

# 待ち行列システムにおける AI 的制御について

大澤 秀雄

## 1. はじめに

システムに対して、何らかのサービスを求めランダムに到着する呼客を受け入れ、その要求が満たされると呼客はシステムを退去する。呼客の要求はランダムなサービス時間として表し、システムの混雑状況を確率過程としてモデル化して解析する研究が 20 世紀に待ち行列理論 (Queuing Theory) として非常に盛んに行われ、ほとんどのシステムは解析しつくされたとも考えられる状況である。

その中で、待ち行列における混雑を緩和する制御理論は、余り行われていない。通常システムでは待合室が有限であることが現実的である。この場合、待合室に空きがない時点で到着した呼客はシステムに入ることもサービスを受けることもできず呼損となる。呼損は文字通り、システムにとっても呼客にとっても利することのない損失であり、できるだけ避けるべきものである。呼損が大量に起こるのは、システムにおいて呼客の到着が過大となり、サービス時間とのバランスがとれていないことに起因する。この論文では、こうした呼損を少しでも避ける方策を考察する。特に、AI 的な制御に繋がる制御方式を探り提案することを目的とする。待ち行列におけるこのような制御法を扱った研究は知られておらず、本論文がそのような道筋をつけることを願うものである。

本論文の構成は次の通り。第 2 節では、基本的な待ち行列システムである複数窓口、待合室有限の  $M/M/c/K$  について呼客の輻輳状況を見る。同じシステムについて、第 3 節では待合室の増加でのシミュレーションモデルを作成し、その実行により呼損を制御する効果がそれほど望めないことを確認する。そして、第 4 節では呼損を制御するための新たな方式を提案し、第 3 節と同じ設定のもとでシミュレーションを作成および実行しその効果を確認する。次に、第 5 節では呼客の到着が一定間隔の場合について、同様の制御法が効果をもたらすことをシミュレーションにより確認する。最後に第 6 節では今後の課題等についてまとめる。

## 2. 基本的な待ち行列系の輻輳

待合室有限の複数窓口型の待ち行列系において、基本的なものは  $M/M/c/K$  である。このシステムは次のように定式化されている。

- ポアソン到着過程：呼客のシステムへの到着間隔はパラメータ  $\lambda$  (正の定数) の指数分布 (M) に従う。

$t_n$  を  $n$  番目の呼の到着時刻とする。ここで、

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots, t_0 = 0,$$

$T_n = t_n - t_{n-1}$ , ( $n=1, 2, \dots$ ) を  $n$  番目の到着時間間隔として,  
到着時間過程  $\{T_n, n=1, 2, \dots\}$  は互いに独立で同一の確率分布関数

$$d.f. P[T_n \leq x] = 1 - e^{-\lambda x}, (x \geq 0)$$

に従い, 確率密度関数  $p.d.f. \lambda e^{-\lambda x}$ , ( $x \geq 0$ ) をもつ.

- サービス過程: 各呼客はシステムに対して, パラメータ  $\mu$  (正の定数) の指数分布 (M) に従う. すなわち,  $S_n$  を  $n$  番目の呼客のサービス時間要求量として,  $\{S_n, n=1, 2, \dots\}$  は互いに独立で同一の確率分布関数

$$d.f. P[S_n \leq x] = 1 - e^{-\mu x}, (x \geq 0)$$

に従い, 確率密度関数  $p.d.f. \mu e^{-\mu x}$ , ( $x \geq 0$ ) をもつ.

- 窓口数  $c$ : システムでは同時に高々  $c$  の呼客に対してサービスを行うことができる.
- 待合室有限: システム内の呼客数はサービス中の呼客も含め最大  $K$  に限られる.  
システム内の呼客数が  $K$  であるときに到着した呼客はシステムに入ることは許されず呼損となる.

このシステムの輻輳状況について考察する.

## 2.1 系内呼数過程

M/M/c/K において, 時刻  $t (\geq 0)$  における系内呼数を  $Q(t)$  とすると, 系内呼数過程  $\{Q(t); t \geq 0\}$  は連続時マルコフ過程であり, 次のような定常状態の存在が広く知られている. ([1],[2],[3])

- 定常状態における系内呼数過程  $Q(t)$  の確率分布 (定常分布) は次式で与えられる.

