

EGARCH モデルによる TOPIX のブル・ベア局面分析

里 吉 清 隆

1. はじめに

株式市場や外国為替市場などの金融市場では、中長期的に相場が一定の方向に推移することがある。ある期間において相場が持続的に上昇しているとき、その状態（局面）はブル相場と呼ばれる。一方、持続的に下落している状態（局面）はベア相場という。ブル・ベアという用語は相場の状態を端的に表す言葉として広く用いられているが、ある時点において相場がブル局面にあるか、またはベア局面にあるかの判断は恣意的なものであり、ブル・ベアの定義について一般的な合意は得られていない。しかしながら、市場関係者にとっては、現時点がブルとベアのどちらの局面にあるのかの判断は、今後の相場の動向を予測する上で極めて重要であろう。そのためには、それぞれの局面における資産価格の時系列変動にはどのような特徴が見られるのか、変動の仕方はどのように異なっているのかについて、十分に検討する必要があると考えられる。

株式市場に関するブル・ベア分析として代表的なものに、Pagan and Sossounov (2003)、Gonzalez *et al.* (2005) がある。これらの研究は米国の株式市場に関するものであり、長期の月次データを用いて分析を行っている。またそこではブル・ベア局面を識別するために、Bry and Boschan (1971) によって開発された手法（以下、BB 法）を用いている。BB 法で株価の山と谷を決定し、谷から山をブル局面、山から谷をベア局面として区別することによってブル・ベア分析を行っている¹⁾。ただし、BB 法はそもそも景気循環におけるトレンドの転換点（山と谷）を事後的に決定する方法であることから、株式市場の分析に適合するように若干の修正がなされている。ところで、この手法を用いる際には、トレンドの最低持続期間や山から山の期間の下限など、事前にいくつかの設定値を決めておく必要がある。このように幾分恣意的な面は避けられないが、直感的な理解が得やすいことから景気循環の分析において広く用いられている。

BB 法を利用したブル・ベア分析のなかで、日本の株式市場に関するものとしては柴田 (2010) の研究がある。そこでは BB 法だけでなく、Lunde and Timmermann (2004) の識別法も併せて採用し、TOPIX の月次データに関して分析を行っている。この 2 つの方法でブル・ベアの転換点をそれぞれ求めたときにその結果は異なるのか、ブル局面とベア局面のリターンの分布には違いが見られるのか、さらに、ARCH モデルを用いてボラティリティの変動を定式化したときに、ボラティリティとブル・ベア転換点に関連性が見られるかなど、様々な観点から分析を行い、TOPIX の時系列変動の特性を明らかにしている。また、Shibata (2014) は、BB 法で TOPIX の週次データをブル・ベア局面に識別した上で、コールレートの変化が TOPIX の変動にどのような影響を与えているのかについて調べている。

以上の先行研究から、ブル・ベア分析の新たな展開として次の2点が考えられる。第1点目は、ブル・ベア局面の持続期間に関するものである。ブル・ベアといったトレンドはある程度の長期にわたって観察されるものであると一般的に認識されていることからこれまでの多くの研究では月次データが用いられていた。しかしながら、投資家にとっては短期的なトレンドの動向も重要であろう。したがって、月次や週次だけではなく、日次データについても分析も行う必要があると考えられる。

第2点目は、ボラティリティ変動モデルの精緻化である。資産価格の時系列データにはボラティリティ・クラスタリング、ファット・テイル、ボラティリティの非対称性といった特徴があることが知られており、これらの現象を踏まえた代表的なボラティリティ変動モデルの一つに、Nelson (1991) の exponential GARCH (EGARCH) モデルがある²⁾。このモデルはボラティリティの非対称性を説明できるだけでなく、通常の GARCH モデルに比べてパラメータ制約が緩いという利点もあることから、多くの先行研究で使用されている。また、資産価格に見られる他の特徴としては、収益率の分布の左右非対称性、つまり分布の歪みが知られている。Lambert and Laurent (2001), Giot and Laurent (2003, 2004), 渡部・佐々木 (2006), 三井 (2012, 2013) では、Fernández and Steel (1998) の提案した skewed- t 分布を用いて資産価格の分析を行い、左右非対称な分布の有用性を示している³⁾。以上で述べたこれらの現象は資産価格の時系列データにおいて典型的なものである。しかしながら、ブル・ベア局面に関する過去の研究では、これらの特徴を考慮した分析は十分にはなされていない。したがって、EGARCH モデルや skewed- t 分布などを用いた場合にどのような結果が得られるのかについて明らかにする必要があろう。

本研究では、資産価格の短期的な時系列変動がブル・ベア局面でどのように異なっているかを調べるために、TOPIX の日次データについて分析を行った。ブル・ベアの識別には BB 法を用いた。BB 法の設定値によって分析結果が異なることが予想されるため、トレンドの最低継続期間は1週間、2週間、約1ヶ月の3パターンを考え、それぞれについて分析を行った。ボラティリティの変動を捉えるモデルとしては EGARCH モデルを採用した。誤差項の分布には、正規分布、 t 分布、skewed- t 分布、さらに skewed 正規分布を使用した。EGARCH モデルにブル・ベアを表すダミー変数を導入することによって、TOPIX の変動の仕方がブル局面とベア局面で異なっているのか、また、どのような確率分布が最も当てはまりが良いのかについて分析を行った。

実証分析の結果から、トレンドの最低継続日数の長さとは関係なく、TOPIX のボラティリティはベア局面のときのほうが大きいことが明らかになった。また、誤差項の分布には t 分布もしくは skewed- t 分布が適当であることが確かめられた。さらに、トレンドの最低継続日数が短いケースでは、ボラティリティの非対称性はベア局面のほうが強いこと、誤差項の分布はブル・ベア局面によって歪み具合が異なり、ベア局面のときは左に歪んだ分布、ブル局面では左右対称な分布であることが示された。

本論文の構成は次の通りである。第2節では、本研究で用いる EGARCH モデルとその推定法を説明する。第3節で BB 法の手順を解説し、実証分析の結果を示した。第4節は結論と今後の課題、第5節は補論である。

