

日本大学経済学部経済科学研究所研究会

【第225回】

2024年10月24日

2022～2023年度共同研究C成果報告

「ネットワーク産業に関する統合的研究」

〈講演者〉

日本大学経済学部教授

中 村 靖 彦

日本大学経済学部教授

豊 福 建 太

中村 それでは、昨年度末で終了しました『ネットワーク産業に関する総合的研究』の最終報告会ということで、本日はやってまいりたいと思います。これは私、中村靖彦が主任研究、代表ということで務めてまいりました研究でございます。

初めに、私から全体のメンバーのご研究、既に先生方から論文はいただいてまして、すでに出そろってますので、それについての簡単な概要等をお話しさせていただきたいと思います。詳しくはもちろんパブリッシュされた後に、論文の内容等にご関心があれば読んでいただければと思います。

それでは、参ります。経済科学研究所「紀要」(以下、「紀要」)に収められる予定のメンバーの研究なんですけれども、まずは、本日、私の後にご報告いただく豊福先生のご論考なんですけれども、『Financial networks and systemic risk』というタイトルで論文を書いていただきました。金融ネットワークとシステミックリスクに関する文献をレビューされた論文で、サーベイ論文ということになっています。基本的には、ですから、大きく分けて金融ネットワークに関する論文だということでございます。このネットワーク経済のテーマの中では、特に豊福先生は金融部門を担っていただいて、それに関するご論考をいただきました。

本日、お忙しくてご参加いただけないんですけれども、林先生からは、『Effective tools for analyzing the periodic motion of the generalized Lienard system』というタイトルで論文をお書きいただきました。この論文は、古くは競争均衡解の安定性、要するに安井琢磨先生のような時代から、リエナール型の微分方程式系というのは、競争均衡解の安定性に応用されたような微分方程式系でございまして、それについて、最新の成果を林先生にご報告いただいたと、論文の中でご提示いただいたということになっています。

特にリエナール型の微分方程式系について、周期運動の一意的な存在または非存在、存在するか存在しないかという基準を確立するような条件というのを提示いただいたということで、非常に革新的な論文だと言えます。後でも言及するのですが、少し時間がなくてかなわなかったんですけれども、マクロ経済のネットワーク分析に特に応用可能なんじゃないかなと私は思っております。

続きまして、本日、林先生と同様に、ご公務が多忙でお時間いただけなかったんですけれども、宮崎先生からは『Overview of Morrey spaces』というタイトルで論文をいただきました。この論文に関しては、経済学への応用例も多いルベグ空間、関数空間なんですけれども、その一般化であるモーレイ空間というのに関して、基本的な性質といろいろな定理が論じられてまして、その中には宮崎先生ご自身の定理もございます。全体をまとめられて、宮崎先生のご発見もあるということでございます。

これについては、非常に数学的に高度なんですけれども、消費財間の、消費者間の、あるいは財間のネットワーク効果を持つ一般均衡分析、これは後、この話を少ししますけれども、このネットワーク効果を持つ一般均衡分析、あるいはそのネットワーク効果って何ぞやという話もさしていただきたいんですけれども、その事柄に対しても応用可能なんじゃないかなと思っております。非常に抽象的な空間の話ですので、特に経済理論家に対しては、経済学上の応用は極めて興味深い論文をお書きいただいたと思っております。

私、中村のほうからは、『Network externalities in a quantity-setting vertically differentiated luxury goods market』ということで論文を書きました。私の専門は寡占ですので、寡占的な数量競争下で垂直的製品差別化を行う高級品市場、高級品市場って言ってますけれども、要するに高品質のものと低品質のものが明確にあるっていうことで、高品質のものが生き残るっていうようなことが結果として出てきますので、高級品市場という用語を冠してタイトルを付けているんですけれども、その中で、財間で働くネットワーク外部性の強さ、これもネットワーク外部性っていう話ってというのは後述します。

製品品質の格差が、均衡市場の結果にどのような影響を与えるかを考察した論文になってまして、寡占市場の消費に伴うネットワーク効果を分析した論文で、これはダイレクトにネットワーク経済に関して、ネットワーク経済というかネットワーク効果を直接的に考察した論文というふうになっています。