$P\{Q(t) = i\} = \pi(i)$ , ( $i=0, 1, 2, \dots, K$ ) とすると,

$$\pi(0) = \frac{1 - \rho}{(1 - \rho) \sum_{i=0}^c \frac{(c\rho)^i}{i!} + \rho(1 - \rho^{K-c}) \frac{(c\rho)^c}{c!}},$$

$$\pi(i) = \begin{cases} \frac{(c\rho)^i}{i!} \pi(0), & (0 \leq i \leq c) \\ \frac{c^c}{c!} \rho^i \pi(0), & (c < i \leq K) \end{cases}$$

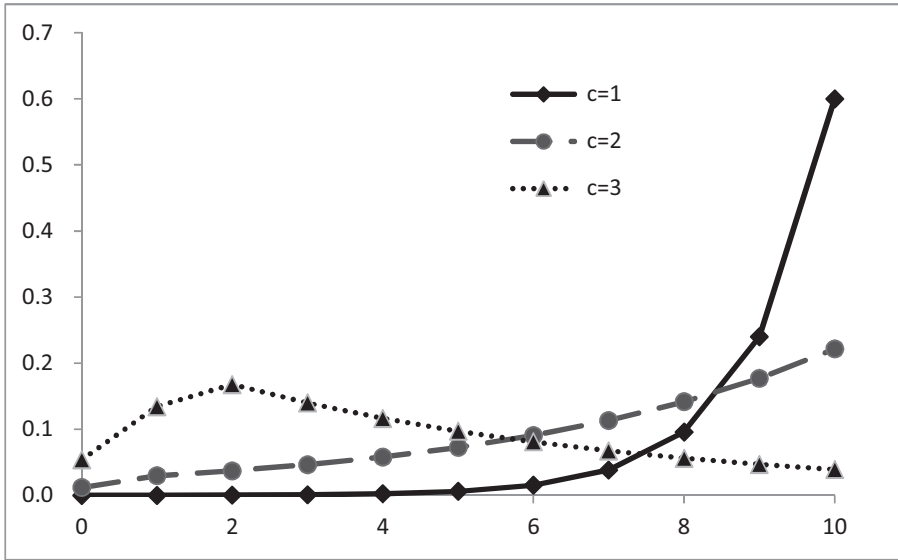
これから平均系内呼数  $E[Q]$  は

$$E[Q] = Q_c + c\rho \left\{ 1 - \frac{(c\rho)^c}{c!} \rho^{K-c} \pi(0) \right\},$$

ここで,  $Q_c = \frac{\rho(c\rho)^c}{c!(1-\rho)} \{1 - (K-c+1)\rho^{K-c} + (K-c)\rho^{K-c+1}\} \pi(0)$ , は待ち呼数の平均であり,  $E[Q] - Q_c$  は稼働窓口数の平均である.

これらの結果は  $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$  が 1 に近いあるいは 1 より大きい値であるとシステムは非常に重い輻輳を被り, 次の例でみられるように正常な働きが望めなくなる.

図 1.1 M/M/c/10 の系内呼数分布



例 2.1 重輻輳の例 ( $K=10, \lambda=1, \mu=0.4$  の場合)

- 図 1.1 の実線のグラフは窓口が 1 ( $c=1$ ) の場合の系内呼数分布  $\{\pi(i); 0 \leq i \leq 10\}$  である。このとき、 $\rho=2.5$  であり大変な重輻輳である。平均系内呼数は  $E[Q]=9.33$ 、その標準偏差は  $D[Q]=1.05$  であり、ほとんど系内呼数は満杯の状況を呈している。
- 窓口が 2 ( $c=2, \rho=1.25$ ) の場合でも、図 1.1 の破線でわかるように重輻輳である。平均系内呼数は  $E[Q]=7.12$ 、その標準偏差は  $D[Q]=2.66$  であり、この場合でも系内呼数は満杯の状況を呈している。
- 窓口が 3 ( $c=3, \rho=0.83 < 1$ ) の場合になると、図 1.1 の点線でわかるように輻輳は改善されている。平均系内呼数は  $E[Q]=4.06$ 、その標準偏差は  $D[Q]=2.72$  であり、この場合は系内呼数は落ち着いた推移を呈しているようにみられる。

