

日本大学経済学部経済科学研究所研究会

【第200回】

2017年7月22日

平成27～28年度共同研究中間発表

「時系列解析による金融市場分析」

〈発表者〉

高千穂大学商学部准教授

柴 田 舞

東洋大学経営学部准教授

里 吉 清 隆

日本大学経済学部教授

三 井 秀 俊

「ボラティリティーの非対称性 —イントラディ・データによる 可変パラメーター分析」

高千穂大学商学部准教授 柴田 舞

今回は日本大学経済学部さまに大変感謝しております。中でもデータを整備していただいたということが、私としては研究を進めるに当たって大変助かりました。タイトルにあります通り、イントラディ・データ、日中のデータをこちらで整備していただいたものを使いまして、ボラティリティーの非対称性について研究を行なうことができました。その話を今日はさせていただきたいと思います。

研究目的は日中分析、中でもボラティリティー非対称性の存在有無についてです。ボラティリティーというのは、株式市場、特に株価データのリターンの変動の大きさを表す変数ですが、ボラティリティーそのものは観測されないものですので、モデルの中で推定することになります。その推定をすること、あるいはボラティリティーの特性を明確にすることは、世界中で20~30年にわたってずっと研究が続けられている大きなテーマです。その大きな流れの中で、今回の研究は日中での非対称性に焦点を当てております。

方法としましては、よくあるのはARCHタイプモデルでの分析ですが、比較的新しいVIX (volatility index) データの日中のデータも使って、複数の方法で分析することで頑健性を明確にしようということを行なっております。

データは2016年1月から12月、1年間の日中データです。データによって取れる時間が違いますので、夜間データもあったりいたしますが、日経平均を対象にしておりますので、マーケットが開いている前場と後場の時間内しかデータは存在しませんので、それに合わせて日中データを使っております。

日経平均は東証1部上場 225銘柄の平均値として出されるもので、9時から11時半と12時半から15時まで、15秒間隔で配信されます。それぞれの株価がばらばらについていて、頻度の高い銘柄は1分間に何回も価格がつかますが、平均値として計算して公表するのは15秒に1回です。9時00分は

まだ始まったところでデータはないので、1日の最初は9時00分15秒、30秒、45秒、1分となります。これに従って、15秒データを毎分とって分析しております。日中データを扱うと、毎分15秒の間は捨てているのもったいないとよく指摘されますが、全部拾うとノイズだらけで分析に耐えないので、せめて1分、場合によっては5分、10分とか、ある程度間隔を空けて取って観測して使うことが主流となっています。

(資料1) 今回は先物はやっていないので省略して、日経ボラティリティー指数に話を進めます。これはもともとシカゴで公表されているVIXに似せたかたちで日経新聞が算出しているもので、オプション価格をベースに計算しています。これも日中、15秒刻みの配信で、同じ間隔でデータをサンプリングして分析に用いております。

(資料2) VIXについて先行研究を見ると、原系列で扱っていたり、変化率に直したり、ものによってさまざまです。そこに関しては単位根検定をすればイエス・ノーが言えるわけですから、単位根検定をする。ここに単位根検定の式を書いています。yのところはVIXのデータを入れて単位根検定を行なった結果、原系列には単位根あり、変化率に直せば定常であるということで、分析の中では変化率に直したものを採用しております。

(資料3) ちなみに、ボラティリティー・インデックス日中変動で、横軸は午前9時から始まって午後3時まで、昼休みをはさむことなく日中ずっと配信されております。原系列のほうが濃い折れ線グラフで、朝が高い。緑色のちょっと薄いほうは、VIXを変化率に直した後ですので、定常な0付近で推移しています。

1年間のデータを使っているので、1年間での時間に対する平均値を出しています。1年間のデータ数はそれぞれ約二百何十あるわけですから、9時の時点での二百何十の平均、9時1分での平均、9時2分での平均ということで、同じ時間に観測されるデータの平均値のグラフです。

(資料4) 基本統計量についてはあまり大きな情報源がないので、ボラティリティー非対称性回帰モデル分析のほうに行かせていただきます。先行研究として参考にした分析があるのですけれども、VIXの変化率に直したのを普通の回帰分析の

かたちで、リターンのプラスならデータが入り、マイナスならこっちにデータが入る。ダミー変数を掛けたようなかたちで、プラスの場合とマイナスの場合と分けている先行研究があります。VIXとリターンのそれぞれ過去のデータに回帰する。ただしVIXについては、朝が高いとか、お昼休み空けたところも時間の間隔が違いますので、時間の間隔の違いところにダミーを入れて別の定数項で扱う。

主に日次データで指摘されていることですが、リターンが下がった後にボラティリティーは上がりやすい。それはデータのうへの観測という意味もあり、理由も分析されていて、リターンが下がるのは多くの人にとってよくない情報ですので、そこで急いで取引しようとかいうような行動を引き起こし、ボラティリティーが高くなるなどという説明もされております。主に日次データでの結果で、日中のデータに関しては先行研究を調べてもあまり分析は行なわれていません。

次数などはちゃんと調べてラグ2まで入れるということやってきたのですが、数字だけ見ても意味が分からないので、解釈のページに移りたいと思います。

(資料5) 同時点の被説明変数にボラティリティーのリターン、説明変数に日経平均自体のリターンがあるので、同時点のデータを入れたところの係数を解釈してみると、プラスのリターンがついているほうの係数は-2.515。プラスのリターンに対しての係数はマイナスですので、リターンがプラスで係数がかかるとマイナスの効果。一方、マイナスのリターンについているほうの係数は-2.114。マイナスリターンでマイナス係数にかかってくるわけですから、マイナスのリターンのときにボラのリターンがプラス方向に動く、というような意味合いで非対称性だということは確認がとれます。

ラグの係数はそんなにはっきりはしなくて、同時点の影響が強く出ていました。10分リターンでは符号が混在していたりして、どうもはっきりしない。15分になっていくと、やはり結果が混在しているということで、特に5分で強く出ていている結果が見られます。ラグも入れた回帰分析ですが、同時点のデータでの係数が一番はっきり出ている。ここはまだ先行研究ベースのモデルです