以上の観点から、この4人でネットワークというキーワードを基に、個々人の関心からさまざま

な研究を、集めることができたということは、私たちにとっても誇れる体験であったというふうに自負しています。

初めに言っておかないと忘れるかもしれないので、閉じるに当たってということで、先に話をさせてくださいけど、良かった点というのは、とにかく数学を専門とする研究者と経済学を専門にする研究者が、「ネットワーク」をキーワードに合同で議論できたということです。各人の興味関心から論文が出そろったことってというのは、非常に大きかったと思います。数学をご専門になさっている2人の先生も、経済学のアプローチに非常に関心を寄せていただいたという点というのも、非常に大きかったなというふうに思います。

ただ、反省点というのは、これは後でも言うんですけど、お二人の数学者の数学的な定理をネットワーク経済の分析に応用するには、あまりにも時間的な猶予がなかったかなということです。それは今も私たちの課題で、これは最後にもお話しさせていただきたいと思います。

これが一応、われわれのプロジェクトのまとめです。紀要に収められている論文等の私からのまとめということになります。

本日は、豊福先生のご研究の発表もこの後ございますけれども、終わった論文についての話をしてもあまり面白くないので、私のここ最近の関心事についてお話しして、最後にやっぱりネットワークと関連させて、ネットワーク経済の話も当然やりたいと思います。その部分で、先ほどから言っているネットワーク効果うんぬんという話の説明をしっかりとしたいと思います。

最近の私の関心の一つ、これは一つなんですけれども、いろんなことに関心向いてますが、拘束的合意の前提というのがよくあります。これは有名な協力ゲームの前提なんですけれども、例えば、特性関数ゲームがあったりすると、要するに、協力したときにはこの値が出るよというような特性関数というのが前提になってるんです。要するに、協力するメカニズムを説明しているわけではない。要するに、拘束的合意っていうのが先にあって、協力したらこうなるよっていうことを言っている。

そういういろんな関数型の中で、じゃあ経済的な結果はどうなるのかっていうことを言っている

だけであって、その前のマイクロファウンデーションというのは、協力ゲームの少なくとも特性関数アプローチからは出てこないし、従来の標準的な経済学のアプローチからは、ちょっと難しいんじゃないかなというふうに思います。

ここで、よく昨今いわれる利他という言葉がありますけれども、利他というのと協力というのは、これは明確に違うと思っていますし、分けられると思っています。

利他っていうのは、直接的に他者を助けたいという欲求に動機付けられるわけです。これは、親から子への無償の愛とか、そういうことも含むと思うんですけれども、例としては、利他主義を前提とすれば、協力的な行動が導出されるのは、それは正直明らかなんであって、ある種それは協力ゲームの話にもうなっていると言ってもいいんじゃないかなと思うんです。

協力っていうのは、現実的な経済を鑑みてみますと、あくまで自分自身の効用を高めるために、人々と協働をして作業をすること、協同行為を行うことで、なので、自分自身の効用の最適化を目指す独立した主体を前提とした下で、協力的行為っていうのを導くことはできないのではないかなということを、私は考えています。

そういうことに関心があって、最近といっても10年ほど前ぐらいからなんですけれども、John Roemerというアメリカの経済学者がいらっしゃるんですけど、彼が、協力的行動を導く非古典的、最近のということですけども、アプローチで、Kantian approachということで、カントの方法論とかカント的最適化とかっていうようなアプローチを彼は導入して、協力的行動のマイクロファウンデーションを与えようとしています。

ナッシュ的方法論、ナッシュ的最適化っていうのは、われわれがよくゲーム理論で一番初めに習うような話でございまして、これはある種、相手に対してどういうふうな、相手の戦略がどう出た、どう出てくるかっていうようなことに対して予測してっていうような話なんですけれども、その予測の仕方の程度の差こそどうあれ、とにかく標準的経済学の前になっていることは間違いないです、ナッシュ的方法論っていうのは、

今から説明しますカント的方法論っていうのは、これとは似て非なるものでして、なかなか興

味深いとは思っています。差し当たって、このRoemerの最近の論文、2021年のIERの論文がございまして、これに関して少し題材を経済の文脈に絞って、競争均衡、一般均衡解を題材に見ていくことにしてみたいと思うんです。