2. モデル

2.1 EGARCH モデル

資産価格の収益率を R_t とする。本研究では、ブル局面とベア局面で資産価格の変動特性に違いがあるかどうかを調べるために、以下の EGARCH モデルを提案する。

$$R_t = \mu_{D_t} + \sigma_t z_t, \quad z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, \quad V[z_t] = 1, \quad (2.1)$$

$$\ln \sigma_t^2 = \omega_{D_t} + \beta_{D_t} \ln \sigma_{t-1}^2 + \theta_{D_t} z_{t-1} + \gamma_{D_t} [|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)], \quad (2.2)$$

$$\mu_{D_t} = \mu_0(1 - D_t) + \mu_1 D_t, \quad (2.3)$$

$$\omega_{D_t} = \omega_0(1 - D_t) + \omega_1 D_t, \quad (2.4)$$

$$\beta_{D_t} = \beta_0(1 - D_t) + \beta_1 D_t, \quad (2.5)$$

$$\theta_{D_t} = \theta_0(1 - D_t) + \theta_1 D_t, \quad (2.6)$$

$$\gamma_{D_t} = \gamma_0(1 - D_t) + \gamma_1 D_t, \quad (2.7)$$

$$z_{t-1} = (R_{t-1} - \mu_{D_{t-1}}) / \sigma_{t-1}. \quad (2.8)$$

D_t は、ブル局面のときに 1、ベア局面のときに 0 の値をとるダミー変数であり、その値は BB 法によって株価の推移における山と谷が決定されることで与えられる。本研究では、ブル局面は谷の翌日から山まで、ベア局面は山の翌日から谷までとした。個々のパラメータの値は D_t の値に依存することになり、例えば、収益率の平均を表す μ_{D_t} は、ベア局面のときに μ_0 、ブル局面のときに μ_1 となる。このモデルでは、局面によるボラティリティの変動特性の違いも考慮しているため、すべてのパラメータについてダミー変数を導入している。

誤差項 z_t の分布には、正規分布、 t 分布、skewed- t 分布、skewed 正規分布の 4 つの確率分布を採用し、それぞれにおいてモデルの推定結果がどのように異なるか、また、どの確率分布が最も当てはまりが良いかを調べることにする。誤差項が正規分布のとき、(2.2) 式の $E(|z_{t-1}|)$ は $\sqrt{2/\pi}$ になる。 t 分布のときは、

$$E(|z_{t-1}|) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) 2\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}(\nu-1)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \quad (2.9)$$

となる。ただし、 ν は自由度であり、 z_t の分散は 1 に基準化されている。 t 分布は正規分布より裾が厚く、収益率の裾の厚さを捉えるのに適した分布であることが知られているが、ブル局面とベア局面では裾の厚さが異なるという可能性がある。したがって、自由度についても他のパラメータと同様に、

$$\nu_{D_t} = \nu_0(1 - D_t) + \nu_1 D_t \quad (2.10)$$

と定式化した。その際、(2.9) 式の値も、ブル・ベア局面によって値が変わることになる。

z_t が平均 0、分散 1 に基準化された skewed- t 分布に従う場合、その密度関数は

$$f(z_t) = \left(\frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \right) s \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (\nu-2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{(sz_t + m)^2}{\nu-2} \xi^{-2|t|} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (2.11)$$

となる。ただし、

$$m = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right), \quad (2.12)$$

$$s = \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1 - m^2}, \quad (2.13)$$

$$I_t = \begin{cases} -1 & \text{if } z_t < -\frac{m}{s} \\ 1 & \text{if } z_t \geq -\frac{m}{s} \end{cases} \quad (2.14)$$

である⁴⁾。ξは非対称パラメータで分布の歪みを表し、ξ<1.0のときに左に歪んだ分布、ξ>1.0のときに右に歪んだ分布になる。ξ=1.0であれば左右対称となり、t分布と一致する。図1には、ξの値を変えることによって確率分布の形状がどのようになるかを描いた。自由度νはいずれも5としている。ξ=1.0で左右対称の分布、ξ=0.8で左に歪んだ分布、ξ=1.2で右に歪んだ分布になっていることがわかる。また、(2.2)式のE(|z_{t-1}|)は

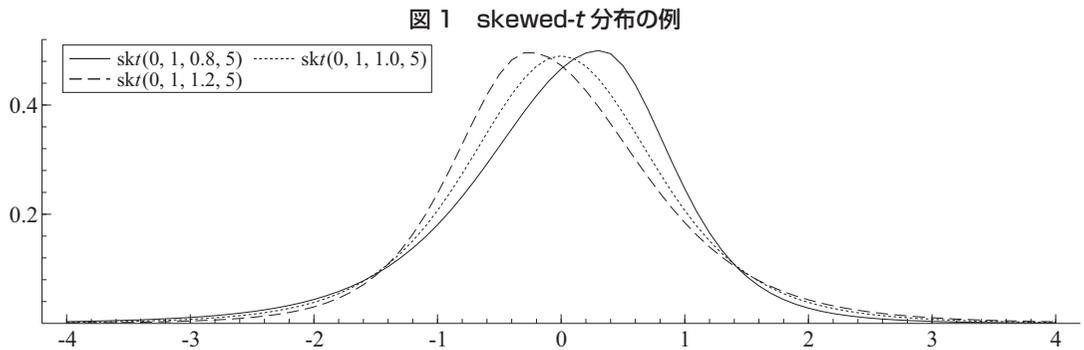
$$E(|z_{t-1}|) = \frac{2\xi^2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)2\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}(\nu-1)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \quad (2.15)$$

となる⁵⁾。本研究では、ブル局面とベア局面で分布の歪み具合が異なることを想定し、非対称パラメータξについても

$$\xi_{D_t} = \xi_0(1-D_t) + \xi_1 D_t \quad (2.16)$$

と定式化した。したがって、それに伴い(2.12)-(2.15)式の値も、局面によって異なることになる。

本研究ではさらに、skewed正規分布についても分析を行うことにする。その密度関数は



注) ここでは分散は1に基準化されている。細線はξ=0.8、点線はξ=1.0、破線はξ=1.2のケースを示す。いずれも自由度はν=5である。

出所) 筆者作成。

$$f(z_t) = \left(\frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \right) s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(sz_t + m)^2}{2} \xi^{-2I_t} \right\} \quad (2.17)$$