ので、それと同じことを確認したというレベルで、アメリカでもそんな結果が出ていたし、日本でもそうですねという追試です。

私の持ち時間はもうないのですが、せめて1個だけでも私のオリジナルを話させていただきたいと思います。同じような分析ですが、パラメーター変化モデルをやってみました。普通のリグレーションは平均を通る線を引くわけですが、分布の平均ではなくて、95%の端っこをとるとか、クォータイルを定めてやってみるとだいぶ違うぞという指摘が先行研究にあります。その指摘は何なのだろうかと考えたときに、もちろん分布が違う、すなわちデータが大きく外れたような大きな変化を示したときの話ではあるのですが、データを眺めて一体それがどういうとき起きているのか見ますと、5分、10分、15分は長いとはいえ短いので、ある日はリターンが大きかったり、ある日は静かだったりとか、日による違いがかなりあるわけですね。そこで、クォータイルにこだわらず、パラメーターの変化ということで時間的な変化を見ようということをやってみました。

その結果が自分でもびっくりするほどきれいに出了たので、これはぜひお見せしたかったのですけれども、1年間のパラメーターの変化をずっと追っていきけるわけですね。回帰分析のパラメーターが1年間、1日の中、1分の中で変化している。

これをまた時間に対して平均をとりました。データは9時、9時5分、9時10分と並べて回帰分析して、1月4日の9時のパラメーター、9時5分のパラメーター、次1月5日のパラメーターとずーっとながっていますが、つながっているのを眺めてもよく分からないので、得られたパラメーターを織りまぜて、9時の時点のパラメーターの平均値、9時5分のパラメーターの平均値というふうに並べると、前場は低い、後場は高いという、きれいな結果が出了ました。

同じようなことをGJRやEGARCHやいろいろなモデルでやってきましたが、結論だけ述べさせていただきますと、日中ボラティリティーの非対称性はある。パラメーターの分析から、パラメーターについては有意に存在していることが確認できる。2点目は前場と後場で動きが違うことが見つけられた。

3点目は、時間の都合上、申し上げられなかったのですが、EGARCHモデル、GJRモデルでボラティリティー変動の非対称性を見るモデルがあります。これをやる意味はVIXを使わないということです。そもそもVIXは信頼できるデータかと言われると、それまでになってしまいますが、

ARCHモデルはいろいろなところで使われて信頼されるモデルですから、こちらを比較対照として分析した結果、リターン間隔が短ければ非対称性は存在し、長くなると消えていく。10分、15分だとはっきりしないということが見えております。以上です。

ボラティリティの 非対称性 —イントラデイ・データによる可変 パラメータ分析—

2017年7月22日 @ 日本大学経済学部
高千穂大学商学部 柴田 舞

資料1

研究目的

- 日中分析
- ボラティリティ非対称性の存在有無
- VIX, ARCHタイプモデルで分析して、結果を比較する

資料2

単位根検定

$$\Delta y_t = \mu + \alpha_0 y_{t-1} + \sum_{p=1}^P \alpha_p \Delta y_{t-p} + u_t \quad (1)$$

帰無仮説 単位根が存在する ($\alpha_0 = 0$)
対立仮説 単位根ではない ($\alpha_0 < 0$)

検定統計量 -2.654 tタイプテスト
臨界値 -2.86 (有意水準5%、片側、サンプルサイズ > 500)
結論 単位根であるとする帰無仮説が棄却されない

→VIは、変化率へ直して分析する

なお、VI変化率は、単位根を持たないことを確認した。

日経ボラティリティ指数

- 日本経済新聞社が算出する、ボラティリティの指数である。
- 日経平均株価の1か月先の変動率を表すとされる。
- 具体的な計算方法は、日経平均先物価格と日経平均オプション価格をもとに計算する。
- 本指数は、9時00分15秒から15秒間隔で配信されている。
- 9時00分15秒から15時09分45秒まで連続してデータが配信される。
(昼休みで中断されることは、ない)

VIX 日中変動



VIX 現系列 U 字型
VIX リターン パターンは、ない。

資料3

推定結果 インプリケーション

- 同時点の日経平均リターン×プラスダミー係数
- 日経平均リターン×プラスダミー係数 -2.515
- 日経平均リターン×マイナスダミーの係数は -2.114 ポラリティ変動の非対称性が確認できる。
- 1期と2期のラグの係数
 - 5分リターンでは同時点と2期ラグだけが、非対称性を表している。
- 10分リターンでは、1~3期に非選して、プラスの係数が有意であるが、符号はプラスとマイナス混在であり、マイナスのリターンの係数は有意ではない。
- 15分リターンでは、プラスリターンの係数は有意ではあるが、1期ラグはマイナス、2期ラグはプラスと、符号が混在している。マイナスリターンの係数は1期ラグで有意ではなく、2期ラグではマイナスで有意である。
- まとめると、ポラリティ変動の非対称は、同時点だけではつきりとするが、ラグをとると不明確になってしまう。

資料5

ポラリティ非対称性 回帰モデル分析

- 回帰モデル

$$\Delta VIX_{it} = \alpha + \alpha' d_t + \sum \beta \Delta VIX_{it-L} + \sum \gamma R_{it}^+ + \sum \delta R_{it}^- + u_t$$

- ただし、 α 、 β 、 γ 、 δ はそれぞれパラメータ
- R_{it}^+ は、 $R_{it} > 0$ であれば R_{it} 、そうでなければ0となる変数
- R_{it}^- は、 $R_{it} < 0$ であれば R_{it} 、そうでなければ0となる変数
- $R_{it} = 0$ はどちらにも含まれないので、定数項でとらえられる。
- 被説明変数と説明変数が同じ日のデータに限って分析に用いた。

資料4

結論

- 日中のポラリティの非対称性が存在する
- VIXによると、リターンとポラリティ同時点の変化が、前場と後場で異なることが、新しい発見である
- ARCHタイプモデルによると、ポラリティ変動の非対称性が、リターン間隔が短いほど、厳しい有意水準でも有意と判断される。