次の資料を見ると、資本家経済とかぎょっとするような用語が出てきますけれども、これはRoemerが若干左派の人なので、こういう言い方、要するにキャピタリストみたいな言い方で、これは単純に私が訳してるだけなんですけれども、要するにArrow-Debreu経済のことです。われわれがよく知っている競争均衡の話です。

標準的な経済学における一般均衡で、もう少し、もちろん抽象的な前提の下で話はできるんですけれども、微分可能とか、そういう分かりやすい前提の下での議論を以降ではしてまいります。2要素1生産財というモデルです。労働量が L で、資本量が K で、これら二つが生産要素というわけです。Gっていうのが生産関数です。要するに L と K 入れて、何らかの財出てくる。生産財が出てくるということです。

よくいわれる G の仮定としては、当然、増加関数です。 L と K が増えたら生産量も増える。微分可能な凹関数っていうのも、これも最適解が出てほしいので、基本的にはちょっと強過ぎますけれども、こういうふうな前提で話が進められる。

スモールな n で個人の数を表しています。 x と L と y でベクトルなんですけども、このスモールな x のほうは消費財の需要量です。キャピタルの L は、労働の供給量をこの場合表しているということです。

セッティングの続きですけれども、個人 i の選好で効用関数があって、選好っていう抽象的な話じゃなくて、もうダイレクトに効用関数を与えています。 u_i の仮定として準凹関数で、イメージ的には、要するに限定に向かって凸な無差別曲線が描けるような前提を考えていただければいいです。当然、微分可能性も仮定しています。

バーと書きまして、初期保有量を表します。 K バーの i だと個人資本の初期保有量、 L バーの i だと個人の労働初期保有量。よく見る記号ですけれども、シート i と書いて、個人 i の企業のシェアです。株式保有比率、個人 i の株式保有比率、今、企業は、こういうふうにし生産関数 G というのも一

つ置いているわけですから、一企業モデルと考えていただいてもいいと思うんです。だから、いちいちどここの企業のシェアっていうふうに考えなくてよくて、単純に添え字としては、個人 i の、そのある一つの企業のシェアということで話は進んでいきます。 p は消費財の価格、 w は賃金、 r が、よくいわれる資本のレンタルコスト、資本の価格ということです。

われわれがよく知っている競争均衡の話っていうのは、大かっこ内の経済、 G , u_i , K バー i , L バー i , シート i . i は1から n までの、こういうふうなまとまりをある社会の経済と見立てて、価格ベクトル p , w , r と、企業による資本と労働の需要量、 K アスタリスク、 L アスタリスク。企業の財の供給量はスモールの y のアスタリスクです。 n 人の個人の財の需要量は、 x_1 から x_n のこのベクトルで、労働供給量が L_1 から L_n のベクトル、および資本供給量、 K_1 , K_2 , K_n っていうふうには、これもベクトルですけれども。

そのうえで以下の条件を満たすように企業は行動します。まず一番最初の条件っていうのが利潤の最大化です。利潤の最大化がsubject toっていうことで、これ生産関数が制約になってて、それで要するに K と L が決まってきて、 y やそのアスタリスクの値も決まってくるということです。その最適な K と L , y , そアスタリスクの値を代入したものの、すなわち収入引く費用が、いわゆる利潤になってくるということです。

消費者側に目を移しますと、何をするのかというと、予算制約の下で、ここでは $p x = w L + r K$ + シート i の大文字のパイのアスタリスクということで、企業のシェア分だけ所得になってるということです。利潤が配分されて。あとは、初期保有以上に提供できない、供給できないんで、 L_i 小なりイコール、 L バー i とか、 K_i 小なりイコール K バー i とかっていう条件が付いてまして、そのような制約が場員そするということになります。

あとは市場清算、マーケット・クリアリング・コンディションっていうのがあって、需要イコール供給っていうことです。この条件に基づいて競争均衡がきまってくるということです。

