

# 非対称分布によるボラティリティの長期記憶性に関する オプション評価法

三井 秀俊<sup>1)</sup>

## 1. はじめに

ボラティリティ変動に関してオプション評価を分析する場合には、Engle (1982) の ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) モデルとそれを一般化した Bollerslev (1986) の GARCH (Generalized-ARCH) モデルを用いることが多い。これら ARCH 型モデル<sup>2)</sup> はファイナンス時系列の非線形性をうまく捉え、オプションの実証研究に対しても有効である。これは、ARCH 型モデルが  $t$  期のボラティリティを  $t-1$  期に既知の変数のみの確定的な関数として定式化し、モデルを拡張しても容易に推定することができるためである。株式市場でよくみられる現象として、現在のボラティリティと前日の収益率との間には負の相関 (非対称性) があることが知られている。しかし、GARCH モデルでは、このようなボラティリティ変動の非対称性は捉えることができない。そこで、ボラティリティ変動の非対称性を捉えるために、Nelson (1991) は EGARCH (Exponential-GARCH) を提案し、Glosten *et al.* (1993) は GJR モデルを提案した。また、ボラティリティには長期記憶性があることが知られており、長期記憶性を捉えるため Baillie *et al.* (1996) は FIGARCH (Fractionally Integrated GARCH) モデルを提案し、Bollerslev and Mikkelsen (1996) は FIEGARCH モデルを提案した。

竹内 (野木森)・渡部 (2008) は、ボラティリティ変動の長期記憶性を考慮することにより日経 225 オプションの実証研究<sup>3)</sup>を行なっている。里吉・三井 (2013) は、原資産収益率の分布の裾の厚さと左右非対称性を捉えるために混合正規分布、混合  $t$  分布と EGARCH モデルを組み合わせた混合正規 EGARCH モデル、混合  $t$  EGARCH モデルにより日経 225 オプションの分析を行なっている。そこで、本論文ではボラティリティの長期記憶性と原資産収益率の分布の裾の厚さと左右非対称性を考慮したオプションの評価法を提示する。ボラティリティの長期記憶性が存在するならば、長期の限月をもつオプションの価格付けがより正確に行なうことができるようになる。長期記憶性を捉えるため Baillie *et al.* (1996) の FIGARCH モデルと Bollerslev and Mikkelsen (1996) の FIEGARCH モデルを使用する。収益率の非対称性を捉える分布として、基準化された skewed-Student  $t$  分布を用いることにする。

本論文の以下の構成は次の通りである。第 2 節では、FIGARCH モデル、FIEGARCH モデルと非対称分布について解説を行なう。第 3 節では、モンテカルロ・シミュレーションによるオプション価格の評価法とオプション価格の比較の説明を行なう。最後の第 4 節では、まとめについて述べる。

## 2. モデル

### 2.1 FIGARCH モデルと FIEGARCH モデル

$t$  時点の原資産収益率を  $R_t$  とする.  $S_t$  を  $t$  時点の原資産価格の水準とすると,  $t$  時点の原資産価格収益率  $R_t$  は以下のように定義される.

$$R_t = (\ln S_t - \ln S_{t-1}) \times 100. \quad (2.1)$$

このとき, 収益率の過程は基本的には以下の3つの過程に分けて記述できる.

$$R_t = \mu + \epsilon_t, \quad (2.2)$$

$$R_t = \mu + \lambda \sigma + \epsilon_t, \quad (2.3)$$

$$R_t = \mu + \lambda \sigma^2 + \epsilon_t. \quad (2.4)$$

定数項  $\mu$  は期待収益率,  $\epsilon_t$  は誤差項であり, 収益率に自己相関は無いと仮定する.  $\lambda$  はリスク・プレミアム<sup>4)</sup>を捉えるパラメータである. ここで, 誤差項  $\epsilon_t$  は,

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad (2.5)$$

$$z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, Var[z_t] = 1 \quad (2.6)$$