「EGARCHモデルによる ブル・ベア市場の分析」

東洋大学経営学部准教授 里吉 清隆

(三井) 共同研究者の東洋大学里吉先生は現在、在外研究でアメリカに行っておられて来られませんので、私が代わりに彼の研究を簡単に説明させていただきます。

研究題目は「EGARCHモデルによるブル・ベア市場の分析」です。初めにこれを見たとき、マルコフスイッチングの間違いではないですかと里吉先生にメールをしたんですが、「いや、これで合っている。よくモデルを見てください」と怒られました。ブル・ベア市場の分析の場合にはマルコフスイッチング・モデルを使う場合が多いのですが、今回の場合はダミー変数を使って分析している。

研究の背景ですが、株式市場や為替市場にはブル相場、ベア相場と呼ばれるトレンドが存在する可能性がある。実際には存在していると思うんですけども、断言はできない。それぞれの相場において資産価格の変動の仕方には違いがある。株式市場の変動の特性と為替市場での変動の特性とはちょっと違うのではないかと考えられています。

トレンドの転換点、一番高いところと一番低いところ、山と谷を見つける方法にはいろいろありますが、BB法が一番有名です。BB法を株式市場に適用した代表的な研究で、日本のデータを使ったものでは、今日来ていただいた柴田先生が2010年と2014年にTOPIXの長期の月次データと週次データを用いて研究なさっています。

柴田先生の研究は月次と週次データですが、投資家にとっては中長期だけではなくて短期的なトレンドにも興味がある。今回、里吉先生は日次データで分析しました。資産価格の時系列データに見られるボラティリティー・クラスタリング、ファット・テイルと分布の歪み、ボラティリティーの非対称性、この三つの特徴をとらえるために、skewed-t分布を用いてEGARCHモデルを使って推定を行なっております。

余談ですが、里吉先生とは分布の歪みに注目して別に共同研究をしています。今回も分布の歪み

は一つのメインテーマになります。ブル・ベア相場において資産価格の変動に違いがあるか、どのような確率分布が最も当てはまりがよいか調べるのが今回の研究の目的です。ブルの場合とベアの場合で変動の仕方が違うとすると、通常の正規分布とかt分布みたいな対称性のある分布だとブルとベアのときの歪み具合の違いをとらえることができないので、skewed-t分布の歪みを考えています。

(資料1) そこでEGARCHモデルですが、ダミー変数が入った式になっています。収益率の過程はあるトレンドとボラティリティーが変動する形になっていて、誤差項の過程は平均0で、分散1を仮定します。分布の形状はいろいろなかたちで考えます。ボラティリティーの過程はEGARCHモデルに従って定式化していく。あとは定数項の μ 、ボラティリティーの定数項 ω 、ボラティリティーのパラメーター β 、 θ 、 γ に対してダミー変数を置いてやる。ダミー変数はベアのときは0、ブルのときは1をとる。

(資料2) 誤差項の z_t の分布ですが、四つ使って推定しております。一つは正規分布で、もう一つはt分布です。株式市場では収益率の分布はファット・テイルの分布というのは知られていますので、そこでよく使うt分布です。skewed-t分布は、 ξ が1より大きい場合は右の裾が厚くなる、1より小さい場合は左の裾が厚くなる、 ξ が1の場合には左右対称になります。skewed正規分布も使って推定を行なっている。

(資料3) skewed-t分布の例です。 ξ が0.8の場合と、1.0の場合と、1.2の場合で、いずれも自由度は5としています。先ほどモデルのところで説明しましたように、平均0、分散1に仮定していますので、分散1に基準化した誤差項となっています。

これを見ると、通常は正規分布もt分布も0を中心にして対称ですが、 ξ の値を変えることで、右あるいは左に歪んだ形になることが分かります。後でよくもこの分布を使うんですが、このような左右非対称の分布を使うことで、資産価格データに対するモデル当てはまり具合が高まる可能性がある。非対称性分布のskewed-t分布を今回は使ったわけです。

(資料4) BB法の手順はここに書いてある通りです。

(資料5) 分析データはTOPIXと米ドル・円為替レートの日次データを使っています。TOPIXは終値で、米ドル・円為替レートは東京インターバンク相場の17時時点です。データ期間は2010年1月4日から2017年2月20日で、なぜこの期間を選んだのか、いまいち分かりません。サンプル・サイズは1749で、収益率は1個減るので1748になります。BB法によるトレンドの決定並びにモデルのパラメーターの推定にはプログラミング言語のOxMetrics 7.10を利用しています。

(資料6) BB法の設定値ですが、Mfがブル・ベアの最低継続日数で、1週間の場合は5日、2週間の場合は10、約1カ月で20です。Mwはウインドウの長さ、Msはデータ系列の最初と最後における山・谷の除外日数、Mcは山から山、谷から谷という1サイクルの日数の下限です。

(資料7) 図2 TOPIXの推移とブル・ベア局面ですが、白いところがブル、グレーの網かけがベアで、最低継続日数が1週間（5日間）のケースの場合です。ほかのブル・ベア継続期間と米ドル・円為替レートについては、別紙2ページ、3ページをごらんください。

(資料8) 日次収益率の基本統計量ですが、TOPIXの結果では、全期間で平均は有意ではない。今回は誤差項に左右非対称の分布を使っていますので、歪度は左に歪んでいますし、尖度も3を有意に超えて正規分布よりも裾が厚い。ここから、t分布あるいはskewed-t分布を使う有効性が分かります。

(資料9) 米ドル・円為替レートの結果も、全期間と、ほかの最低継続日数(Mf)を見た場合に、歪度はどちらかに有意で、尖度は3を超えて正規分布よりも裾が厚い。為替に対して、t分布とか、特にskewed-t分布を使うのは有効であることがこたら分かります。

(資料10) TOPIXの推定結果です。対数尤度、AIC、SBICのいずれの基準においても、トレンドなしの場合は誤差項をskewed-t分布にしたモデルが最も高い。別紙5ページに出ている通りです。