## 2.2 呼損

システムの待合室が満杯のため、到着した呼がシステムに入れない場合を呼損という。この節では  $M/M/c/K$  において、呼損の状態について考察する。  $\tau(\geq 0)$  時間内の累積呼損数を  $N(\tau)$  とする。呼損は系内呼数が  $K$  のときに起き、  $K-1$  以下のときは起こらない。すなわち、系内呼数が  $K$  になった時点から  $K-1$  になるまでの間に到着する呼客は呼損となる。この間の呼損数について考える。  $\tau(\geq 0)$  を呼損状態が起きている時間とし、その間の累積呼損数を  $N(\tau)$  とする。この確率分布は  $\tau$  時間内のポアソン分布であり、

$$P[N(\tau)=k] = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}, (k=0, 1, 2, \dots).$$

$\tau$  はパラメータ  $c\mu$  の指数分布なので、呼損状態が起きている時間 1 ターム内の呼損数  $N$  の分布は  $\zeta = \frac{\lambda}{c\mu + \lambda} = \frac{\rho}{1 + \rho}$  とおくと、

$$P[N=k]=\int_0^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} c\mu e^{-c\mu\tau} d\tau=(1-\zeta)\zeta^k, (k=0, 1, 2, \dots).$$

従って、1 ターム内の平均呼損数は  $E[N]=\frac{\zeta}{1-\zeta}=\rho$  となる。次節ではこの呼損状況を緩和する方策を探る。

### 3. 待合室数による制御

最も混雑の激しい窓口 1 の待合室有限システム M/M/1/K における輻輳状況を緩和することを考察する。まず考えられるのは待合室数  $K$  を増やすことによる緩和策である。これに対して、シミュレーションモデルを考えその効果をみることにする。

#### 3.1 シミュレーションモデル 1

混雑状況を把握し、制御するためには系内呼数のみならず、システム内に滞在する各呼客の動きをサービス要求時間の動きとともに記録する必要がある。そこで、次のようなシミュレーションモデルを考える。

- ① システムの状態：呼の到着時点での状態を考える。その時点で処理中の呼客の残余処理時間を  $x_1$  として、 $x_2, x_3, \dots, x_K$  は該当する呼客のサービス要求時間を意味する。ただし、その時点で系内呼客数が  $k$  であるならば、 $x_{k+1}=x_{k+2}=\dots=x_K=0$  となる。このような状況でシステムの状態は  $(x_1, x_2, \dots, x_K) \in \mathbf{R}_+^K$  で表す。ここで、 $\mathbf{R}_+ = \{x \geq 0\}$ 。
- ② 呼の到着：連続する到着呼どうしの到着間隔時間を  $T_n$  とし、パラメータ  $\lambda$  の指数乱数を対応させる。
- ③ サービス要求量：各呼のサービス時間の要求量  $S_n$  に対しても、パラメータ  $\mu$  の指数乱数を発生させ対応させる。
- ④ 開始時点でのシステムの状態： $t_0=0$  において、 $k, (k < K)$  個の呼客がいるものとして、各呼客のサービス要求時間としてパラメータ  $\mu$  の指数乱数  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_k(0)$  をそれぞれあてがう。ここで、 $x_1(0)$  はサービス処理中の残余処理時間となる。また、 $k+1 \sim K$  は空きであり、 $x_{k+1}(0)=x_{k+2}(0)=\dots=x_K(0)=0$  とする。以下、到着時点におけるシステムの状態を記録する。
- ⑤ 第 1 到着時点  $t_1$  における状態： $t_1=t_0+T_1$  において、呼客の到着がありサービス時間  $S_1$  (パラメータ  $\mu$  の指数乱数) をあてがう。これにより、システムの状態は次のように変化する。  
 $y_1(0)=x_1(0)-T_1, y_2(0)=x_2(0)+y_1(0), \dots, y_k(0)=x_k(0)+y_{k-1}(0)$  のうち、負の値のものはサービスが完了済みであることを示しており、すでに退去している状況である。仮に、 $y_i(0)$  までが負の値である場合、 $t_1$  における状態は  $x_1(1)=y_{i+1}(0), x_2(1)=x_{i+2}(0), \dots, x_{k-i}(1)=x_k(0)$ , となり、さらに到着した呼客が受け入れられ  $x_{k-i+1}(1)=S_1, x_{k-i+2}(1)=x_{k-i+3}(1)=\dots=x_K(1)=0$  と変化し、系内呼数は  $k-i+1$  となる。
- ⑥ 第 2 到着時点  $t_2$  以降も同様の状態変化を繰り返す。ただし、第  $n$  到着時点  $t_n$  から次の到着時点  $t_{n+1}=t_n+T_{n+1}$  への状態において  $x_K(n) > 0$  であって、 $t_n$  から  $t_{n+1}$  間に退去した呼客がいない場合、 $x_K(n+1)=x_K(n)$  となり  $t_{n+1}$  の到着呼は呼損となる。