それで、競争均衡の決まり方なんですけども、企業の利潤最大化の1階の条件っていうのは偏微分です。 G を K で偏微分したものが p 分の r と。 G を

Lで偏微分したものがp分のwってということで、資本の限界生産性がp分のrと、労働の限界生産性がp分のwというふうになるというのが利潤最大化の1階の条件です。

これRoemerの言葉なんですけど、p分のw掛ける個人iの労働の供給量を掛けたもので、個人iの生産への、労働者iっていうふうに言ってますけど、これ別に労働者と投資家を区別してるわけじゃないんで、そういう言い回しをRoemerはしてますけれども、別に個人iの生産への貢献ということになります。両資本に対しても同様です。その合計というのが、要するに個人iの全体的な生産への貢献ってということになるわけですが。

凹性から成り立つ不等式ってというのがあって、それがGK、Kアスタリスクプラス、GLL小なりイコールGというふうに、真ん中よりちょっと上にある式でございまして。これはGの凹性から、普通にこれは成り立つ、定義と言ってもいいんですけれども、そういう条件です。

なので、さっきの生産への貢献という話をしますと、生産への貢献というよりも生産自体ってというのは、この一番最後の式、1より大きいということで、資本家経済における生産ってというのは、生産要素の貢献の合計以上の価値を生むってようなことが、競争均衡のよく知られた、ある種、左派的な人から指摘されるような、これはポジティブな結果です。

じゃあ、この資本家経済、Arrow-Debreu経済の競争均衡の性質ってというのは何かっていうと、一つは、おおむね最初に挙げられるのが、いわゆるパレート効率性っていうやつです。厚生経済学の第一基本定理ってということで、これは本当に金科玉条のごとく最も有名です。

二つ目も、これもまた結構重要でして、よく一般均衡でいわれてるのは、情報を節約してるっていうか、知らない情報というか、過剰な情報を知っている必要性はないということなんです。要は、企業はそれをRoemerの言い方で言うと、情報を分権化すると、Decentralizeするっていうふうな言い方をしています。

aのところですけど、企業は価格と生産関数、要するに企業の価格と生産関数っていう、もちろん生産のために知っている情報を知っているんだけど、消費者の話は何も知らない。つまり選好の

話は何も知らない。消費者は価格と選好を知ってるんだけど、利潤に関わる情報ってというのは特に知らないんです。それがマーケットということで、そういう情報を節約してもマーケットでそれらを集約sするということを通じてうまくいくメカニズムが、このArrow-Debreu経済なんだっていうことです。

cは少し左派的な見方からの観点からですけれども、労働者と投資家は、自身の生産への貢献分を正確に受け取ることができてるんだと、企業の所有者はシェアに従って、余剰金、surplusの訳ですけれども、これは要するにプラスの利潤のことです。これを全額受け取るっていう前提になってます。

ただ、もちろん、よくいわれているのが、Arrow-Debreu経済に関しては、結果としての配分が公平であるとは限らないっていうようなことは、一つの欠点っていうか、要するにパレート効率性以上のことってというのは特に何も言わないんです。パレート効率性ってすごく弱い主張で、公平性については特に何も言ってくれないっていうのは、よく知られた事実です。

ここで話は変わるんですけれども、じゃあArrow-Debreu均衡から、収入というか、実質的に収入になってるんですけれども、線形で所得税課して、ちゃんと再分配するような話をしてみたらどうかってことです。これ、よく知られてる話なんですけれども、ゆがみは出るのはよく知られてた話です。

どういうゆがみかと言いますと、労働者と投資家と予算制約、個人です。個人iの予算制約なんですけれども、要するに所得税を抜く、要するに1引くtが、今までの取り分、所得になってる取り分に掛かってる。これ残った分です。

要するに1引くtなんで、所得税後の残った個人iの所得で、n分のt掛ける、後半のp掛けるGの値っていうの、このKアスタリスク、Lアスタリスクで評価したこの値っていうのは、これは所得が再分配されてる値、全員から、要するに線形で割合tで所得を取って、それをn等分するっていうことです。n人で等分して、それを所得にしているということで、こんなふうな予算制約に変わるわけなんです。

そうすると、さっきの話で言うと、個人iの1階

の条件が、これ右辺、要するに、マイナスuxii分のuLiiっていうのがありますけども、これは限界代替率です。しかし、左辺のこれがくせ者なんです。いわゆる、かっこ1引くtっていうゆがみが入るんです。競争均衡、普通のArrow-Debreu経済の話だと、ここがポイントになってきます。資本の供給量っていうのは、持ってる量そのままっていうことで、つまりKiイコールKバーiとなります。