この研究でもう一つのポイントは θ の値が負に有意であり、このことからボラティリティーの非対称性があることが明らかにされています。もう一つは、 ξ は1より小さく有意なので、誤差項の分布を考えた場合には左の裾が厚いことが分かりま

す。

(資料11) Mfが5のとき、モデルの比較をすると、対数尤度、AICについてはskewed-t分布が最も高く、SBICについてはt分布のモデルが最も高いという結果になっています。非対称性の θ も全てに関して有意。skewed-tに関しては、 ξ は有意でないので歪んでいない可能性がある。

(資料12) Mf=10、Mf=20の場合もMfが5の場合と同じで、対数尤度とAICに関してはskewed-t分布が良く、SBICに関してはt分布のモデルが最も高いという結果が出ています。尤度比検定の結果も同じです。

(資料13) 表4は米ドル・円為替レートの推定結果です。トレンドがない場合、対数尤度はskewed-t分布、AIC、SBICではt分布のモデルが最も高い。 θ はt分布、skewed-t分布においては有意ではなく、ボラティリティーの非対称性は見られなかった。先行研究でも非対称性が見られるというのは為替の場合には少ない。skewed-t分布の ξ は1より大きいですが、有意ではない。為替のほうが株より効率的なんでしょうかね。

以下、Mf5のとき、10のとき、20のとき、それぞれこのような結果になっています。そして各パラメーターごとにパラメーターの値に違いがあるかどうか、 χ^2 分布を用いてきちんとワルド検定しています。

(資料14) 分析結果のまとめです。TOPIXに関しては、トレンドを含めないモデルよりも含めたモデルのほうが当てはまりが良い。トレンドの期間にかかわらず、誤差項の分布はt分布もしくはskewed-t分布が適当である。t分布は昔から言われていましたが、skewed-t分布も良いというのはなかなかいい結果だと思います。

ボラティリティーの非対称性はベアのほうが強い。ブル・ベア、どちらにおいても誤差項の分布は左に歪んでいる。これはデータ期間でも変わってくると思いますが、今回のデータ期間だと、誤差項の分布は左に歪んでいる。ブルとベアに分けていますので、全部が全部ではないですけれども、これも期待していた結果が得られたということです。

米ドル・円為替レートに関しては、TOPIXのケースと同じく、トレンドのあるモデルの当てはまりが良く、誤差項の分布はt分布もしくは

skewed-t分布が適当という，TOPIXと同じ結果が得られています。

ボラティリティーの非対称性はベアのときのみを観測される。一般的に今までは米ドルとかユーロの為替レートの場合は非対称性がなかったという結果が多かったので，ベアのときに見られるというのは新しい発見だと思います。誤差項の分布

はベアのとき左に，ブルのとき右に歪んでいる。これは株価指数と違う結果が得られています。

全体として，次の2点が明らかになりました。トレンド・ダミーを含めるとモデルの当てはまりがよい。ブルとベアでは資産価格の変動は異なる。

以上です。

EGARCHモデルによる ブル・ベア市場の分析

東洋大学経営学部 里吉清隆

satoyoshi@toyo.jp

2017年7月22日(土) 日本大学経済学部

誤差項 z_t の分布

- 正規分布 $N(0,1)$
- t 分布 $t(0,1,\nu)$
 - 平均は0, 分散は ν に標準化されている。
- skewed- t 分布 $skt(0,1,\xi,\nu)$
 - Fernández and Steel (1998) が提案。
 - $\xi > 1$: 右の裾が厚い。
 - $\xi < 1$: 左の裾が厚い。
 - $\xi = 1$: 左右対称 (正規分布)
- skewed正規分布 $skN(0,1,\xi)$
 - skewed- t 分布は $\nu \rightarrow \infty$ のとき, skewed正規分布に収束する。

資料2

EGARCHモデル

$$R_t = \mu_{D_t} + \sigma_t z_t \quad z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, V[z_t] = 1$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega_{D_t} + \beta_{D_t} \ln(\sigma_{t-1}^2) + \theta_{D_t} z_{t-1} + \gamma_{D_t} [|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)]$$

$$\mu_{D_t} = \mu_0(1 - D_t) + \mu_1 D_t$$

$$\omega_{D_t} = \omega_0(1 - D_t) + \omega_1 D_t$$

$$\beta_{D_t} = \beta_0(1 - D_t) + \beta_1 D_t$$

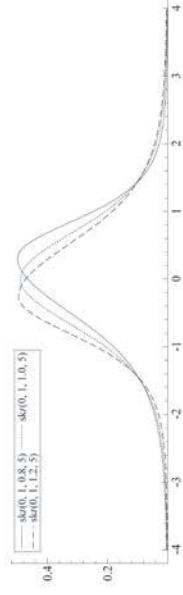
$$\theta_{D_t} = \theta_0(1 - D_t) + \theta_1 D_t$$

$$\gamma_{D_t} = \gamma_0(1 - D_t) + \gamma_1 D_t$$

- R_t は t 時点の資産価格の収益率。
- D_t はダミー変数。ベアのとき0, ブルのとき1の値をとる。

資料1

図1. skewed- t 分布の例



- 細線は $\xi = 0.8$, 破線は $\xi = 1.0$ (t 分布), 点線は $\xi = 1.2$ のケースを示す。いずれも自由度は $\nu = 5$ である。分散は1に標準化されている。
- このような左右非対称の分布を使うことによって, 資産価格データに対するモデルの当てはまり具合が高まる可能性がある。

資料3

BB法の手順

1. ウィンドウの長さを M_w とする。時点 t の前後のウィンドウ ($t - M_w$ から $t + M_w$ までの期間) を設定し、その中の最大値と最小値を見つけて、これを、データの最初から1期つつずらしながら、データの最後まで行う。
2. 最大値と最小値が交互になるように、最大値が続いた場合は、その中で最大のものを残す(最小値に関しても同様)。
3. データの最初と最後において、 M_s の期間に含まれる山と谷は除外する。
4. 最初の転換点が山(谷)の場合、そこまでのデータの値がその山(谷)よりも高い(低い)場合、その転換点を除外する。
5. 山から山まで、谷から谷という1サイクルの期間が M_c 以上になるように、転換点を除外する。
6. 谷から山まで(ブル)、山から谷まで(ベア)の期間が M_f 以上になるように、転換点を除外する。