#### 3.2 シミュレーション結果 1

シミュレーションモデル 1 に対して例 2.1 のパラメーターの場合に実験を行い、待合室数による制御

表 3.1  $c=1, K=10, \lambda=1, \mu=0.4$  の場合

項目	平均系内呼数	呼損総数	呼損率	経過時間	時間超過数	超過率
Sim 1	9.783	246	61.5%	404.3	159	39.8%
Sim 2	9.738	252	63.0%	408.5	203	50.8%
Sim 3	9.706	246	61.5%	419.5	205	51.3%
Sim 4	9.823	265	66.3%	375.2	190	47.5%
Sim 5	9.781	266	66.5%	385.3	236	59.0%
Sim 6	9.741	242	60.5%	385.9	155	38.8%
Sim 7	9.781	247	61.8%	386.6	150	37.5%
Sim 8	9.681	245	61.3%	389.2	137	34.3%
Sim 9	9.771	254	63.5%	391.7	206	51.5%
Sim 10	9.658	209	52.3%	425.5	78	19.5%

表 3.2  $c=1, K=15, \lambda=1, \mu=0.4$  の場合

項目	平均系内呼数	呼損総数	呼損率	経過時間	時間超過数	超過率
Sim 1	14.751	249	62.2%	404.3	235	58.8%
Sim 2	14.399	228	57.0%	408.5	174	43.5%
Sim 3	14.651	232	58.0%	419.5	162	40.5%
Sim 4	14.703	243	60.8%	375.2	128	32.0%
Sim 5	14.736	257	64.3%	385.3	240	60.0%
Sim 6	14.733	242	60.5%	385.9	132	33.0%
Sim 7	14.606	236	59.0%	386.6	140	35.0%
Sim 8	14.633	237	59.3%	389.2	150	37.5%
Sim 9	14.564	232	58.0%	391.7	187	46.8%
Sim 10	14.536	206	51.5%	425.5	86	21.5%

の効果を考察する.

- 表 3.1 は呼客到着数 400 に対するシミュレーション実験を 10 回行った結果である. なお, 初期状態を系内呼数 8 からスタートさせる.
- 到着呼数 400 のうち, Sim 10 を除き 60% 以上の呼損があることが観測された. これに対して, 同時に時間超過数を計測した. この場合の時間超過は, 呼 1 個当たりの平均サービス要求時間 2.5 (単位時間) に対して, 10 呼客分の平均要求時間 25 を設定して, 到着時における (系内呼の総サービス要求時間 + 到着呼総サービス要求時間) がこれを超えることを意味する. この超過率をみると, いずれも呼損率を下回る結果となったが, Sim 10 の場合を除きかなり高い超過率を示している.
- この呼損状況を避ける方策としては, 単純に待合室を広げて受容できる呼客数を増やすことと考えられる.

そこで, 待合室数を広げて  $K=15$  として行ったシミュレーション結果を表 3.2 に示す.

- 表 3.2 は前例と全く同じ状況, すなわち到着時間および各呼のサービス要求時間の設定を同じにして,  $K=15$  に広げた場合の実験例である. なお, この場合の時間超過は 15 呼客分の平均要求時間 37.5 を超えることを意味する.
- さらに, 待合室数を増やして  $K=20$  として行ったシミュレーション結果を表 3.3 に示す.