当然、利潤を最大化するので、先ほどのp分のwのところ、GをLで偏微分した値が入って、要するに、1引くt掛ける、労働の限界生産物イコール、このマイナスなんちゃらっていう右辺ですけども、これは限界代替率ですっていうのが入ってくるということです。そうすると、いわゆるこの、かっこ1引くt掛けるっていうのが厄介です。要はtがプラスなんだから、パレート効率性の条件である限界代替率イコール限界変形率っていう、その条件っていうのをviolateするということです。いわゆる、一番ファンダメンタルな議論でいうところの正の死荷重を生むという結論が出てしまうということになります。

つぎに、Roemerの主張なんですけれども、こういう、この再分配が正の死荷重を生むっていうのは、Roemerは、各エージェントがナッシュ的に行動を取るようなことを前提にしているからだっていうふうに彼は主張するわけです。

じゃあ具体的にそれを回避する方法って何なのっていうことで、二つ目のトピックとして、ナッシュの最適化とカント的最適化っていう話をしてみたいんですけども、まず具体的な議論に入る前に、大きな疑問を挙げておきたいと思います。次の二つです。

一つは、Arrow-Debreu経済の資源配分メカニズムによって得られる性質っていうのは、この経済特有の性質なのかということです。要するに、パレート効率性とか情報の節約性とかっていうのをどう思います？っていう話です。

2は少し1とも関連するんですけども、パレート効率性とか資源配分に関する、さっきの情報の分権化というのがありました。要するに情報を節約してるということです。要は、マーケットに臨む人たちは、知っているべき情報以外のことは、特に知る必要はないっていう。そういうことっていうのは、限界生産に従って報酬が決定される、

いわゆるArrow-Debreu的なメカニズムとか、企業の私的所有権制度、いわゆる株式所有に基づいて、利潤が、余剰に生まれたお金に分け与えられることから発生するのかどうかということです。

このことがパレート効率性、いわゆるArrow-Debreuが前提にしているような仮定というのが、望ましい性質を生み出しているのかっていうような話です。

ここからは完全にRoemerの記述に従って話を進めていくわけなんですけれども、この大文字のV、大きな太文字でV1、Vnっていうことで、関数並べてます。これ、あくまでRoemerによる定義の仕方なんで、ゲームにも正式な、もちろん戦略とか、プレーヤーとかをしっかりと定義しなきゃいけないと思うんで、ゲームの定義の仕方は、若干いいかげんなんですけれども、少なくともViというのは利得関数を表してしまっていて、Inっていうのは、I一個一個がRプラス上の区間なんです。要するに、1次元の区間です。それがn個直接切り取られている。いわゆる、n人の戦略の組み合わせを表してるわけです。それが何らかの実数値を与えているということで利得関数と。

個人iの戦略は、そのiから取られてるEのiということで、これエフォートの多分Eだと思うんですけど、Eiということで、後で考えると、それを貢献とか努力の量だっていうふうに理解すると分かりやすいというような話なので、そういうことです。

ゲーム、これはRoemerの用語なんですけれども、ゲームが厳密に単調増加とか、単調減少とかっていうのは、利得関数Viっていうのが、他の個人jです、iじゃないjの貢献Ejに対して、厳密な増加関数であったり、厳密な減少関数であるっていうようなことを言う。これは後で、定理を主張するとき少し使う用語です。

定義の二つ目です。これ、めちゃくちゃ重要な定義なんですけれども、カント的最適化がここで定義されます。カントの均衡の定義とは何ぞやということです。ナッシュの均衡じゃなくてカント的ということです。戦略プロファイルE、E、Eと、全員Eを取るっていうことで、これがsimple Kantian equilibriumってことで、単純カントの均衡って言うんですけども、この式です。任意のiに対して、Viを、全員が同じ戦略を取ったときの、