となる。ただし、

$$m = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right), \quad (2.18)$$

$$s = \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1 - m^2}, \quad (2.19)$$

$$I_t = \begin{cases} -1 & \text{if } z_t < -\frac{m}{s} \\ 1 & \text{if } z_t \geq -\frac{m}{s} \end{cases} \quad (2.20)$$

である。skewed- t 分布のときと同様に、 ξ は非対称パラメータで分布の歪みを表す。 $\xi=1.0$ であれば左右対称となり、正規分布と一致する。この分布は、skewed- t 分布において自由度を $\nu \rightarrow \infty$ とすることによって得られる。また、(2.2) 式の $E(|z_{t-1}|)$ は

$$E(|z_{t-1}|) = \frac{2\xi^2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.21)$$

となる⁶⁾。

2.2 推定法

前節のモデルのパラメータは最尤法で推定することができる。パラメータ集合を θ とする。このとき、正規分布、 t 分布、skewed 正規分布、skewed- t 分布における対数尤度関数 $\ln L(\theta)$ は、それぞれ以下のようになる。ただし、 T は標本サイズである。

正規分布：

$$\ln L(\theta) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln \sigma_t^2 + \frac{(R_t - \mu_{D_t})^2}{\sigma_t^2} \right]$$

t 分布：

$$\begin{aligned} \ln L(\theta) = T & \left\{ \ln \Gamma \left(\frac{\nu_{D_t} + 1}{2} \right) - \ln \Gamma \left(\frac{\nu_{D_t}}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln [\pi(\nu_{D_t} - 2)] \right\} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln \sigma_t^2 + (\nu_{D_t} + 1) \ln \left(1 + \frac{(R_t - \mu_{D_t})^2}{\sigma_t^2 (\nu_{D_t} - 2)} \right) \right] \end{aligned}$$

skewed 正規分布：

$$\ln L(\theta) = T \left[\ln \left(\frac{2}{\hat{\xi}_{D_t} + \frac{1}{\hat{\xi}_{D_t}}} \right) + \ln s - \frac{1}{2} \ln (2\pi) \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln \sigma_t^2 + \left(s \frac{R_t - \mu_{D_t}}{\sigma_t} + m \right)^2 \frac{\xi_{D_t}^{-2I_t}}{\xi_{D_t}} \right]$$

skewed- t 分布 :

$$\ln L(\theta) = T \left[\ln \left(\frac{2}{\hat{\xi}_{D_t} + \frac{1}{\hat{\xi}_{D_t}}} \right) + \ln s + \ln \Gamma \left(\frac{\nu_{D_t} + 1}{2} \right) - \ln \Gamma \left(\frac{\nu_{D_t}}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln [\pi(\nu_{D_t} - 2)] \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln \sigma_t^2 + (\nu_{D_t} + 1) \ln \left(1 + \frac{\left(s \frac{R_t - \mu_{D_t}}{\sigma_t} + m \right)^2}{\nu_{D_t} - 2} \frac{\xi_{D_t}^{-2I_t}}{\xi_{D_t}} \right) \right]$$

ダミー変数 D_t の値は、BB 法でトレンドが決定されることによって与えられる。本研究では、BB 法によるトレンドの決定、ならびにモデルのパラメータの推定には、プログラミング言語である OxMetrics 7.10 を利用している⁷⁾。

3. 実証結果

3.1 データ

本研究では、東証株価指数 (TOPIX) の日次データに関して、ブル・ベア局面の分析を行った。標本期間は 2010 年 1 月 4 日から 2017 年 2 月 20 日までである。TOPIX の推移における山と谷の決定、つまりブル局面とベア局面の識別には BB 法を用いた。ただし、オリジナルの BB 法とは異なりデータの平滑化は行っていない。BB 法の手順は以下の通りである。

- [1] ウィンドウの長さを M_w とする。時点 t の前後のウィンドウ ($t - M_w$ から $t + M_w$ までの期間) を設定し、その中で最大の値と最小値を見つける。これを、標本期間の最初から 1 期ずつずらしながら、標本期間の最後のデータまで行う。
- [2] 最大値と最小値が交互になるように、最大値が続いた場合は、その中で最大のものを残す (最小値に関しても同様)。
- [3] 標本期間の最初と最後において、 M_s の期間に含まれる山と谷は除外する。
- [4] 最初の転換点が山 (谷) の場合、そこまでのデータの値がその山 (谷) よりも高い (低い) 場合、その転換点を除外する。
- [5] 山から山まで、谷から谷という 1 サイクルの期間が M_c 以上になるように、転換点を除外する。
- [6] 谷から山まで、山から谷までの期間が M_f 以上になるように、転換点を除外する。

この手法で山と谷を決定するためには、上記の M_w 、 M_s 、 M_c 、 M_f という 4 つの値を事前に設定しておく必要がある。今回の研究目的は短期的なトレンドにおける株価変動の分析であるため、ブル・ベア局面の最低継続日数である M_f の値は、従来の研究よりも短いものになる。また、これらの設定値によってモデルの推定結果が異なってくるのが予想されることから、表 1 に示しているように、 $M_f = 5$ (1 週間)、 $M_f = 10$ (2 週間)、 $M_f = 20$ (約 1 ヶ月) の 3 パターンについて分析を行った。 M_w と M_c の値は、 M_f の 2 倍とした。また、 M_s に関しては、標本期間の両端に近い山 (または谷) は標本期間を更に長くしたときに山 (または谷) では無くなってしまふ可能性は考えられるが、ブル・ベア局面の数が少なくなる

表 1 BB 法の設定値

M_f	M_w	M_s	M_c
5 (1 週間)	10	2	10
10 (2 週間)	20	2	20
20 (約 1ヶ月)	40	2	40

注) M_f はブル・ベア局面の最低継続日数, M_w はウィンドウの長さ, M_s はデータ系列の最初と最後における山・谷の除外日数, M_c は山から山, 谷から谷という 1 サイクルの日数の下限である.

出所) 筆者作成.