表 3.3  $c=1, K=20, \lambda=1, \mu=0.4$  の場合

項目	平均系内呼数	呼損総数	呼損率	経過時間	時間超過数	超過率
Sim 1	19.536	246	61.5%	468.2	287	71.8%
Sim 2	19.070	227	56.8%	448.4	157	39.3%
Sim 3	19.416	218	54.5%	466.1	123	30.8%
Sim 4	19.623	241	60.3%	417.1	181	45.3%
Sim 5	19.441	224	56.0%	453.0	131	32.8%
Sim 6	19.608	246	61.5%	435.4	247	61.8%
Sim 7	19.406	230	57.5%	467.9	177	44.3%
Sim 8	19.374	229	57.3%	432.8	101	25.3%
Sim 9	19.347	240	60.0%	460.0	183	45.8%
Sim 10	19.087	266	66.5%	460.0	272	68.0%

表 3.3 の結果をみても、呼損を改善できるものではない。なお、この場合の時間超過は 20 呼客分の平均要求時間 50 を超えることを意味する。

- これらをみる限り、待合室を広げて受容できる呼客数を増やすことが、呼損状況を解決することにはならないことがわかる。

#### 4. 複合的制御

前節の結果を考慮し、待合室数およびサービス要求時間に対する複合的な制御方式を考える。そのために、待合室数を可動にしその可動域を  $\kappa$  以上  $K(\kappa < K)$  以下として、前節と同様にシミュレーションモデルにより制御方式の効果を考察する。

新たな複合的な制御方式のために、到着呼に対する次の指標を定義する。

- $n$  番目の到着時点直前の系内呼数  $Q_n = Q(t_n^-)$  に対しシステムの稼働率  $q_n$ ,
- サービス要求時間  $S_n$  に対し平均サービス要求時間に対する要求比  $s_n$ ,

$$q_n = \frac{Q_n + 1}{\kappa}, \quad s_n = \mu S_n.$$

これらの指標を用いた次の制御方式 ( $\Delta$ ) を考える。

- $n$  番目の到着時点直前の系内呼数が  $Q_n < \kappa$  である場合、この呼客は呼損にならずに、システムに受容される。
- 一方、 $\kappa \leq Q_n < K$  の場合、ある正の定数  $\alpha, \beta$  に対して
 
$$\alpha q_n + \beta s_n < 1$$
 ならば到着呼は呼損とならずシステムに受容される、
 
$$\alpha q_n + \beta s_n \geq 1$$
 ならば到着呼は呼損となりサービスを受けられない。
- $Q_n = K$  の場合、到着呼は呼損となる。

#### 4.1 シミュレーションモデル 2

新たな複合的な制御方式  $\Delta$  のもとでシミュレーションモデル 2 を作成する。

- シミュレーションモデル 1 の①～⑤までは  $K$  を  $\kappa$  に置きかえて、全く同じとする。そのうえで、⑥を次のようにする。
- ⑥' 第 2 到着時点  $t_2$  以降も同様の状態変化を繰り返す。ただし、時点  $t_n$  において  $Q_n = \kappa$ 、このとき、

$x_\kappa(n) > 0, x_i(n) = 0, (i = \kappa + 2, \dots, K)$  であり  $t_n$  の到着呼については制御方式  $\Delta$  に従う :

受容された場合,  $x_{\kappa+1}(n) = S_n$ , 呼損となる場合,  $x_{\kappa+1}(n) = 0$  となる.

⑦ 時点  $t_n$  において  $Q_n = i > \kappa$  のときも同様, 制御方式  $\Delta$  に従う :

受容された場合,  $x_{i+1}(n) = S_n, x_j(n) = 0 (j = i + 2, \dots, K)$ ,

呼損となる場合,  $x_j(n) = 0 (j = i + 1, \dots, K)$  となる.

⑧ 時点  $t_n$  において,  $Q_n = K$  である場合, 到着呼は呼損となる.

## 4.2 シミュレーション結果 2

シミュレーション 1 と同じパラメーターを用いて実験を行い, 複合方式による制御の効果を考察する.

- 表 4.1 はシミュレーションモデル 1 と同様に呼客到着数 400 に対するシミュレーション実験を Sim 6 の乱数を用いて行い, 制御方式  $\Delta$  におけるパラメータ  $\alpha, \beta$  を変化させその効果をみるものである.

これによると,  $\alpha$  が 0.5 を超えるあたりから呼損率は上昇する傾向がある.  $\alpha$  が大きいと系内呼数の増加がそのまま呼損になるという影響が強く, このような現象が出るものと考えられる.