資料4

表1. BB法の設定値

ブル・ベアの最低継続日数	M_w	M_s	M_f	M_c
1週間	10	2	5	10
2週間	20	2	10	20
約1ヶ月	40	2	20	40

M_w : ウィンドウの長さ

M_s : データ系列の最初と最後における山・谷の除外日数

M_f : ブル・ベアの最低継続日数

M_c : 山から山、谷から谷という1サイクルの日数の下限

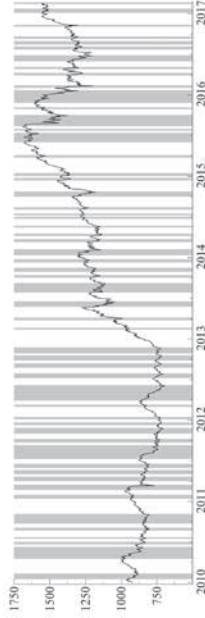
資料6

分析データ

- TOPIX、米ドル・円為替レートの日次データ。
 - TOPIX: 終値。
 - 米ドル・円為替レート: 東京インターバンク相場, 17時時点。
- データ期間: 2010年1月4日 ~ 2017年2月20日 (収益率は2010年1月5日 ~ 2017年2月20日)。
- サンプル・サイズ: 1749 (収益率は1748)。
- BB法によるトレンドの決定、ならびにモデルのパラメータの推定には、プロگرامミング言語のOxMetrics 7.10 を利用した。

資料5

図2. TOPIXの推移とブル・ベア局面



- 上図はブル・ベアのそれぞれの最低継続日数が1週間 ($M_f = 5$) のケース。
- 細線はTOPIXの推移、白の網掛け部分はブル局面、グレーの網掛け部分はベア局面を示す。
- 他のブル・ベア継続期間と米ドル・円為替レートについては、別紙の図2.3を参照のこと。

資料7

表2. 日次収益率(%)の基本統計量

(A) TOPIXの結果

- 全期間:
 - 平均:有意ではない。
 - 歪度:負に有意。左に歪んでいる。
 - 尖度:3を有意に超えている。正規分布よりも裾が厚い。
- $M_f = 5$:
 - 平均:ブル・ベアどちらでも有意。
 - 歪度:ベアは左に、ブルは右に歪んでいる。
 - 尖度:ブル・ベアどちらにおいても、正規分布よりも裾が厚い。
- $M_f = 10, M_f = 20$:
 - $M_f = 5$ の結果と同じ傾向。

資料8

表3. TOPIXの推定結果

- **トレンド無し:**
 - 対数尤度(lnL), AIC, SBICのいずれの基準においても、誤差項をskewed-t分布にしたモデルが最も高い。
 - θ_0 は負に有意。ポラティリティの非対称性がある。
 - ξ_0 は1より小さく有意。誤差項 z_t の左の裾が厚い。

資料10

(B) 米ドル・為替レートの結果

- 全期間:
 - 平均:有意ではない。
 - 歪度:正に有意。右に歪んでいる。
 - 尖度:3を有意に超えている。正規分布よりも裾が厚い。
- $M_f = 5$:
 - 平均:ブル・ベアどちらでも有意。
 - 歪度:ベアは有意でない。ブルは右に歪んでいる。
 - 尖度:ブル・ベアどちらにおいても、正規分布よりも裾が厚い。
- $M_f = 10, M_f = 20$:
 - $M_f = 5$ の結果と同じ傾向。

資料9

- $M_f = 5$:
 - 対数尤度(lnL), AICについてはskewed-t分布, SBICについてはt分布のモデルが最も高い。
 - LRは帰無仮説を $H_0: \mu_0 = \mu_1, \omega_0 = \omega_1, \dots, \xi_0 = \xi_1$ としたときの尤度比検定統計量。どのモデルについても帰無仮説は棄却される。よって、ブルとベアではポラティリティの変動は異なる。
 - どのモデルについても、 μ_0 は負に有意、 μ_1 は正に有意。
 - θ_0 は全て負に有意、 θ_1 は正規分布とskewed正規分布で有意でない。ポラティリティの非対称性はベアのほうが強い。
 - skewed-tにおいて、 ξ_0 は1より小さく有意であるが、 ξ_1 は有意でない。

資料11

表4. 米ドル・円為替レートの推定結果

- トレンド無し:
 - 対数尤度 (lnL) はskewed-t分布, AIC, SBICではt分布のモデルが最も高い.
 - θ_0 はt分布, skewed-t分布において有意でなく, ボラティリティの非対称性は観察されない.
 - skewed-t分布の ξ_0 は1より大きい, 有意では無い.

資料12

- $M_f = 10, M_f = 20$:
 - $M_f = 5$ の結果と同様に, 対数尤度 (lnL), AICについてにはskewed-t分布, SBICについてはt分布のモデルが最も高い.
 - 尤度比検定の結果も同じ.
 - 平均 μ_0, μ_1 の差, 非対称性 θ_0, θ_1 の差は, M_f の期間が長くなるほど縮まる.
 - skewed-t分布では, ξ_0 と ξ_1 の両方とも1より小さく有意.

分析結果のまとめ

- (A) TOPIX
- トレンドを含めないモデルより含めたモデルのほうが当てはまりが良い.
 - トレンドの期間にかかわらず, 誤差項の分布はt分布もしくはskewed-t分布が適当.
 - ボラティリティの非対称性はベアのほうが強い.
 - 米ドル・円為替レートにおいても, 誤差項の分布は左に歪んでいる.
- (B) 米ドル・円為替レート
- TOPIXのケースと同じく, トレンドのあるモデルの当てはまりは良く, 誤差項の分布はt分布, もしくはskewed-t分布が適当.
 - ボラティリティの非対称は, ベアのときのみ観察される.
 - 誤差項の分布はベアのとき左に, ドルのとき右に歪んでいる.
- 全体として, 次の2点が明らかになった.
- トレンド・ダミーを含めるとモデルの当てはまりが良い.
 - ドルとベアで資産価格の変動は異なる.