表 2 日次収益率 (%) の基本統計量

		標本サイズ	平均	標準偏差	歪度	尖度
全期間		1748	0.030 (0.032)	1.324	-0.522** (0.059)	8.535** (0.117)
$M_f=5$	Bear	739	-0.579** (0.052)	1.406	-0.918** (0.090)	8.939** (0.180)
	Bull	1009	0.476** (0.033)	1.058	0.834** (0.077)	7.080** (0.154)
$M_f=10$	Bear	633	-0.406** (0.062)	1.552	-0.635** (0.097)	8.649** (0.195)
	Bull	1115	0.278** (0.033)	1.101	0.273** (0.073)	5.386** (0.147)
$M_f=20$	Bear	755	-0.244** (0.056)	1.539	-0.670** (0.089)	7.863** (0.178)
	Bull	993	0.238** (0.035)	1.089	0.360** (0.078)	6.484** (0.155)

注) 括弧内の数値は標準誤差を表す. 標本サイズを N , 標準偏差を $\hat{\sigma}$ とすると, 平均, 歪度, 尖度の標準誤差はそれぞれ, $\hat{\sigma}/\sqrt{N}$, $\sqrt{6/N}$, $\sqrt{24/N}$ である. **, * は, それぞれ有意水準 1%, 5% で有意であることを示す.

出所) 筆者作成.

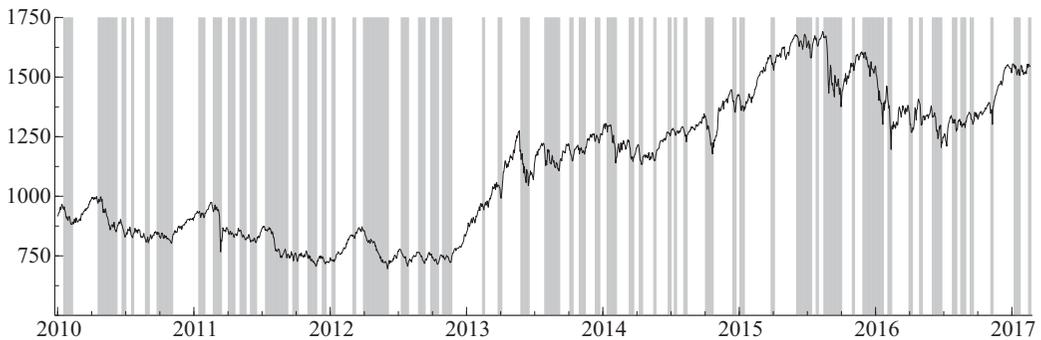
ことを避けるために 2 日間とした.

表 2 には TOPIX の日次収益率 (%) の基本統計量を示した. 収益率は終値の自然対数値の階差に 100 を掛けて求めている (収益率の標本期間は 2010 年 1 月 5 日から 2017 年 2 月 20 日まで, 標本サイズは 1748). 表の 2 行目と 3 行目は標本期間全体, 4 行目以降はブル・ベア局面に分けたときの結果である. 全期間について見てみると, 平均は有意ではないが, 歪度は負に有意であり, 尖度は有意に 3 を上回っている. つまり, 収益率は正規分布より裾が厚く, 左に歪んだ分布に従っていると考えられる.

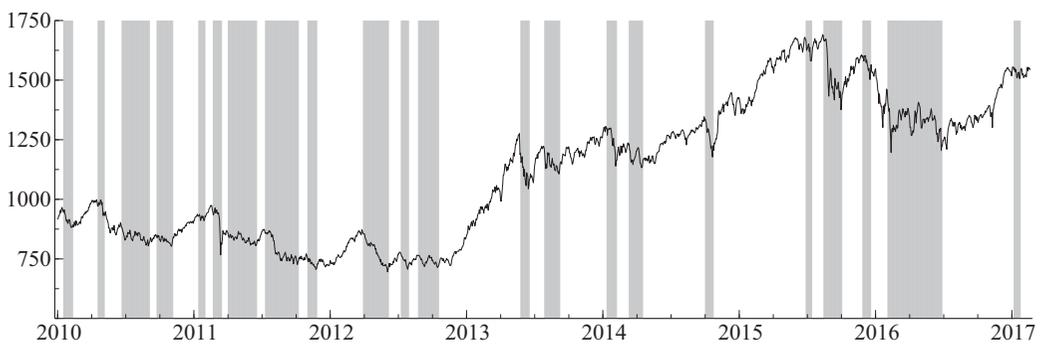
一方, ブル・ベア局面に分けた場合では, BB 法のすべての設定値について, ベアの平均は負に有意,

図2 TOPIXの推移とブル・ベア局面

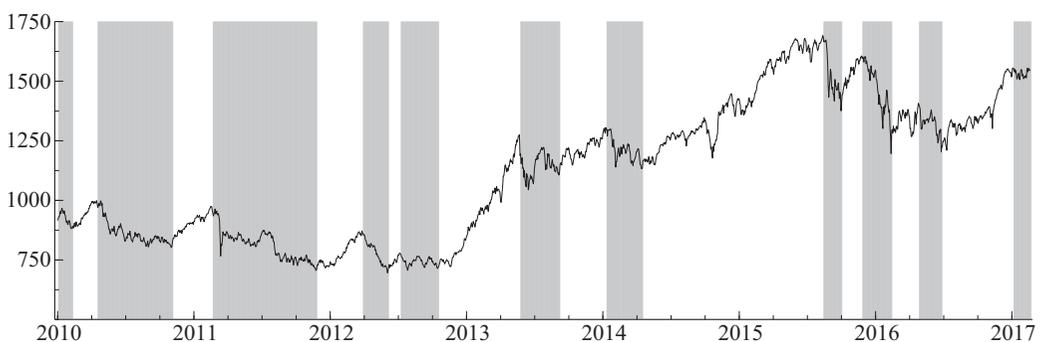
(a) $M_f = 5$



(b) $M_f = 10$



(c) $M_f = 20$



注) 細線は TOPIX の推移, グレーの網掛け部分はベア局面を示す。

出所) 筆者作成。

ブルの平均は正に有意となっている。また、ブル・ベア局面の最低継続日数が長くなるほど、ブルとベアのどちらにおいても、平均はゼロに近づいていくことがわかる。標準偏差は、すべての設定値においてベアのときのほうが大きい。歪度については、どの設定値においてもベア局面では左に歪んだ分布、ブル局面では右に歪んだ分布になっている。そして、分布の歪み具合は、ブルとベアのどちらについても、設定値が短い5日間のときに歪みが最も強い。これらの結果は、TOPIXの収益率に時系列モデルを当てはめて分析する際には、モデルの誤差項の分布を左右非対称な確率分布にするだけでなく、ブルと