これ以外にも様々な  $\alpha, \beta$  を変化させ, 繰り返した結果, この表にある  $\alpha = 0.1, \beta = 0.6$  の場合が呼損率を最も抑制する結果となった.

しかし, この結果は不偏性を持つものではなく, 呼客到着状況によって変わってくる. (表 4.2)

- 表 4.2 はシミュレーションモデル 2 と同様に呼客到着数 400 に対するシミュレーション実験を 10 回行った結果である. なお, 初期状態も同様に系内呼数 8 からスタートさせる.

ここで,  $\alpha, \beta$  をいろいろな値に変化させ, それぞれにおいて最も効果があると思われる値を示してある.

表 4.2 によると呼損率が全て 35% 以下に落ち着いており, 表 3.2, 3.3 と比較して大きく改善されていると思われる. ここで  $\alpha, \beta$  の値は状況によって異なるが, これらの状況では  $(\alpha, \beta) = (0.1, 0.6)$  または  $(0.4, 0.3)$  の周辺で効果が認められている. これは系内呼数が  $\kappa$  を超えた場合に, システムのサービス許容量を圧迫するであろう要求量の大きい呼客を受容せず呼損させるというこの制御方式の効果が現れた

表 4.1 Sim 6 ( $c=1, \kappa=10, K=20, \lambda=1, \mu=0.4$ ) を基本とした場合

$\alpha$	0.2	0.5	0.9	0.1	0.3
$\beta$	0.2	0.5	0.9	0.9	0.7
平均系内呼数	19.319	11.264	9.671	13.137	12.499
呼損総数	221	194	366	180	185
呼損率	55.3%	48.5%	91.5%	45.0%	46.3%
経過時間	425.0%	401.0	410.2	403.1	401.3
0.6	0.1	0.2	0.3	0.35	0.4
0.4	0.6	0.5	0.4	0.35	0.3
10.631	16.314	15.815	15.938	15.344	15.020
195	128	137	135	129	135
48.8%	32.0	34.3%	33.8%	32.3%	33.8%
399.1	411.9	407.5	404.9	402.6	401.5



表 4.2  $c=1, \kappa=10, K=20, \lambda=1, \mu=0.4$  の場合

項目	平均系内呼数	呼損総数	呼損率	経過時間	$\alpha$	$\beta$
Sim 1	14.397	138	34.5%	426.3	0.40	0.300
Sim 2	14.579	128	32.0%	433.5	0.40	0.278
Sim 3	14.404	119	29.8%	444.0	0.40	0.280
Sim 4	16.840	127	31.8%	393.3	0.10	0.600
Sim 5	15.589	125	31.3%	408.8	0.10	0.600
Sim 6	16.314	128	32.0%	411.9	0.10	0.600
Sim 7	15.327	117	29.3%	411.5	0.40	0.280
Sim 8	15.254	128	32.0%	409.7	0.10	0.600
Sim 9	14.516	121	30.3%	422.0	0.41	0.279
Sim 10	16.185	122	30.5%	447.5	0.10	0.600

表 4.3  $c=1, \kappa=5, K=20, \lambda=1, \mu=0.4$  の場合

項目	平均系内呼数	呼損総数	呼損率	経過時間	$\alpha$	$\beta$
Sim 1	13.853	130	32.5%	426.3	0.40	0.300
Sim 2	13.207	117	29.3%	428.6	0.40	0.278
Sim 3	13.070	104	26.0%	439.5	0.41	0.280
Sim 4	14.763	114	28.5%	389.7	0.41	0.600
Sim 5	14.137	115	28.8%	406.5	0.10	0.600
Sim 6	15.564	125	31.3%	409.0	0.10	0.600
Sim 7	14.429	107	26.8%	408.9	0.40	0.280
Sim 8	14.726	125	31.3%	406.0	0.40	0.600
Sim 9	13.349	109	27.3%	419.9	0.40	0.279
Sim 10	13.798	107	26.8%	443.8	0.40	0.600