資料14

資料13

参考文献

- 柴田舞 (2010)「我が国におけるブル・ベア市場の区別とリターン分布」津田博史・山田雄二・中津昭雄編『定量的信用リスク評価とその応用—ジャマイーナ—』金融工学と市場計量分析』pp.186-220.
- Bry, G. and C. Boschan (1971) "Cyclical Analysis of Time Series: Selected Procedures and Computer Programs," NBER.
- Fernández, C. and M. F. Steel (1998) "On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 93, No. 441, pp.359-371.
- Gonzalez, L., J. G. Powell, J. Shi and A. Wilson (2005) "Two Centuries of Bull and Bear Market Cycles," *International Review of Economics & Finance*, Vol. 14, No. 4, pp.469-486.
- Pagan, A. R. and K. A. Sossounov (2003) "A Simple Framework for Analysing Bull and Bear Markets," *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 18, No. 1, pp.23-46.
- Shibata, M. (2014) "The Influence of Japan's Unsecured Overnight Call Rate on Bull and Bear Markets and Market Turns," *Asia-Pacific Financial Markets*, Vol. 21, No. 4, pp.331-349.

「非対称分布によるボラティリティの長期記憶性に関する分析」

日本大学経済学部教授 三井 秀俊

里吉先生がブル・ベア市場の研究を行っており、私が長期記憶性に関する分析を行っております。それはこれまでの研究の経緯がありまして、簡単に説明させていただきます。

これまで日経225オプションの実証分析は様々なのですが、時系列分析を使った場合はARCH型モデルを使う場合とSVモデルを使う場合があります。SVモデルの場合には推定が難しいなどいろいろ大変なので、実証研究のオプションまで行なうのはほとんどありません。ARCH型モデルは推定が容易なので、こちらのモデルを使う場合が多いです。

これまで里吉先生と共同研究もしていましたが、2011年のMS-GARCHモデルと、2016年のMS-EGARCHモデルです。マルコフ・スイッチングを入れたARCH型モデルでオプションの実証研究をしてたんですけども、ブルの場合とベアの場合と明確にしたいというのがあって、里吉先生はモデルを簡単にして、先ほどの研究をした。非対称性分布の話が出ましたが、コンセプトは同じで、非対称性分布を使って長期記憶性に関して見てみようというのが私の研究です。

最初に研究の背景と目的について説明します。研究の背景は、柴田先生、里吉先生と話がほとんど同じで、金融資産の価格変動の分析には収益率の標準偏差で測るボラティリティに注目することが多い。ボラティリティというのは時間を通じて変動するため、ボラティリティの時系列変動をどのように定式化するかが問題になります。真のボラティリティの過程は分かりませんので、どうやって定式化して推定していくかというのが最後のポイントだと言えます。

これまでARCHとかGARCHとかEGARCHとか、たくさんモデルが開発されて、いろいろなボラティリティの分析がされてきました。われわれが知りたいのは、これをオプションの分析のほうに応用したいというのが背景にあります。これがわれわれの一つの大きなテーマになっています。

ARCH型モデルを使った日経225オプションの

実証研究がいろいろなされていて、竹内・渡部(2008)でも、FIEGARCHモデルが長期記憶性のモデルになっておりますが、このモデルを使って実証研究をしております。彼らは分布までしか使っていないで、分布の非対称性とか歪みを考えていないモデルで行なっています。今回はそれも含めて実証研究したいというのがテーマです。

メインのテーマとしては、ボラティリティの長期記憶(long memory)に焦点を当てて分析を行なう。ロングメモリーがあるかどうかというのが分かれば、長期の限月を持つ先物やオプションの分析とか価格付けがより正確に行なうことができる。長期的にはそれがあって、長期記憶性があるかどうかというのを見たい。最近ではオプションもいままでみたいな短期ばかりではなく長期のものが出てきましたので、そこで実際に使えるのではないかとということです。

長期記憶性をとらえるためにはFIGARCHとかFIEGARCHがありますので、基本的に最初はこのモデルを使う。ほかにも長期記憶性をとらえるものとしていろいろありますので、時間があればそちらも使ってやってみたいと思います。

もう一つの目的は、誤差項の分布として、正規分布だけでなく、Student-t分布、一般化誤差分布、skewed-Student-t分布を用いてモデルの推定を行なうことです。特に非対称性分布であるskewed-Student-t分布に注目します。非対称性分布を使った場合、オプション価格にどのような影響が出てくるか分析したいと思います。先ほどの里吉先生の論文で、ブルの場合とベアの場合で分布の形が違うという結果が出ていましたので、そうすると多分オプション価格にもその影響があるはずなので、それを分析したいと思います。

(資料1) 分析モデルですが、収益率の過程を定式化して、誤差項の仮定も行います。オプションの場合にはリスク・プレミアムがあるかどうかでも重要だと思いますので、リスク・プレミアムを含めたモデルで研究を行なうことにしたいと思います。

(資料2) FIGARCHモデルは、ラグ・オペレーターを使った形で書かれていますのでちょっと複雑ですが、全部のラグを使うわけではなく、次数は制限します。それは後で説明します。

(資料3) $(1-L)^d$ におけるdが長期記憶性をとら

えるパラメーターで、ここの推定値で長期記憶性があるかないか分かります。0より大きくて1より小さければボラティリティは長期記憶に従っていると言えます。その中でも0より大きくて0.5より小さい場合は定常長期記憶過程と呼び、0.5以上1より小さい場合は非定常長期記憶過程と呼びます。d=1のときは単位根を持ち、非定常過程となり、d=0のときは短期記憶過程となって、BollerslevのGARCHモデルと同じになります。

(資料4) FIGARCHに関しても、先ほどの里吉先生のEGARCHモデルと基本的には同じで、それに長期記憶性が入ったモデルになっています。ここで重要なパラメータとしては θ で、 θ の値が有意ならばボラティリティの非対称性が分かります。 θ に関しては先ほどの里吉先生と同様に見ています。d=0のときにはNelsonのEGARCHと一緒にになります。