戦略解はEになりますよっていうのが単純カントの均衡で、全員が同じっていうところがポイントです。全員が同じです。

続いてです。加法的カント的、二つ目です。加法的カント的均衡っていうのは、**additive Kantian equilibrium**っていうことなんですが、それに対して、さっきの**simple Kantian equilibrium**は、全員が当初から対象です。いわゆる同じ戦略を取っていたっていうことを前提にしているわけですが、Lには別々の戦略を取っていてもいいんですが、逸脱の仕方が加法的に入ってるんです。

プラスローというふうに入ってる、そういう全員が同じ逸脱をしたときの最適解の、そのローの値に関しての最適値はゼロだと言ってる。すなわち要するに、もともとのEの1, Eの2, 点, 点, 点, Eのnっていう組み合わせっていうのは、全員が同じ逸脱をしたときには、逸脱しない方が良かったんじゃないかと。もともとはこれで、落ち着きどころとして一つ成立してたんだっていうわけです。この定義はそんなことを表しています。

戦略プロファイルEの1, Eの2, Eのnっていうのは、今度は乗法的、**multiplicative Kantian equilibrium**というのは、さっきの加法的な定義の方がプラスローだったのに対して、今度は乗法なので掛け算です。ローEの1, ローEの2, 点, 点, 点, ローEのnっていうふうに、掛け算で入ってるような入り方をしていると。そのときに、このローについて最適値、 V_i を最大化したときの最適解が1だということなんです。

これもだから、さっきの加法的カント的均衡と、結果としては同じなわけです。要するにプロセスが違うわけです。逸脱の仕方が違うと。要するに、ローだけ掛けて、全員が同じような逸脱の仕方をするんだけど、実際のところの最適値は1だったんだから、Eの1, Eの2, Eのnっていうのを取る状況っていうのが、全員にとって結果的に良かったんじゃないかというようなことが言えるということです。

じゃあ、これの何がカント的なのかということです。カント的の由来です。もちろんカントは、イマニュエル・カントなんですけれども、イマニュエル・カントによる定言命法です。「あなたの意志の格律がいつでも同時に普遍的立法の原理として妥当するように行為せよ」っていうのが、

私、哲学者でも何でもないので、こんなことを解釈するっていうようなことは言えないんですけれども、でも、私なりに解釈すると、自分と同様の逸脱行動が得になる場合にのみ、現状からの逸脱を認めるっていうようなことなんです。

さっきも見ましたね。加法的カント的均衡とか、乗法的カント的均衡でも、全員が同じ逸脱の仕方、加法的に逸脱する、乗法的に逸脱するっていう違いはありますが、全員が同じ逸脱の仕方に対して現状が最善なわけです。ですので、この原理によって逸脱しない状況では、自分の行為っていうのが、他者によっても同様に採用されるという意味での、道徳的普遍性を獲得できているというふうにRoemerは主張するわけです。

その辺が、この、いつでも同時に普遍的立法の原理として妥当するように、自分の行動っていうのが、他者に対しても望ましいようなものになっているという普遍性があるんだという、そのカントの主張に対応しているということなんです。

当然、注意なんですけれども、先ほどの単純カント的均衡の話で出てきた、これは一番最初の定義です。x, x, xっていうことで、全員が同じ戦略取ってるんですけれども、当然、加法的カント的均衡とか、乗法的カント的均衡では、当初の状態っていうのは、別に全員違う戦略取っててもいいんです。逸脱の仕方に対して、同じ逸脱の仕方に対しては、それは逸脱しないほうがいいよと言っているということなので。

なので当然、主張としては、単純カント的均衡というのは、加法的カント的均衡と乗法的カント的均衡に含まれるということになります。最初の状況が対照的ならば、乗法的カント的均衡っていうのは、単純カント的均衡にもなりますし、加法的カント的均衡っていうのは、単純カント的均衡になります。

Proposition1ということでRoemerが与えているのは、任意の厳密に単調なゲーム、さっきの定義がありましたけれども、これは要するに、利得関数が単調関数だという話でした。それが、単純および加法的カント的均衡はパレート効率的であるっていうことが証明されてまして、乗法的カント的均衡に関しては、少し強めな前提条件あるんですけれども、任意の厳密に単調増加なゲームにおいて、任意の厳密に正っていう条件があって、