ものと考えられる。

さらに、表 4.3 では窓口数の待合室の可動域を 5~20 と広げた場合の結果を示す。

それほど目立つものとはいえないが、呼損率が 30% 前後に納まり一定の効果は現れている。このように待合室の上限  $K$  は動かさないとしてもその可動域 ( $\kappa, K$ ) や制御方式  $\Delta$  のパラメータ  $\alpha, \beta$  を選択することで呼損率を減少させる効果が大きい期待できる。この変化は呼客の到着状態に影響を受けるもので、 $\alpha, \beta$  および  $\kappa$  の選択はシステムの状態を観測しながら変動させていくことも必要であると思われる。このような制御方式を実現化するためにはシミュレーションなどを通じた機械（機会）学習を繰り返す必要があるだろう。

ここでは、到着呼 4000 に対するシミュレーションを行った 2 例を紹介する。

表 4.4  $c=1, \kappa=5, K=20, \lambda=1, \mu=0.4$  の場合

項目	平均系内呼数	呼損総数	呼損率	経過時間	$\alpha$	$\beta$
Sim A	16.177	1278	31.9%	4024.5	0.10	0.60
Sim B	15.968	1308	32.7%	4013.8	0.40	0.30



## 5. D/M 系における制御効果

前節で提案した制御方式  $\Delta$  が他のシステムにおいても呼損を減少させる効果をもたらすのかを確認する。そのために、待ち行列システム D/M/1/K を対象とする。このシステムの概要は第 2 節の表記に従い、次の通りである。

- 一定到着間隔過程：呼客のシステムへの到着間隔はパラメータ  $\lambda$  (正の定数) の一定分布 (D) に従う。  
到着時間過程  $\{T_n, n=1, 2, \dots\}$  は互いに独立で同一の次の確率関数に従う。

$$P\left[T_n = \frac{1}{\lambda}\right] = 1, P[T_n = x] = 0, \left(x \neq \frac{1}{\lambda}\right)$$

- サービス過程は 2 節と同様に、パラメータ  $\mu$  (正の定数) の指数分布 (M) に従う。
- 窓口数  $c$ ：シミュレーションでは  $c=1$  とする。
- 待合室有限：システム内の呼客数はサービス中の呼客も含め最大  $K$  に限られる。  
システム内の呼客数が  $K$  であるときに到着した呼客はシステムに入ることは許されず呼損となる。

このシステムにおいても M/M 系同様に  $\rho > 1$  の場合、表 5.1 のシミュレーション結果にみられるように激しい呼損が起こる。なおシミュレーションにおいては、パラメーターの設定を前節までと同じ  $\lambda=1, \mu=0.4, K=20$  として、初期設定 ( $Q_0=8$ ) および各到着呼のサービス要求量も全く同じ設定として実行する。

表 5.1 待ち行列系 D/M 系 ( $c=1, K=20, \lambda=1, \mu=0.4$ ) の場合

項目	平均系内呼数	呼損総数	呼損率	経過時間	時間超過数	超過率
Sim 1	19.586	243	60.8%	445.9	159	62.8%
Sim 2	19.177	239	59.8%	408.5	203	63.3%
Sim 3	19.534	244	61.0%	419.5	205	60.8%
Sim 4	19.569	227	56.8%	375.2	190	34.3%
Sim 5	19.367	222	55.5%	385.3	236	40.8%
Sim 6	19.549	227	56.8%	385.9	155	38.8%
Sim 7	19.416	220	55.0%	386.6	150	37.0%
Sim 8	19.489	231	57.8%	389.2	137	53.8%
Sim 9	19.481	222	55.5%	391.7	206	40.5%
Sim 10	19.481	257	64.3%	425.5	78	76.3%

どの場合も呼損率が 55% 以上であり、表 3.3 の M/M/1/20 と同様に非常に多くの呼損を招いていることがわかる。次に、制御方式  $\Delta$  を導入した場合のシミュレーションモデル結果を表 5.2 に示す。

表 5.2 待ち行列系 D/M 系 ( $c=1, \kappa=10, K=20, \lambda=1, \mu=0.4$ ) の場合

項目	平均系内呼数	呼損総数	呼損率	経過時間	$\alpha$	$\beta$
Sim 1	15.970	115	28.8%	410.9	0.10	0.600
Sim 2	14.359	111	27.8%	431.1	0.40	0.278
Sim 3	15.177	99	24.8%	420.7	0.40	0.280
Sim 4	15.970	115	28.8%	410.9	0.10	0.600
Sim 5	14.404	106	26.5%	420.9	0.40	0.300
Sim 6	15.035	111	27.8%	423.9	0.10	0.620
Sim 7	14.000	111	27.8%	420.5	0.42	0.290
Sim 8	14.910	108	27.0%	418.1	0.40	0.280
Sim 9	15.581	109	27.3%	440.7	0.10	0.610
Sim 10	16.182	103	25.8%	424.6	0.10	0.620