とおく. *i.i.d.* は, 過去と独立で同一な分布 (independent and identically distributed) を表す.  $E[\cdot]$  は期待値,  $Var[\cdot]$  は分散を表す. 本論文では, ボラティリティの変動の特性を捉えるために, Baillie *et al.* (1996) が提案した FIGARCH モデルと Bollerslev and Mikkelsen (1996) が提案した FIEGARCH モデルを用いる. FIGARCH ( $p, d, q$ ) モデルは, ボラティリティ  $\sigma_t^2$  が以下の過程で表される<sup>5)</sup>.

$$\sigma_t^2 = \omega [1 - \beta(L)]^{-1} + \{1 - [1 - \beta(L)]^{-1} \phi(L)(1-L)^d\} \epsilon_t^2. \quad (2.7)$$

ここで,  $\beta(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_p L^p$ ,  $\phi(L) = [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1-L)^{-1}$ ,  $\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_q L^q$  を表す. また,  $L$  はラグ・オペレータ (Lag operator) を表し,  $L^i y_t = y_{t-i}$  ( $i=0, 1, \dots$ ) となる.  $(1-L)^d$  は, 以下のように表現される.

$$\begin{aligned} (1-L)^d &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)} L^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\dots(d-k+1)}{k!} (-L)^k. \end{aligned} \quad (2.8)$$

ここで,  $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数 (gamma function)<sup>6)</sup>である.  $(1-L)^d$  における  $d$  が長期記憶性<sup>7)</sup>を捉えるパラメータを示す.  $0 < d < 1$  となるとき, ボラティリティ  $\sigma_t^2$  は長期記憶過程に従っていることがわかる. また,  $0 < d < 0.5$  のとき定常長期記憶過程と呼び,  $0.5 \leq d < 1$  のとき非定常長期記憶過程と呼ぶ.  $d=1$  のとき, ボラティリティ  $\sigma_t^2$  は単位根を持ち非定常過程となる.  $d=0$  のとき短期記憶過程となり, Bollerslev (1986) の GARCH ( $p, q$ ) モデルとなる<sup>8)</sup>. ここで, FIGARCH (1,  $d$ , 1) モデルは以下のように表される.

$$\sigma_t^2 = \omega [1 - \beta_1(L)]^{-1} + \{1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1} \phi_1(L)(1-L)^d\} \epsilon_t^2. \quad (2.9)$$

FIGARCH ( $p, d, q$ ) モデルは、ボラティリティ  $\sigma_t^2$  が以下の過程で表される。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \phi(L)^{-1}(1-L)^{-d}[1 + \alpha(L)]g(z_{t-1}), \quad (2.10)$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma[|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|] \quad (2.11)$$

$$g(z_{t-1}) = \begin{cases} (\theta + \gamma)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|), & \text{if } z_{t-1} > 0, \\ (-\theta + \gamma)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|), & \text{if } z_{t-1} < 0. \end{cases}$$

ここでは、ボラティリティの対数値を被説明変数としてパラメータの非負制約を取り除き定式化されている。  $\theta < 0$  ならば、資産価格が上昇した日の翌日より、資産価格が下落した日の翌日の方がボラティリティは上昇する。このモデルでは、ボラティリティの対数値を被説明変数としているため  $\omega, \beta, \alpha, \theta, \gamma$  に非負制約は必要としない。  $d=0$  のとき、Nelson (1991) の EGARCH ( $p, q$ ) モデルとなる<sup>9)</sup>。

これらのモデルを用いる場合には、AIC (Akaike's Information Criterion) や SIC (Schwarz's Information Criterion) などの情報量基準を用いてモデルの次数選択を行わなければならないが、多くの実証研究においてボラティリティ変動過程の次数を多くしてもあまりパフォーマンスは改善されないことが示されている。FIGARCH モデルと FIGARCH モデルでは、過去の実証研究において  $p=1, q=0$  とする場合が多い<sup>10)</sup>。例えば、FIGARCH (1,  $d, 0$ ) は、以下のように表現される。

$$\sigma_t^2 = \omega[1 - \beta_1(L)]^{-1} + \{1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1}(1-L)^d\} \epsilon_t^2. \quad (2.12)$$