ベアで歪み方が異なることを許容する分布にする必要があることを示唆している。尖度については、若干ではあるが、ベアのときの値が大きい。ブル・ベア局面の最低継続日数の違いによる傾向は特に見られないが、どちらのトレンドにおいても、収益率は裾の厚い分布に従っていることがわかる。

図2には TOPIX の推移とブル・ベア局面を示した。パネル (a) は、ブル・ベア局面の最低継続日数が5日間 (1週間) のケース、パネル (b) と (c) は、それぞれ10日間 (2週間)、20日間 (約1ヶ月) のケースである。グレーの網掛け部分は BB 法で識別されたベア局面、残りの白い部分はブル局面である。どのパネルにおいても、グレーの網掛け部分で TOPIX は下降トレンドであり、白い部分では上昇トレンドになっていることが見て取れる。したがって、BB 法による株式相場のブル局面とベア局面の識別は、特に問題なく行われていると考えられる。

3.2 モデルの推定結果

EGARCH モデルの推定結果は表3に示した。2行目の N は正規分布、 t は t 分布、 skN は skewed 正規分布、 skt は skewed- t 分布のことである。2列目から5列目まではダミー変数を含まないモデル、つまり、ブル・ベア局面に分けないモデルの推定結果であり、添え字を0としたパラメータの行に示した。ボラティリティの非対称性を表すパラメータ θ_0 の値を見てみると、すべての誤差項について負に有意となっている。これは多くの先行研究と同様の結果であり、いわゆるレバレッジ効果が存在することを意味している。分布の歪みパラメータ ξ_0 の値は、skewed 正規分布と skewed- t 分布のどちらの分布でも、1より小さく有意である。この結果は、表2の全期間において歪度が負に有意となっていることと一致している。次に、誤差項に適用した4つの確率分布のうち、モデルの当てはまり具合が最も高くなる分布はどれになるのかを調べるために、対数尤度 ($\ln L$)、AIC、SBIC を計算した。これらの値から、いずれの基準においても skewed- t 分布のモデルが選択され、2番目に当てはまりが良いのは t 分布となった。このことは、誤差項の分布は裾が厚いだけでは不十分であり、分布の左右非対称性が重要であることを示唆している。

ブル・ベア局面に分けたケースについては、表3の6列目以降に示した。まず、 $M_f=5$ (1週間) の推定結果を見てみると、すべての分布において、ベア局面の平均 μ_0 は負に有意、ブル局面の平均 μ_1 は正に有意となっている。次に、ボラティリティの式の定数項を確認すると、すべての分布において ω_0 の値は ω_1 を上回っている。このことから、ブル局面よりもベア局面のときのほうが、ボラティリティが大きいと考えられる。また、ボラティリティの非対称については、すべての分布において θ_0 は負に有意、 θ_1 に関しては t 分布と skewed- t 分布においてのみ、負に有意となっている。そして、どの分布についてもベア局面のほうが負の方向に大きい値になっている。分布の歪みパラメータの値は、skewed 正規分布と skewed- t 分布のどちらにおいても、ブル・ベアの両局面で1より小さい。しかしながら、有意となっているのはベア局面のときのみである。このことから、ベア局面については誤差項に左に歪んだ分布を用いたほうが良いと考えられる。

モデルの当てはまり具合については、最も対数尤度が高いのは skewed- t 分布のときであり、AIC の基準においてもこの分布が選択された。一方、SBIC では t 分布が選ばれている。これらの結果は、ブル・ベア局面に分けた場合では、少なくとも分布の裾の厚さを考慮した確率分布を用いる必要があることを示している。

表3 EGARCHモデルの推定結果

	トレンド無し				$M_f=5$			
	N	t	skN	skt	N	t	skN	skt
μ_0	0.027 (0.026)	0.061 (0.019)	0.019 (0.026)	0.041 (0.025)	-0.587 (0.040)	-0.545 (0.038)	-0.595 (0.040)	-0.575 (0.040)
μ_1	- -	- -	- -	- -	0.381 (0.029)	0.372 (0.028)	0.376 (0.030)	0.368 (0.009)
ω_0	0.033 (0.008)	0.020 (0.008)	-0.018 (0.012)	-0.010 (0.012)	0.115 (0.018)	0.112 (0.020)	0.076 (0.024)	0.093 (0.025)
ω_1	- -	- -	- -	- -	-0.041 (0.009)	-0.055 (0.010)	-0.050 (0.017)	-0.063 (0.018)
β_0	0.924 (0.014)	0.923 (0.015)	0.926 (0.013)	0.925 (0.015)	0.918 (0.018)	0.906 (0.023)	0.905 (0.018)	0.895 (0.023)
β_1	- -	- -	- -	- -	0.923 (0.018)	0.927 (0.019)	0.913 (0.020)	0.922 (0.020)
θ_0	-0.137 (0.018)	-0.169 (0.023)	-0.132 (0.018)	-0.164 (0.022)	-0.244 (0.034)	-0.255 (0.041)	-0.265 (0.035)	-0.272 (0.041)
θ_1	- -	- -	- -	- -	-0.032 (0.027)	-0.069 (0.031)	-0.044 (0.028)	-0.075 (0.030)
γ_0	0.222 (0.027)	0.193 (0.030)	0.218 (0.027)	0.192 (0.029)	0.195 (0.040)	0.171 (0.049)	0.164 (0.039)	0.157 (0.047)
γ_1	- -	- -	- -	- -	0.199 (0.037)	0.196 (0.042)	0.200 (0.038)	0.202 (0.043)
ν_0	- -	8.556 (1.435)	- -	9.163 (1.640)	- -	7.583 (1.645)	- -	8.627 (2.170)
ν_1	- -	- -	- -	- -	- -	12.513 (4.189)	- -	12.342 (4.021)
ξ_0	- -	- -	0.847 (0.026)	0.889 (0.032)	- -	- -	0.783 (0.040)	0.850 (0.048)
ξ_1	- -	- -	- -	- -	- -	- -	0.996 (0.043)	0.985 (0.045)
lnL	-2782.86	-2743.14	-2768.34	-2737.70	-2593.79	-2562.78	-2580.76	-2558.48
AIC	5575.72	5498.28	5548.68	5489.40	5207.58	5149.55	5185.52	5144.96
SBIC	5603.05	5531.08	5581.48	5527.66	5262.24	5215.15	5251.11	5221.49
LR	-	-	-	-	378.14	360.73	375.16	358.43