この結果が示す通り、M/M 系の場合と同様に、むしろそれ以上に制御方式  $\Delta$  の効果が現れ、呼損の状況が非常に改善されていることがわかる。このように提案された制御方式は到着過程に左右されることなく、呼損を制御する効果があることが確認できた。

## 6. まとめ

この論文では有限待合室を有する待ち行列において、呼損を制御する方策を考察した。ここでは、各呼客の到着時点におけるシステムの稼働率  $q_n$  とサービス要求時間の要求比  $s_n$  による線形式による制御方式を提案し、その効果が望めることをシミュレーションにより確認した。改めて、その効果を図 6.1、図 6.2 の 2 つのグラフで示す。いずれの場合でもシステムの輻輳状況を大幅に解消できている。しかも呼損を抑えることにも効果を得ている。

最後に今後の課題をまとめておく。

- 提案した制御方式によりどの程度の効果があるのかを理論的に明らかにすること。
- M/M 型にこだわらず、一般的なシステムにおける効果を確認すること。
- 複数窓口システムへの拡張を考察すること。
- AI 的制御法として、確立させるためにはシミュレーションや実際のシステムにおけるデータ蓄積を行うなど機械学習（機会学習）を重ねていく必要がある。それにより状況に応じた線形式の切替なども可能になるものと考えられる。
- 呼損および過重輻輳による経済的な損失をも加味させた制御法の考察も必要になろう。

## 参考文献

- [1] Kleinrock, L: Queuing Systems, Vol. 1, Wiley and Sons, 1975  
 [2] 本間鶴千代：待ち行列の理論，理工学社，1966  
 [3] 宮沢政清：待ち行列の数理とその応用，牧野書店，2013

図 6.1 M/M/1/20 における輻輳状況と複合制御  $\Delta$  の効果

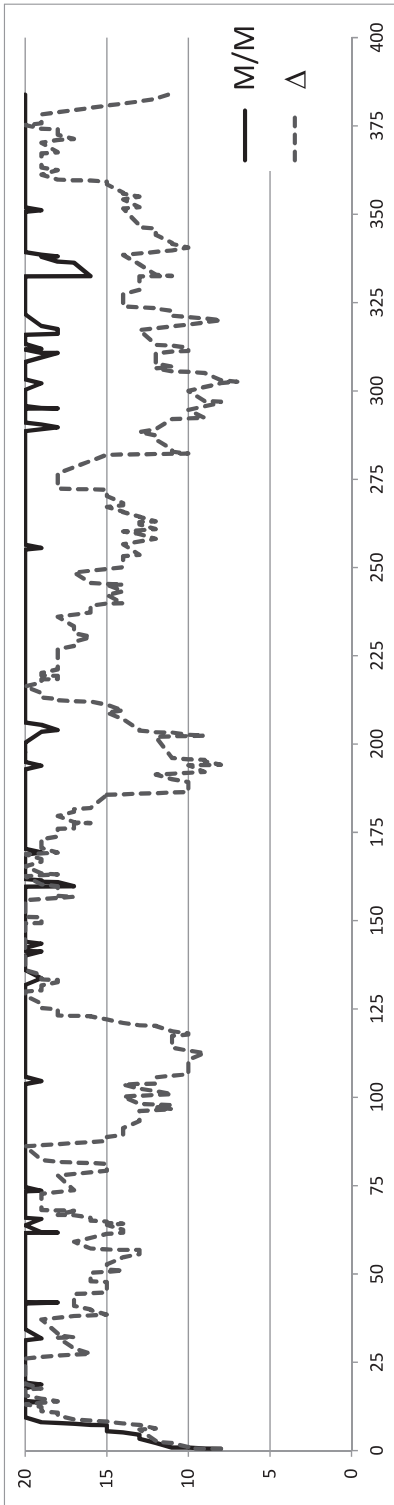


図 6.2 D/M/1/20 における輻輳状況と複合制御  $\Delta$  の効果