また、FIGARCH (1,  $d, 0$ ) は以下のように表現される。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 - \beta_1(L)]^{-1}(1-L)^{-d}g(z_{t-1}), \quad (2.13)$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma[|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|].$$

## 2.2 非対称分布による誤差項の仮定

資産収益率の分布は、Mandelbrot (1963), Fama (1965) で指摘されているように正規分布よりも裾が厚い分布であることが知られている。また、多くの先行研究では、誤差項の分布に正規分布よりも尖度の高い分布を用いた方が当てはまりが良いとの結果が得られている。したがって、本論文では、 $z_t$  の分布として、基準化された skewed-Student  $t$  分布<sup>11)</sup> を使用することを提案する。

基準化された skewed-Student  $t$  分布の密度関数  $f_{(skt)}(z_t; \nu, \xi)$  は以下のように与えられる。

$$f_{(skt)}(z_t; \nu, \xi) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi(\nu-2)}} \left( \frac{2s}{\xi+1/\xi} \right) \left( 1 + \frac{(sz_t+m)^2}{\nu-2} \xi^{-2t} \right)^{-(\nu+1)/2}, \quad \nu > 2. \quad (2.14)$$

ただし、

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{if } z_t \geq -\frac{m}{s} \\ -1 & \text{if } z_t < -\frac{m}{s} \end{cases} \quad (2.15)$$

とする。ここで、 $\nu$  は自由度を表し分布の厚さを示す。  $\xi$  は非対称パラメータを表し、分布の歪みを示す。また、

$$m = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right), \quad (2.16)$$

$$s = \sqrt{\left( \xi + \frac{1}{\xi} - 1 \right) - m^2} \quad (2.17)$$

である.  $\xi=1$ , あるいは,  $\ln(\xi)=0$  のとき左右対称となり Student- $t$  分布と等しくなる.  $\xi>1$ , あるいは,  $\ln(\xi)>0$  のとき分布の右裾が厚くなる. また,  $\xi<1$ , あるいは,  $\ln(\xi)<0$  のとき分布の左裾が厚くなる.

### 2.3 推定法

パラメータ集合を  $\Theta$  とするとき, FIGARCH  $(1, d, 0)$  モデルの誤差項が skewed-Student  $t$  に従うときには  $\Theta=(\mu, \lambda, \omega, d, \beta_1, \nu, \xi)$  となる. また, FIEGARCH  $(1, d, 0)$  の場合には, 各々の FIGARCH  $(1, d, 0)$  モデルパラメータ集合に  $\theta$  と  $\gamma$  が追加され,  $\Theta=(\mu, \lambda, \omega, d, \beta_1, \theta, \gamma, \nu, \xi)$  となる. このとき尤度関数 (likelihood function) は以下ようになる.

$$\begin{aligned} L(\Theta) &= f(R_1, R_2, \dots, R_T | \Theta) \\ &= \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_t} f\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t}\right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

したがって, 対数尤度関数 (log likelihood function) は,

$$\ln L(\Theta) = -\sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t) + \sum_{t=1}^T \ln f\left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t}\right) \quad (2.19)$$

となる. また, 誤差項となる基準化された skewed-Student  $t$  分布に対する対数尤度関数  $\ln L_{(skt)}$  と FIEGARCH  $(1, d, 0)$  モデルにおいて, (2.13) 式の基準化された skewed-Student  $t$  分布に対する  $E(|z_t|)_{(skt)}$  は, 各々,

$$\begin{aligned} \ln L_{(skt)} &= T \left\{ \ln \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln [\pi(\nu-2)] + \ln \left( \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \right) + \ln(s) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left\{ \ln(\sigma_t^2) + (\nu+1) \ln \left[ 1 + \frac{(sz_t + m)^2}{\nu-2} \xi^{-2t} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$E(|z_t|)_{(skt)} = \frac{4\xi^2}{\xi + 1/\xi} \frac{\Gamma((1+\nu)/2)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)} \quad (2.21)$$