(資料5) 過去の研究を見てみると、モデルの次数に関して、pが1、qが0とする場合が多いのですが、本研究では情報量基準を使って選ぶのではなく、初めからFIGARCHの(1, d, 0)、FIEGARCHの(1, d, 0)を使って分析をします。そのときにはFIGARCHとFIEGARCHの式は簡単に書くことができます。これらのモデルを使用して、株式市場におけるボラティリティの長期記憶性の実証分析を行なうことにします。

先ほど言いましたようにオプションにも応用したいので、基本的には日経平均とTOPIXのデータを使いたい。個別銘柄もあるんですが、取引があまりないので実証研究はできなさそうなので、個別銘柄はやりません。あくまで株価指数に関して

実証分析を行なおうと思います。

誤差項の過程は4つで、まずt分布。二つ目はGED分布ですが、パラメーターの値で分布の形状は変わります。(資料6) μ が2のときにはz tは標準正規分布になり、 μ が2より小さければ正規分布より裾が厚い分布になって、 μ が2よりも大きければ正規分布より裾が薄い分布に従う。おそらく2より大きくなると思います。

(資料7) これはskewed-Student-t分布の分布関数のかたちです。

(資料8) ξ の値で非対称性なのかどうか分かりますが、説明はさっきと同じです。 ξ の対数をとった値が0のときは左右対称になり、 ξ の対数をとった値が0より大きい場合は右裾が厚くなり、 ξ の対数をとった値が0より小さいときは左裾が厚くなる。モデルによって対数をとった場合があるので、その場合には ξ そのもののときとは違うということです。

推定法は最尤法で行ないます。分布に関しても、EGARCHモデルの中で絶対値を取った期待値の値を計算しないといけないんですが、それも分かっていますので、それを使って推定を行ないます。

(資料9) 使用するモデルは1から8までのモデルを使います。nは正規分布、tがt分布、GEDが一般GED分布、sktがskewed-t分布になります。

まだこの段階で実証研究まで行なっていませんので、きょうは実証結果をお見せすることはできません。

以上です。

非対称分布によるボラティリティの 長期記憶性に関する分析

日本大学経済学部

三井 秀俊

mitsui.hidetoshi@nihon-u.ac.jp

日本大学経済学部経済科学研究所 共同研究 (B) 中間報告

2017年7月22日

発表の構成

- 1 研究の背景と目的 3
- 2 分析モデル 7

1 研究の背景と目的

研究の背景

- 金融資産の価格変動の分析には、収益率の標準偏差で測るボラティリティ (volatility) に注目することが多い。ボラティリティは時間を通じて変動するため、ボラティリティの時系列変動をどのように定式化するのかが問題になる。
- ARCH モデル, GARCH モデル, EGARCH モデル, etc.
- オプションの分析に適用できる。

2 分析モデル

2.1 収益率の定式化

t 時点の株価指数の収益率を R_t とする。Index $_t$ を t 時点の株価指数の水準とすると t 時点の株価指数の収益率 R_t は以下のように定義される。

$$R_t = \frac{\text{Index}_t - \text{Index}_{t-1}}{\text{Index}_{t-1}} \times 100. \quad (1)$$

このとき、収益率 R_t の過程を以下のおく。

$$R_t = \mu + \lambda\sigma_t + \epsilon_t, \quad (2)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad (3)$$

$$z_t \sim i.i.d., E[z_t] = 0, \text{Var}[z_t] = 1. \quad (4)$$

資料1

2.2 FIGARCH モデル

FIGARCH(p, d, q) モデルは、ボラティリティ σ_t^2 が以下の過程で表される。

$$\sigma_t^2 = \omega [1 - \beta(L)]^{-1} + \{1 - [1 - \beta(L)]^{-1} \phi(L)(1 - L)\} \varepsilon_t^2. \quad (5)$$

ここで、 $\beta(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_p L^p$, $\phi(L) = [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1 - L)^{-1}$, $\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_q L^q$ を表す。また、 L はラグ・オペレータ (Lag operator) を表し、 $L^i y_t = y_{t-i}$, ($i = 0, 1, \dots$) となる。 $(1 - L)^d$ は、以下のように表現される。

$$\begin{aligned} (1 - L)^d &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)} L^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\dots(d-k+1)}{k!} (-L)^k. \end{aligned} \quad (6)$$

資料2

2.3 FIGARCH モデル

FIGARCH (p, d, q) モデルは、ボラティリティ σ_t^2 が以下の過程で表される。

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \phi(L)^{-1}(1 - L)^{-d} [1 + \alpha(L)] g(z_{t-1}), \quad (7)$$

$$g(z_{t-1}) = \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|] \quad (8)$$

$$g(z_{t-1}) = \begin{cases} (\theta + \gamma) z_{t-1} - \gamma E(|z_{t-1}|), & \text{if } z_{t-1} > 0, \\ (-\theta + \gamma) |z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|), & \text{if } z_{t-1} < 0. \end{cases}$$

ここでは、ボラティリティの対数値を被説明変数としてパラメータの非負制約を取り除き定式化されている。 $\theta < 0$ ならば、資産価格が上昇した日の翌日より、資産価格が下落した日の翌日の方がボラティリティは上昇する。

資料4

- $(1 - L)^d$ における d が長期記憶性を捉えるパラメータを示す。
- $0 < d < 1$ となるとき、ボラティリティ σ_t^2 は長期記憶過程に従っている。
- $0 < d < 0.5$ のとき定常長期記憶過程と呼び、 $0.5 \leq d < 1$ のとき非定常長期記憶過程と呼ぶ。
- $d = 1$ のとき、ボラティリティ σ_t^2 は単位根を持ち非定常過程となる。
- $d = 0$ のとき短期記憶過程となり、Bollerslev (1986) の GARCH (p, q) モデルとなる