注) 括弧内の数値は標準誤差を表す。
出所) 筆者作成。

表 3 (続き)

	$M_f=10$				$M_f=20$			
	N	t	skN	skt	N	t	skN	skt
μ_0	-0.463 (0.050)	-0.409 (0.048)	-0.473 (0.050)	-0.444 (0.046)	-0.295 (0.046)	-0.243 (0.045)	-0.294 (0.046)	-0.271 (0.047)
μ_1	0.220 (0.029)	0.221 (0.484)	0.210 (0.029)	0.209 (0.019)	0.187 (0.031)	0.191 (0.029)	0.175 (0.028)	0.177 (0.030)
ω_0	0.100 (0.019)	0.102 (0.028)	0.057 (0.023)	0.076 (0.025)	0.074 (0.018)	0.070 (0.021)	0.020 (0.020)	0.032 (0.022)
ω_1	-0.008 (0.008)	-0.023 (0.063)	-0.037 (0.015)	-0.045 (0.015)	0.004 (0.008)	-0.010 (0.009)	-0.024 (0.014)	-0.030 (0.015)
β_0	0.926 (0.019)	0.912 (0.028)	0.935 (0.016)	0.919 (0.024)	0.918 (0.020)	0.911 (0.026)	0.931 (0.016)	0.924 (0.022)
β_1	0.914 (0.020)	0.919 (0.030)	0.908 (0.020)	0.919 (0.020)	0.929 (0.020)	0.925 (0.023)	0.926 (0.020)	0.928 (0.022)
θ_0	-0.219 (0.033)	-0.213 (0.041)	-0.221 (0.031)	-0.220 (0.037)	-0.211 (0.027)	-0.201 (0.033)	-0.199 (0.024)	-0.195 (0.029)
θ_1	-0.101 (0.023)	-0.138 (0.098)	-0.111 (0.023)	-0.143 (0.027)	-0.096 (0.023)	-0.139 (0.031)	-0.106 (0.024)	-0.142 (0.031)
γ_0	0.166 (0.041)	0.162 (0.054)	0.134 (0.037)	0.140 (0.047)	0.166 (0.040)	0.163 (0.048)	0.138 (0.035)	0.145 (0.043)
γ_1	0.207 (0.034)	0.196 (0.042)	0.210 (0.034)	0.201 (0.037)	0.208 (0.036)	0.198 (0.041)	0.212 (0.036)	0.202 (0.040)
ν_0	-	7.215 (1.749)	-	7.854 (2.061)	-	8.890 (2.142)	-	10.423 (2.966)
ν_1	-	10.757 (3.762)	-	10.931 (2.976)	-	8.683 (2.165)	-	8.825 (2.218)
ξ_0	-	-	0.779 (0.043)	0.853 (0.054)	-	-	0.764 (0.041)	0.832 (0.053)
ξ_1	-	-	0.918 (0.037)	0.924 (0.041)	-	-	0.921 (0.038)	0.931 (0.042)
lnL	-2710.99	-2676.95	-2697.43	-2672.14	-2744.97	-2710.63	-2729.46	-2704.96
AIC	5441.98	5377.90	5418.86	5372.28	5509.93	5445.26	5482.92	5437.91
SBIC	5496.64	5443.49	5484.46	5448.81	5564.59	5510.85	5548.52	5514.44
LR	143.74	132.39	141.82	131.11	75.79	65.03	77.76	65.48

注) 括弧内の数値は標準誤差を表す。

出所) 筆者作成。

表3の最後の行に示したLRは、帰無仮説を「すべてのパラメータについて、ブル局面とベア局面の値は等しい」としたときの尤度比検定統計量の値である。例えば、誤差項が正規分布のとき、帰無仮説は

$$H_0: \mu_0 = \mu_1, \omega_0 = \omega_1, \dots, \gamma_0 = \gamma_1$$

となる。尤度比検定統計量は

$$LR = -2(\ln L_0 - \ln L_1)$$

であり、 χ^2 分布に従う。ただし、 L_0 は帰無仮説のもとでの尤度、つまり、トレンドの無いモデルで計算される尤度であり、 L_1 はブル・ベア局面を含めたモデルで計算される尤度である。結果を見てみると、すべての誤差項の分布においてLRの値は非常に大きく、帰無仮説は有意水準1%で棄却される。このことから、 $M_f=5$ の場合、TOPIXの時系列変動はブル局面とベア局面で異なっていると考えられる。

$M_f=10$ (2週間) と $M_f=20$ (約1ヶ月) の結果は表3 (続き) に示した。平均の値を見てみると、 μ_0 はすべての分布において負に有意、 μ_1 についても $M_f=10$ の t 分布以外はすべて正に有意となっており、 $M_f=5$ の結果とほぼ同じである。また、ここでもすべての分布において ω_0 の値は ω_1 より大きく、ボラティリティはベア局面のときのほうが大きい。さらに、ボラティリティの非対称性パラメータの値は、ベア局面のほうが負の方向に大きな値になっているという結果も変わらない。skewed- t 分布の歪みパラメータについては、ブルとベアの両局面において1より小さい値であり、 $M_f=5$ のケースと同じである。しかしながら、ベア局面だけでなくブル局面においても有意水準5%で有意となっている点は異なる。このことは、ブル・ベア局面に分割した時系列モデルで分析をする際に、ブル局面でも左に歪んだ分布を用いるべきか否かは、トレンドの最低継続日数をどの程度に設定するか依存していることを示している。