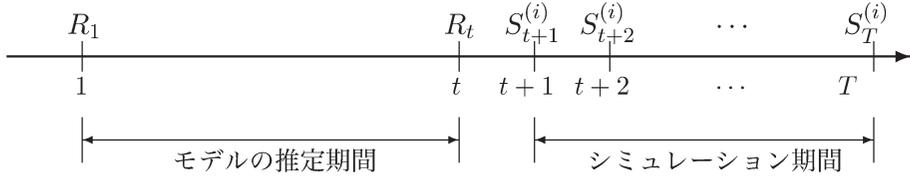
となる. パラメータの推定に関しては, 対数尤度関数を最大化することにより行なえば良い.

## 3. オプション価格

### 3.1 モンテカルロ・シミュレーションによるオプション価格の導出

投資家がリスク中立な場合, ヨーロピアン・オプションの価格は, リスク・プレミアムが存在しないため満期におけるオプション価格の期待値を無リスク資産の利率  $r$  で割り引いた割引現在価値となる<sup>12)</sup>.  $t$  時点を評価日,  $T$  時点をオプションの満期日,  $C_t^{Euro}$  を権利行使価格  $K$  のコール・オプションの

図1 モデルの推定とモンテカルロ・シミュレーションの期間; 里吉・三井 (2013)



$t$  時点の価格,  $P_t^{Euro}$  をプット・オプションの価格とすると,  $C_t^{Euro}$  と  $P_t^{Euro}$  は, 各々, 以下の式で表される.

$$C_t^{Euro} = e^{-(T-t)r} E[\text{Max}(S_T - K, 0)], \quad (3.1)$$

$$P_t^{Euro} = e^{-(T-t)r} E[\text{Max}(K - S_T, 0)]. \quad (3.2)$$

ここで,  $S_T$  はオプションの満期の原資産価格である. FIGARCH モデル, FIEGARCH モデルの場合, 右辺の期待値を解析的に求めることができないので, 一般的にモンテカルロ・シミュレーションによって評価する. シミュレーションを  $N$  回行ない,  $N$  個の満期の原資産価格  $S_T$  が得られたとして, これらを  $(S_T^{(1)}, S_T^{(2)}, \dots, S_T^{(N)})$  とする. ただし,  $S_T^{(i)}$  は  $i$  回目のパスの発生によって得られた満期の原資産価格である.  $N$  が十分に大きいとき, 大数の法則 (law of large number) より (3.1) 式と (3.2) 式は, 各々, 以下の式によって評価することができる.

$$C_t^{Euro} \approx e^{-(T-t)r} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Max}(S_T^{(i)} - K, 0), \quad (3.3)$$

$$P_t^{Euro} \approx e^{-(T-t)r} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Max}(K - S_T^{(i)}, 0). \quad (3.4)$$

図1には, モデルの推定とモンテカルロ・シミュレーションの期間が描かれている.  $R_1$  から  $R_t$  までの日経225株価収益率のデータにより FIGARCH モデル, FIEGARCH モデルのパラメータを推定を行なう. 次に, 推定されたパラメータを基にしてモンテカルロ・シミュレーションにより満期日  $T$  での日経225株価  $S_T^{(i)}$  を求め, 最後に割引現在価値の期待値としてオプション価格  $C_t^{Euro}, P_t^{Euro}$  を導出することができる. モンテカルロ・シミュレーションによるオプション評価に関して, 詳しくは Barraquand (1995), Broadie and Glasserman (1996), Boyle *et al.* (1997), Ross (2002) を参照して頂きたい.