資料3

本来ならば、情報量基準などを用いて FIGARCH (p, d, q) モデルと FIGARCH (p, d, q) モデルの次数 p, q の次数選択を行なわなければならないが、過去の実証研究において $p = 1, q = 0$ とする場合が多いので、本論文でも FIGARCH ($1, d, 0$)、FIGARCH ($1, d, 0$) を用いて分析を行なうことにする。FIGARCH ($1, d, 0$) は、以下のように表現される。

$$\sigma_t^2 = \omega [1 - \beta_1(L)]^{-1} + \{1 - [1 - \beta_1(L)]^{-1}(1 - L)^d\} \varepsilon_t^2. \quad (9)$$

また、FIGARCH ($1, d, 0$) は以下のように表現される。

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) &= \omega + [1 - \beta_1(L)]^{-1}(1 - L)^{-d} g(z_{t-1}), \\ g(z_{t-1}) &= \theta z_{t-1} + \gamma [|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|]. \end{aligned} \quad (10)$$

これらのモデルを用いて株式市場におけるボラティリティの長期記憶性の実証分析を行なうことにする。

資料5

(ii) GED:

GED の密度関数 $f_{(GED)}(z_t; \nu)$ は以下のように与えられる。

$$f_{(GED)}(z_t; \nu) = \frac{\nu \exp\left(-\frac{1}{2}|z_t/\lambda_\nu|^\nu\right)}{\lambda_\nu 2^{(1+\frac{1}{\nu})} \Gamma(1/\nu)}, \quad \nu > 0, \quad (12)$$

$$\lambda_\nu = \sqrt{\frac{\Gamma(1/\nu) 2^{(-2/\nu)}}{\Gamma(3/\nu)}}$$

ここで、 ν は裾の厚さを示すパラメータである。 $\nu = 2$ のとき z_t は標準正規分布に従う。 $\nu < 2$ のとき正規分布より裾が厚い分布に従い、 $\nu > 2$ のとき正規分布より裾が薄い分布に従う。

• ξ は非対称パラメータを表し、分布の歪みを示す。また、

$$m = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right), \quad (15)$$

$$s = \sqrt{\left(\xi + \frac{1}{\xi} - 1\right) - m^2} \quad (16)$$

である。

- $\xi = 1$, あるいは、 $\ln(\xi) = 0$ のとき左右対称となり Student- t 分布と等しくなる。
- $\xi > 1$, あるいは、 $\ln(\xi) > 0$ のとき分布の右裾が厚くなる。
- $\xi < 1$, あるいは、 $\ln(\xi) < 0$ のとき分布の左裾が厚くなる。

(iii) skewed-Student t 分布:

基準化された skewed-Student t 分布の密度関数 $f_{(skt)}(z_t; \nu, \xi)$ は以下のよ
うに与えられる。

$$f_{(skt)}(z_t; \nu, \xi) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi(\nu-2)}} \left(\frac{2s}{\xi+1/\xi}\right) \left(1 + \frac{(sz_t+m)^2}{\nu-2} \xi^{-2t}\right)^{-(\nu+1)} \quad (13)$$

ただし、

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{if } z_t \geq -\frac{m}{s} \\ -1 & \text{if } z_t < -\frac{m}{s} \end{cases} \quad (14)$$

とする。ここで、 ν は自由度を表し分布の厚さを示す。

2.6 本研究で使用するモデル

1. FIGARCH(1, d , 0)- n
2. FIGARCH(1, d , 0)- t
3. FIGARCH(1, d , 0)-GED
4. FIGARCH(1, d , 0)-skt
5. FIGARCH(1, d , 0)- n
6. FIGARCH(1, d , 0)- t
7. FIGARCH(1, d , 0)-GED
8. FIGARCH(1, d , 0)-skt

"- n ", "- t ", "-GED", "-skt" は、誤差項が各々、正規分布、Student- t 分布、GED, skewed-Student t 分布に従うことを表す。

参考文献

- [1] 里吉清隆・三井秀俊 (2013), 「原資産の収益率に歪みがある場合のオプション評価 —混合正規 EGARCH モデルによる分析—」, 日本統計学会『日本統計学会誌』, 43, pp. 1–23.
- [2] 里吉清隆・三井秀俊 (2016), 「日経平均株価のトレンドとオプション評価 —マルコフ・スイッチング EGARCH モデルによる分析—」, 日本証券経済研究所『証券経済研究』, 第 96 号, pp.59 – 82.
- [3] 竹内 (野木森) 明香・渡部敏明 (2008), 「日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性とオプション価格」, MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』, No.24, pp. 45–74.
- [4] 竹内明香 (2006), 「日経 225 オプション価格の実証分析 ~ ARCH, ARCH-t, SV モデルによる比較」, 『一橋経済学』, 2, pp. 187–208.
- [5] 三井秀俊 (2000), 「日経 225 オプション価格の GARCH モデルによる分析」, MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』, No.7, pp. 57–73.
- with the Markov Switching GARCH Model」, *Asia-Pacific Financial Markets*, 18, pp. 55–68.
- [14] Ubukata M. and T. Watanabe (2014), "Pricing Nikkei 225 Options Using Realized Volatility," *Japanese Economic Review*, Vol.65, No.4, pp. 431–467.
- [6] 三井秀俊, 渡部敏明 (2003), 「ベイズ推定法による GARCH オプション価格付けモデルの分析」, 日本統計学会『日本統計学会誌』, 33, pp. 307–324.
- [7] 森保洋 (1999), 「ARCH モデルによる日経 225 オプション評価」, 『現代経済学研究』 7, pp. 143–159.
- [8] 渡部敏明 (2003), 「日経 225 オプションデータを使った GARCH オプション価格付けモデルの検証」, 『金融研究』 22, pp. 1–34.
- [9] Baillie, R. T., T. Bollerslev and H. O. Mikkelsen (1996), "Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 74, pp. 3–30.
- [10] Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307–327.
- [11] Bollerslev, T. and H. O. Mikkelsen (1996), "Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility," *Journal of Econometrics*, 73, pp. 151–184.
- [12] Nelson, D. B. (1991), "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59, pp. 347–370.
- [13] Satoyoshi, K. and H. Mitsui (2011), "Empirical Study of Nikkei 225 Options