれ -2.739 、 -2.660 、さらに15分では -2.757 、 -2.764 となっていて、リターンの時間間隔が短いほど、前場と後場で推定値の差が大ききことが確認できる。

日経平均リターンがプラスとマイナスで、係数に差があるのか。図7は、縦軸は $\bar{\beta} + \hat{\xi}_{i|T}$ のうち、 $R_{nk,t}$

図8 日中の日経平均株価リターン (パラメータ変動モデルの分析に使われたデータ)



注) 5分リターンの場合である。黒の点は R_{nk} 、グレーの点は R_{vi} である。横軸は時間である。

の係数であり、横軸は $R_{nk,t}$ である。左から順に5分リターン、10分リターン、そして15分リターンによる推定結果を用いた。日経平均リターンがマイナスの時、すなわち図の左側は、右側と比較して、係数のばらつきが大きい。マイナス方向に広がっている。係数の平均値は、 $R_{nk,t}$ がマイナスであれば -2.580 、一方プラスであれば -2.492 であり、マイナスの方が、0よりも離れている。やはり、リターンが下がったときの方が、負の関係が一層大きく表れている。同様の傾向が、10分でも見られるが、15分でははっきりしない。

4.3 パラメータ変化モデルの推定結果再考

前節の発見の中で、特に注目しているのが、前場と後場でのパラメータの違いである。この理由を探るため、前場と後場の日経平均リターンの変化、すなわち、前場にマイナスのリターンが多い、などといった特徴がみられるか、確認する。パラメータ変化モデルの分析に用いたデータセットを、時間に対して平均した値を図8にまとめた。黒の点は $R_{nk,t}$ 、グレーの点は $R_{vi,t}$ である。横軸は時間である。これによると、前場と後場のはっきりとした変化は確認されない。時間に対する特徴は確認されない。

続いて、日経VI原系列の高さとパラメータに関係があるのかを確認する。日経VI原系列(図1)によると、前場では高く、後場のはじめに低く、後場の終わり近くに高くなっており、パラメータが前場と後場で異なる動きをする点と一致しそうである。日経平均リターンと日経VIリターンの負の関係が後場に高いのは、1日の中のサイクルとしての可能性が示唆されている。

5. おわりに

本論文は、日経平均株価と日経VIの日中データを用いて、日中におけるリターンとボラティリティの負の関係を実証分析した。まず日中の日経VI変動を確認したところ、アルファベットのU字型の変化が確認された。また、日経VIは単位根を持つことが検定結果でわかり、変化率を分析に用いることにした。さらに時系列モデルによる分析を行った結果、負の関係が存在することを確認できた。うえ、パ

ラメータ変化モデルによって、その変化が前場と後場で異なっていることを示した。この原因は、日経 VI 原系列のパターンであることが示唆された。

今後の課題は、次の点があげられよう。まず、前場と後場の日経 VI 変化パターンの原因が何か、さらに追及する必要がある。また、このようなパターンが、分析対象の 2016 年に限られたことなのか、あるいは他の時期にもみられることなのか、確認の必要がある。

注

- 1) 本研究は、日本大学経済学部経済研究所共同研究 B「時系列解析による金融市場分析」（代表者三井秀俊、共同研究者里吉清隆、同柴田舞、平成 26 年度より 28 年度まで）の助成を受けたものである。
- 2) 詳しくは、日本経済新聞社「日経平均プロフィール」内「日経平均ボラティリティ・インデックス」、および、その HP にリンクされた関連データを参照のこと。 <https://indexes.nikkei.co.jp/nkave/index/profile?idx=nk225vi>
- 3) 本論文を作成するにあたり、日本経済新聞社よりデータを有償で入手した。これは日本大学経済学部における助成を受けたものである。ここで感謝の意を表したい。
- 4) 日本経済新聞社（2015）参照。
- 5) 2016 年 7 月 19 日以降、日経 225 先物とオプションの取引開始時刻が 8 時 45 分へと早められた。
- 6) Andersen and Bollerslev（1997）が、S&P500 先物について、同様の变化を観測している。
- 7) 株価指数は非定常であることが広く知られており、通常はリターンに変換して分析に用いられる。そこで、本論文では、日経平均株価についてはリターンの基本統計量だけを掲載し、原系列の基本統計量は掲載しない。
- 8) 1 分リターンでも同様に分析したが、決定係数が低く信頼に値しない結果であったため、ここでは報告しない。
- 9) 10 分リターンの対数尤度の値は -5131.639 、 $\bar{\beta}$ の推定値は -0.024 、 0.046 、 -0.020 、 -2.698 、 -0.003 、 0.084 であった。15 分リターンの対数尤度の値は -4078.588 、 $\bar{\beta}$ の推定値は、 -0.041 、 -0.041 、 -0.014 、 -2.761 、 -0.080 、 0.046 であった。
- 10) 5 分リターンについて、その他のパラメータの推定値は、 σ^2 は 0.012 、 Q の対角要素は 0.025 、 0.157 、 0.146 、 1.817 、 0.758 、 0.178 であった。F は -0.341 、 0.012 、 0.120 、 0.764 、 -0.239 、 0.643 であった。
- 11) パラメータが変化しない回帰モデルに、後場のダミー変数を取り入れた回帰分析を行ったところ、やはり前場が低く、後場が高い傾向が確認された。

参考文献

1. 日本経済新聞社（2014）『「日経平均ボラティリティー・インデックス」リアルタイム算出要領』
http://indexes.nikkei.co.jp/nkave/archives/file/nikkei_stock_average_volatility_index_guidebook_jp.pdf
2. 日本経済新聞社（2015）「よくあるご質問（日経平均株価について）」。
https://indexes.nikkei.co.jp/nkave/archives/faq/faq_nikkei_stock_average_jp.pdf
3. 山本拓（1995）『経済の時系列分析』、創文社。
4. Andersen, T.G. and T. Bollerslev（1997）“Intraday Periodicity and Volatility Persistence in Financial Markets,” *Journal of Empirical Finance*, vol.4, pp.115-158.
5. Badshah, I., B. Frijns, J. Knif and A. Tourani-Rad（2016）“Asymmetries of the Intra Return-Volatility Relation,”

International Review of Financial Analysis, vol.48, pp.182-192.

6. Durand, R. B., D. Lim and J. K. Zumwalt (2011) "Fear and the Fama-French Factors," *Financial Management*, Summer, pp.409-426.
7. Fleming, J., B. Ostdiek and R. E. Whaley (1995) "Predicting Stock Market Volatility: A New Measure," *Journal of Futures Markets*, Vol. 15, No. 3, pp. 265-302.
8. Hamilton, J. D. (1994) *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
9. Lundblad, C. (2007) "The Risk Return Tradeoff in the Long Run: 1836-2003," *Journal of Financial Economics*, vol. 85, pp.123-150.
10. Whaley, R.E. (2009) "Understanding the VIX," *Journal of Portfolio Management*, No.3, pp.98-105.