### 3.2 モンテカルロ・シミュレーションの手順

モンテカルロ・シミュレーションによるオプション価格の計算手順は以下の通りである. ここでは, FIGARCH モデルについて説明する.

- [1] 標本  $\{R_1, R_2, \dots, R_T\}$  を使って, FIGARCH モデルの未知パラメータ  $\{\mu, \lambda, \omega, d, \beta_1, \nu, \xi\}$  を最尤推定する.
- [2] 互いに独立な標準正規分布から正規乱数  $\{z_{T+1}^{(i)}, z_{T+2}^{(i)}, \dots, z_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^N$  を生成する.
- [3] 互いに独立な標準一様分布から一様乱数  $\{u_{T+1}^{(i)}, u_{T+2}^{(i)}, \dots, u_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^N$  を生成する.
- [4] 手順 [1] で推定されたパラメータ  $\{\hat{\mu}, \hat{\lambda}, \hat{\omega}, \hat{d}, \hat{\beta}_1, \hat{\nu}, \hat{\xi}\}$  と手順 [2], [3] の乱数を使って  $T+1$  時点から  $T+\tau$  時点までの収益率,  $\{R_{T+1}^{(i)}, R_{T+2}^{(i)}, \dots, R_{T+\tau}^{(i)}\}_{i=1}^N$  を計算する.

表1 マネネスによるオプションの分類；7つのカテゴリーのケース

マネネス	コール	プット
$S/K < 0.85$	very-deep-out-of-the-money (VDOTM)	VDITM
$0.85 \leq S/K < 0.91$	deep-out-of-the-money (DOTM)	DITM
$0.91 \leq S/K < 0.97$	out-of-the-money (OTM)	ITM
$0.97 \leq S/K \leq 1.03$	at-the-money (ATM)	ATM
$1.03 < S/K \leq 1.09$	in-the-money (ITM)	OTM
$1.09 < S/K \leq 1.15$	deep-in-the-money (DITM)	DOTM
$1.15 < S/K$	very-deep-in-the-money (VDITM)	VDOTM

(注)  $S$  は原資産価格,  $K$  は権利行使価格を表す。

[5] 次の式を使ってオプションの満期  $T+\tau$  時点における原資産価格 ( $S_{T+\tau}^{(1)}, S_{T+\tau}^{(2)}, \dots, S_{T+\tau}^{(n)}$ ) を求める。

$$S_{T+\tau}^{(i)} = S_T \prod_{s=1}^{\tau} (1 + R_{T+s}^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

[6] (3.3), (3.4) 式より, コール・オプションの価格  $C_T$ , プット・オプションの価格  $P_T$  をそれぞれ計算する。

また, モンテカルロ・シミュレーションの精度を高めるために, 様々な分散減少法 (variance reduction method) が考案されており<sup>13)</sup>, 例えば, 制御変量法などの分散減少法を利用すればよい<sup>14)</sup>。また, FIGARCH モデルに関しても同様の手順でオプション価格を求めることができる。

### 3.3 オプション価格の比較

オプション価格の評価値と, 実際の市場価格を用いて, 以下のように平均誤差率 (Mean Error Rate; MER) と平均2乗誤差率の平方根 (Root Mean Square Error Rate; RMSER) を計算し, モデルの比較を行なう。

$$\text{MER} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\hat{C}_i^{\text{推定値}} - C_i^{\text{市場価格}}}{C_i^{\text{市場価格}}} \right),$$

$$\text{RMSER} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\hat{C}_i^{\text{推定値}} - C_i^{\text{市場価格}}}{C_i^{\text{市場価格}}} \right)^2}.$$