モデルの当てはまり具合に関しては、どちらのトレンド最低継続日数においても対数尤度はskewed- t 分布が最も高い。AICの基準でもこの分布が選択されるが、SBICでは t 分布が選ばれている。これらの結果は $M_f=5$ のケースと同様である。したがって、トレンドの最低継続日数の長さにかかわらず、誤差項の分布としては正規分布やskewed正規分布ではなく、裾の厚い t 分布、もしくは裾が厚く左右非対称のskewed- t 分布が適当であると考えられる。また、尤度比検定の値はすべて有意であり、 $M_f=5$ のときと同じ結果である。よって、トレンドの最低継続日数とは関係なく、TOPIXの時系列変動はブル局面とベア局面で異なっていると考えられる。

3.3 ワールド検定の結果

前節の尤度比検定によってTOPIXの時系列変動がブル局面とベア局面で異なっていることが明らかになったが、個々のパラメータの値がブル局面とベア局面で異なっているかについては、ワールド検定で調べることができる。例えば、収益率の平均に関する帰無仮説は

$$H_0: \mu_0 = \mu_1$$

となる。そのワールド統計量は

表 4 ワルド検定

		$\mu_0=\mu_1$	$\omega_0=\omega_1$	$\beta_0=\beta_1$	$\theta_0=\theta_1$	$\gamma_0=\gamma_1$	$\nu_0=\nu_1$	$\xi_0=\xi_1$
$M_f=5$	N	395.47**	47.39**	0.04	26.42**	0.00	—	—
	t	374.28**	42.81**	0.48	14.78**	0.15	1.25	—
	skN	393.44**	14.91**	0.09	27.53**	0.43	—	13.88**
	skt	534.36**	20.31**	0.74	16.83**	0.51	0.69	4.50*
$M_f=10$	N	140.68**	24.17**	0.19	9.38**	0.63	—	—
	t	1.69	5.08*	0.04	0.63	0.22	0.65	—
	skN	138.07**	10.97**	0.98	8.70**	2.39	—	5.98*
	skt	172.89**	14.77**	0.00	2.95	1.11	0.75	1.12
$M_f=20$	N	76.40**	12.47**	0.16	10.54**	0.64	—	—
	t	65.42**	11.48**	0.17	2.00	0.32	0.01	—
	skN	74.60**	3.17	0.03	7.82**	2.27	—	7.71**
	skt	65.25**	5.18*	0.02	1.66	1.00	0.19	2.18

注) **, * は, それぞれ有意水準 1%, 5% で有意であることを示す。

出所) 筆者作成。

$$W_T = \frac{(\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1)^2}{\text{Var}(\hat{\mu}_0) + \text{Var}(\hat{\mu}_1) - 2\text{Cov}(\hat{\mu}_0, \hat{\mu}_1)}$$

となり, W_T は自由度 1 の χ^2 分布に従う。他のパラメータにおいても同様に検定を行う。

表 4 の結果を見てみると, 平均については $M_f=10$ の t 分布以外は, どの分布についても有意となっている。また, ボラティリティの定数項の値は, $M_f=20$ の skewed 正規分布を除いてすべて有意である。どの推定値についても ω_0 の値は ω_1 より大きく, 前節のモデル選択で skewed 正規分布は選択されていないことから, トレンドの持続期間とは関係なく, ボラティリティはベア局面のときのほうが大きいと考えられる。ボラティリティの持続性に関する検定 ($H_0: \beta_0 = \beta_1$) では, すべてのトレンド最低継続日数, ならびに分布において有意ではない。このことは, ブル局面とベア局面でボラティリティの持続性に違いは無いということを示している。ボラティリティの非対称性に関する検定 ($H_0: \theta_0 = \theta_1$) では, $M_f=5$ においてはすべての分布で有意であり, それ以上のトレンド最低継続日数では, 正規分布と skewed 正規分布で有意となっている。前節のモデル選択ではこれらの 2 つの分布は選択されなかったことから, ボラティリティの非対称性の強さの違いは, トレンド最低継続日数が短いときのみ観察されるといえる。誤差項の分布の歪みに関する検定 ($H_0: \xi_0 = \xi_1$) では, skewed- t 分布のみに注目すると, $M_f=5$ のときだけ有意となっている。このことは, トレンド最低継続日数が短いケースでは, ベア局面では左に歪んだ分布, ブル局面では左右対称な分布を用いたほうが良いことを示している。また, t 分布と skewed- t 分布の自由度に関しては, ブルとベアで違いは無いという結果になった。

4. 結論と今後の課題

本研究では, 資産価格の時系列変動がブル局面とベア局面でどのように異なっているかを調べるため

に、TOPIX の日次データを用いて分析を行った。実証分析の結果から、トレンドの最低継続日数の長さとは関係なく、TOPIX のボラティリティはベア局面のときのほうが大きいこと、また、誤差項の分布には t 分布もしくは skewed- t 分布が適当であることが明らかになった。さらに、トレンドの最低持続日数が短いケースでは、ボラティリティの非対称性はベア局面のほうが強いこと、誤差項の分布はブル・ベア局面によって歪み具合が異なり、ベア局面のときは左に歪んだ分布、ブル局面では左右対称な分布であることが示された。

今回の研究ではボラティリティのモデルとして EGARCH モデルのみを採用したが、今後の課題としては、ボラティリティの定式化をそれ以外のモデル、例えば FIEGARCH モデルなどにした場合に、どのような分析結果が得られるかについて調べる必要がある。また、TOPIX 以外の金融データについても同様な結果が得られるかどうか、比較と検討を行っていきたい。

5. 補論

(2.11) 式に示した skewed- t 分布は、 $\nu \rightarrow \infty$ のとき、skewed 正規分布に収束する⁸⁾。スターリングの公式⁹⁾を用いると、(2.11) 式の $\Gamma((\nu+1)/2)$ と $\Gamma(\nu/2)$ は、

$$\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \simeq \sqrt{2\pi} \left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (5.1)$$

$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \simeq \sqrt{2\pi} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\nu}{2}} \quad (5.2)$$