ここで,  $\hat{C}_i^{\text{推定値}}$  はモンテカルロ・シミュレーションによるコール・オプションの推定値, あるいは, Black-Scholes モデルの理論価格を表し,  $C_i^{\text{市場価格}}$  はコール・オプションの価格の価格を表す。  $N$  は標本サイズである。MER の値を計算することにより, モデルの推定値が市場価格と比べてどの程度バイアスを持っているかが明らかになる。もう1つのRMSERは, 推定値と市場価格の乖離度を示す基準である。マネネスは表1のように7種類のカテゴリーに分類して分析すれば良い。

## 4. まとめ

本論文では, オプションの原資産収益率の分布の左右非対称性とボラティリティの長期記憶性を捉える skewed-Student  $t$  分布による FIGARCH モデル, ならびにレバレッジ効果を同時に捉える skewed-Student  $t$  分布による FIGARCH モデルをヨーロッパ・オプション評価へ応用することに関して解説

を行なった。実際に、日経 225 オプション、TOPIX オプションであれば、原資産となる日経 225 (日経平均) や TOPIX (東証株価指数) のデータがあれば、本論文で提示した FIGARCH モデルと FIEGARCH モデルによるオプション価格を推定することができる。モデルの拡張としては、投資家のリスク中立性を仮定するのではなく、Duan (1995) や Siu et al. (2004) のようにリスク中立測度 (risk neutral measure) を考慮して定式化を行なうことも有効であると考ええる。

## 注

- 1) 日本大学経済学部 教授, E-mail: mitsui.hidetoshi@nihon-u.ac.jp
- 2) ARCH 型モデルの理論と金融市場への応用・実証例として、詳しくは Xekalaki (2010) を参照。
- 3) その他の ARCH 型モデルを利用した日経 225 オプション評価に関する実証研究としては、森保 (1999)、三井 (2000)、三井・渡部 (2003)、渡部 (2003)、竹内 (2006)、Satoyoshi and Mitsui (2011)、里吉・三井 (2016)、Takeuchi-Nogimori (2017) がある。
- 4) リスク資産の期待収益率と無リスク資産収益率との差をリスク・プレミアムと呼ぶ。収益率の過程にボラティリティを説明変数として組み込んで定式化している。
- 5) あるいは、以下のように表現される。

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \omega^* + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i L^i \epsilon_t^2 \\ &= \omega^* + \phi(L) \epsilon_t^2, 0 \leq d \leq 1.\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\omega^* &= \omega [1 - \beta(L)]^{-1}, \\ \phi(L) &= 1 - [1 - \beta(L)]^{-1} \phi(L) (1 - L)^d.\end{aligned}$$

- 6) ガンマ関数は以下のように定義される。

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx, \text{ for } \nu > 0.$$

- 7)  $k$  の自己相関係数 (autocorrelation coefficient) を  $\rho(k)$  とするとき、 $\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| < \infty$  ならば短期記憶過程に従い、 $\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| = \infty$  ならば長期記憶過程に従う。長期記憶性に関して詳しくは、矢島 (2003)、松葉 (2007)、増川・他 (2011) を参照。
- 8) GARCH( $p, q$ ) モデルは、ボラティリティ  $\sigma_t^2$  が以下の過程で表される。

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

ラグ・オペレータ  $L$  を用いると GARCH( $p, q$ ) モデルは、以下のように表現される。

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L) \epsilon_t^2 + \beta(L) \sigma_t^2.$$

- 9) EGARCH( $p, q$ ) は、ボラティリティ  $\sigma_t^2$  が以下の過程で表される。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) + \sum_{i=1}^q \alpha_i [\theta z_{t-i} + \gamma(|z_{t-i}| - E(|z_{t-i}|))].$$

ラグ・オペレータ  $L$  を用いると EGARCH( $p, q$ ) モデルは、以下のように表現される。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 - \beta(L)]^{-1} [1 + \alpha(L)] g(z_{t-1}),$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma [ |z_{t-1}| - E |z_{t-1}| ].$$