と近似することができる。この2式より、

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} &\simeq \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\nu+1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\nu}{2}}} = \frac{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{\nu+1}{2}}}{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\nu}{2}}} = \left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{\nu}\right]^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となることから、 $\nu \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (\nu-2)^{-\frac{1}{2}} &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{\nu}\right]^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{1}{2}} (\nu-2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{\nu}}} \left[1 + \frac{1}{\nu}\right]^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\left(1 + \frac{(sz_t + m)^2}{\nu - 2} \xi^{-2I_t}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} = \left[\left(1 + \frac{(sz_t + m)^2}{\nu - 2} \xi^{-2I_t}\right)^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{(sz_t + m)^2}{\nu - 2} \xi^{-2I_t}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

より, 右辺の各項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{(sz_t + m)^2}{\nu - 2} \xi^{-2I_t}\right)^\nu\right]^{-\frac{1}{2}} &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{(sz_t + m)^2}{\nu - 2} \xi^{-2I_t}\right)^{\nu-2} \left(1 + \frac{(sz_t + m)^2}{\nu - 2} \xi^{-2I_t}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \exp\left\{-\frac{(sz_t + m)^2}{2} \xi^{-2I_t}\right\}, \\ \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(sz_t + m)^2}{\nu - 2} \xi^{-2I_t}\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 \end{aligned}$$

となる. 以上の結果より, (2.17) 式の確率密度関数が得られる. (2.18) 式の m , (2.21) 式の $E(|z_{t-1}|)$ に関しても同様に, (2.12) 式, (2.15) 式それぞれにおいて $\nu \rightarrow \infty$ とすると得られる.

注

- 1) ブル・ベア局面の他の識別手法としては, マルコフ・スイッチング・モデルが知られている. 里吉・三井 (2016) は, マルコフ・スイッチング EGARCH モデルを用いて日経平均株価についてブル・ベア分析を行っている.
- 2) ボラティリティの非対称性とは, 価格が上昇した翌日のボラティリティよりも下落した翌日のボラティリティの方が高くなる傾向のことであり, 日経平均株価などの株価指数で顕著に見られる現象である.
- 3) 中島・大森 (2011) は, 左右非対称な分布として一般化双曲型非対称 t 分布の使用を提案し, 米国の株価指数 S&P500 の分析を行っている.
- 4) skewed- t 分布についての詳細は, Fernández and Steel (1998), Lambert and Laurent (2001), Giot and Laurent (2003, 2004) を参照のこと.
- 5) Laurent and Peters (2002) を参照のこと.
- 6) skewed 正規分布の導出, ならびに (2.21) 式の導出は補論を参照のこと.
- 7) OxMetrics 7.10 の詳細は, <http://www.timberlake.co.uk/software/oxmetrics.html> を参照のこと.
- 8) この節の証明は, 養谷 (2009) の 8.3.4 節を参考にした.
- 9) ガンマ関数の近似値を与える公式であり, $\Gamma(n+1) \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ が成り立つ. (5.1), (5.2) 式の近似は, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ より $\Gamma(n) \simeq \sqrt{2\pi n} n^{-\frac{1}{2}} e^{-n}$ となることを利用している.

参考文献

- 里吉清隆・三井秀俊 (2016) 「日経平均株価のトレンドとオプション評価: Markov Switching EGARCH モデルによる分析」『証券経済研究』, 第 96 号, pp.59-82.
- 柴田舞 (2010) 「我が国におけるブル・ベア市場の区別とリターンの統計分析」津田博史・山田雄二・中妻照雄編『定量的信用リスク評価とその応用—ジャフイー・ジャーナル 金融工学と市場計量分析』, pp.186-220.
- 中島上智・大森裕浩. (2011) 「一般化双曲型非対称 t 分布を用いた確率的ボラティリティ変動モデルの推定と株価収益率データへの応用」『日本統計学会誌』, 第 40 巻, 第 2 号, pp.61-88.

- 三井秀俊 (2012) 「日本の商品先物市場におけるボラティリティの長期記憶性に関する分析」 日本大学経済学部経済科学研究所, Working Papers, 11-04.
- (2013) 「Fractionally Integrated ARCH 型モデルによる日経 225 先物価格の分析」 日本大学経済学部産業経営研究所『産業経営研究』, 第 35 号, pp.23-33.
- 蓑谷千風彦 (2009) 『数理統計ハンドブック』 みみずく舎.
- 渡部敏明・佐々木浩二 (2006) 「ARCH 型モデルと “Realized Volatility” によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク」 『金融研究』, 第 25 号, 第 2 巻, pp.39-74.
- Bry, G. and C. Boschan (1971) “Cyclical Analysis of Time Series: Selected Procedures and Computer Programs,” NBER.
- Fernández, C. and M. F. J. Steel (1998) “On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness,” *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 93, No. 441, pp.359-371.
- Giot, P. and S. Laurent (2003) “Value-at-Risk for Long and Short Trading Positions,” *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 18, No. 6, pp.641-664.
- (2004) “Modelling Daily Value-at-Risk Using Realized Volatility and ARCH Type Models,” *Journal of Empirical Finance*, Vol. 11, No.3, pp.379-398.
- Gonzalez, L., J. G. Powell, J. Shi and A. Wilson (2005) “Two Centuries of Bull and Bear Market Cycles,” *International Review of Economics & Finance*, Vol. 14, No. 4, pp.469-486.
- Lambert, P. and S. Laurent (2001) “Modelling Financial Time Series Using GARCH-Type Models with a Skewed Student Distribution for the Innovations,” Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain Discussion Paper, 0125.
- Laurent, S. and J. P. Peters (2002) “A Tutorial for G@RCH 2.3, a Complete Ox Package for Estimating and Forecasting ARCH Models,” mimeo.
- Lunde, A. and A. Timmermann (2004) “Duration Dependence in Stock Prices: An Analysis of Bull and Bear Markets,” *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol.22, No.3, pp.253-273.
- Nelson, D. B. (1991) “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach,” *Econometrica*, Vol. 59, No. 2, pp.347-370.
- Pagan, A. R. and K. A. Sossounov (2003) “A Simple Framework for Analysing Bull and Bear Markets,” *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 18, No. 1, pp.23-46.
- Shibata, M. (2014) “The Influence of Japan’s Unsecured Overnight Call Rate on Bull and Bear Markets and Market Turns,” *Asia-Pacific Financial Markets*, Vol. 21, No. 4, pp.331-349.