- 10) 日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性の研究として、渡部・佐々木 (2005, 2006)、竹内 (野木森)・渡部 (2008)、竹内 (野木森) (2012) がある。これらの研究では、FIEGARCH (1, d, 0) モデルにより実証分析を行なっている。
- 11) Giot and Laurent (2004) は、Fernández and Steel (1998) の提案した skewed-Student  $t$  分布を利用して ARCH 型モデルを基にした VaR (Value-at-Risk) に適用して株価指数と外国為替レートの分析を行なっている。
- 12) オプション価格を評価する  $t$  時点においては、 $t$  時点から  $t+1$  時点にかけての無リスク資産の利子率  $r_{t+1}$  は既知であるが、その先の利子率は未知である。したがって、 $t$  時点から満期である  $T$  時点までの利子率は一定であると仮定し、 $r = r_{t+1}, r_{t+2}, \dots, r_T$  とおいて現在価値を計算することになる。
- 13) 制御変数法 (Control Variates), 負相関法 (Antithetic Variates), 層別サンプリング (Stratified Sampling), ラテン・ハイパーキューブ・サンプリング (Latin Hypercube Sampling), 加重サンプリング (Importance Sampling), ラティス法 (Lattice Method) などの様々な手法が提案されている。詳しくは、森平・小島 (1997), 湯前・鈴木 (2000) を参照。
- 14) 詳しくは、Satoyoshi and Mitsui (2011) の Appendix B を参照のこと。

## 参考文献

- [1] 里吉清隆・三井秀俊 (2013), 「原資産の収益率に歪みがある場合のオプション評価—混合正規 EGARCH モデルによる分析—」, 『日本統計学会誌』, 第 43 巻, 第 1 号, pp.1-23.
- [2] 里吉清隆・三井秀俊 (2016), 「日経平均株価のトレンドとオプション評価—マルコフ・スイッチング EGARCH モデルによる分析—」, 日本証券経済研究所 『証券経済研究』, 第 96 号, pp.59-82.
- [3] 竹内明香 (2006), 「日経 225 オプション価格の実証分析—ARCH, ARCH-t, SV モデルによる比較」, 『一橋経済学』, 2, pp.187-208.
- [4] 竹内 (野木森) 明香 (2012), 「個別株式ボラティリティの長期記憶性と非対称性の FIEGARCH モデルと EGARCH モデルによる実証分析」, 日本統計学会 『日本統計学会誌』, 第 42 巻, 第 1 号, pp.1-23.
- [5] 竹内 (野木森) 明香・渡部敏明 (2008), 「日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性とオプション価格」, MTP フォーラム・日本ファイナンス学会 『現代ファイナンス』, No.24, pp.45-74.
- [6] 増川純一・水野貴之・村井浄信・尹熙元 (2011), 『株価の経済物理学』, 培風館.
- [7] 松葉育雄 (2007), 『長期記憶過程の統計—自己相似な時系列の理論と方法—』, 共立出版.
- [8] 三井秀俊 (2000), 「日経 225 オプション価格の GARCH モデルによる分析」, MTP フォーラム・日本ファイナンス学会 『現代ファイナンス』, No.7, pp.57-73.
- [9] 三井秀俊 (2014a), 「ARCH 型モデルによる日経 225 オプションの実証研究に関するサーベイ」, 日本証券経済研究所 『証券経済研究』, 第 87 号, pp.41-60.
- [10] 三井秀俊 (2014b), 『ARCH 型モデルによる金融資産分析』, 税務経理協会.
- [11] 三井秀俊, 渡部敏明 (2003), 「バイズ推定法による GARCH オプション価格付けモデルの分析」, 日本統計学会 『日本統計学会誌』, 33, pp.307-324.
- [12] 森平爽一郎・小島裕 (1997), 『コンピュータシヨナル・ファイナンス』 (ファイナンス講座 4), 朝倉書

店.

- [13] 森保洋 (1999), 「ARCH モデルによる日経 225 オプション評価」, 『現代経済学研究』 7, pp.143-159.
- [14] 矢島美寛 (2003), 「長期記憶をもつ時系列モデル」, 刈屋武昭・田中勝人・矢島美寛・竹内啓 [著], 『経済時系列の統計 —その数理的基礎—』 (統計科学のフロンティア 8), 岩波書店, pp.103-202.
- [15] 湯前祥二・鈴木輝好 (2000), 『モンテカルロ法の金融工学への応用』 (シリーズ〈現代金融工学〉 6), 朝倉書店.
- [16] 渡部敏明 (2003), 「日経 225 オプションデータを使った GARCH オプション価格付けモデルの検証」, 『金融研究』 22, pp.1-34.
- [17] 渡部敏明・佐々木浩二 (2005), 「日経 225 先物価格を用いた FIEGARCH モデルの推定」, 大阪証券取引所『先物・オプションレポート』, Vol.17, No.8, pp.1-4.
- [18] 渡部敏明・佐々木浩二 (2006), 「ARCH 型モデルと“Realized Volatility”によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク」, 日本銀行金融研究所『金融研究』, 第 25 巻, 別冊第 2 号, pp.39-74.
- [19] Baillie, R. T., T. Bollerslev and H. O. Mikkelsen (1996), “Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 74, pp. 3-30.
- [20] Barraquand, J. (1995), “Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate European Securities,” *Management Science*, 41, pp. 1882-1891.
- [21] Bollerslev, T. (1986) “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31, pp.307-327.
- [22] Bollerslev, T. and H. O. Mikkelsen (1996), “Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility,” *Journal of Econometrics*, 73, pp. 151-184.
- [23] Boyle, P., M. Broadie and P. Glasserman (1997), “Monte Carlo Methods for Security Pricing,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, pp. 1267-1321.
- [24] Broadie, M. and P. Glasserman (1996), “Estimating Security Price Derivatives Using Simulation,” *Management Science*, 42, pp. 269-285.
- [25] Duan, J. -C. (1995), “The GARCH Option Pricing Model,” *Mathematical Finance*, 5, pp. 13-32.
- [26] Fama, E. (1965) “The Behavior of Stock Prices,” *Journal of Business*, 38, pp.34-105.
- [27] Fernández, C. and M. F. J. Steel (1998), “On Bayesian modeling of Fat Tails and Skewness,” *Journal of the American Statistical Association*, 93, pp. 359-371.
- [28] Giot, P. and S. Laurent (2004), “Modelling Daily Value-at-Risk Using Realized Volatility and ARCH Type Models,” *Journal of Empirical Finance*, 11, pp. 379-398.
- [29] Glosten, L. R., R. Jagannathan and D. Runkle (1993), “On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks,” *Journal of Finance*, 48, pp. 1779-1801.
- [30] Mandelbrot, B. (1963) “The Variation of Certain Speculative Prices,” *Journal of Business*, 36, pp.394-416.
- [31] Nelson, D. B. (1991) “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach,” *Econometrica*, 59, pp.347-370.
- [32] Ross, S. M. (2002), *Simulation*, 3rd ed. Academic Press.
- [33] Satoyoshi K. and H. Mitsui (2011), “Empirical study of Nikkei 225 options with the Markov Switching GARCH model,” *Asia-Pacific Financial Markets*, Vol.18, No.1, pp. 55-68.
- [34] Siu, T. K., Tong, H. and H. Yang (2004), “On Pricing Derivatives under GARCH Models: A Dynamic Gerber-

Shiu's Approach," *North American Actuarial Journal*, 8, pp. 17-31.

[35] Takeuchi-Nogimori, A. (2017), "An Empirical Analysis of the Nikkei 225 Options Using Realized GARCH Models," *The Economic Review(Keizai Kenkyuu)*, Vol.68, No.2, pp. 97-113.

[36] Xekalaki, E. and S. Degiannakis (2010), *ARCH Models for Financial Applications*, Wiley.