厳密に正って何かなっていうと、正の外部性があるっていうことらしいです。

さっき言った、戦略が貢献っていうことを考えると、その貢献っていうのが、望ましい財を生成するような状況っていうのを厳密に正とRoemerは言っている。そのような状況が成立してるとすると、乗法的カント的均衡っていうのはパレート効率的であるってことが言えるということです。

証明は少し省略するのですが、複雑っていうほどでもないんですけど、ちょっと数学的なものです。

パレート最適性は、ナッシュ的行動のみによって分かることっていうのは、正当化されるものではない。要するに、カント的最適化、カント的均衡でもパレート効率性っていうのは出せるよということRoemerは主張しています。

次のフレーズも、ぎょっとしますが、これもRoemerの用語なんで、Socialism1ということで、社会主義1というふうに訳すしかなかったのでそうしました。再分配の話を考えて、再分配のその最適化の方法が、カント的最適化を取るような場合にはどうかということ考えたのが社会主義1です。さっきのArrow-Debreu経済と経済環境は同じです。

労働者のゲームなんですけども、労働者の効用が、 L_i は後半、後ろに L_i って入ってるんですが、前は p 分のなんちゃらっていうのが長いんですけども、これ何かっていうと、いわゆるこれ、さっきと同じです。要するに、もともと持ってた所得の税引き後の残った分と、これは後半の n 分の t 掛けるのなんちゃらっていうやつで、この部分っていうのは、いわゆる税金で取られた分を山分けして、全員で n 等分して所得になっているということです。 p で割られてるのは、ここに入るのは x なので、 p かける x の p が割られてて、その値になってるっていうことです。

当然、均衡なんで、労働供給量は、各個人の労働供給量の合計。資本の供給量は、各個人の資本の供給量の合計になってるということで、均衡利潤はさっきと同じ決まり方です。これは利潤差から決まります。

投資家のゲームっていうことで、別にこの投資家っていうのも、インバスターっていうふうに彼は言ってるんですけど、別に投資家という個人が

別途いるわけじゃなくて、ただの個人なんですけれども、資本を保有してることから効用は生まれないという前提を置いてます。 r がプラス、要するに資本の価格がプラスである限りは、元の初期保有量にするのが最適であるっていうことがすぐに出てくるということです。

定義の3なんですけども、この経済における社会民主的均衡っていうことを彼は定義してまして、何かっていうと、いわゆる、何が違うといいますと、最初のこの、 K アスタリスク、 L アスタリスクの決まり方とか、 y アスタリスクの決まり方っていうのは同じです。これは利潤最大化です。先ほど言いました、この二つ目の K_i イコール K バー i っていうのは、任意の i についてこの条件が成り立っているというのは、さっきの投資家の話です。これは持つてるものがそのまま供給量になる。

ここの部分は重要です。労働者の労働供給に関して、カント的に決めるっていうことなんですけど、これは後で深く考えましょう。

x_i については、これは消費財です。これはさっき説明したとおりだと思います。要するに、これは予算制約を p で割ってるっていう、それだけのことなんですけど、前の部分がもともと持ってた部分の税抜き後の額で山分けされた分です、 E で、マーケット・クリアリング・コンディションっていうのは、財の均衡と労働量の均衡と資本量の均衡っていうのが、供給と需要で当然成り立っている。これはArrow-Debreu経済も同じです。

二つ目の命題なんですけれども、社会的民主的均衡はパレート効率的であると言えるんです。すごいのがやっぱりここなんです。任意の税率 t に対して、パレート効率的ってなるんです。さっきの、ここは後でも議論しますが、思い出していただきたいのが、Arrow-Debreu経済では t が入ってて、それがプラスだったら y がみにつながって、パレート効率的じゃなかった。カント的に労働供給量を決める。これ加法的カント的最適化で決めるんですけども、その場合には必ずパレート効率性が任意の t では成り立つと言っているわけです。この命題の主張はこのようなことになります。

一つ目の、一応、証明を簡単に見ていきますと、利潤最大化条件で、価格 p 掛ける G の K の偏微分が r になってる。これは要するに、さっき p で割った

ら同じです。要するに、労働の資本の限界生産物がp分のrになっている。労働の限界生産物がp分のwになる、そういうことです。

加法的カント的均衡で、労働供給量を決めるんで、uiに関して、ローで微分して、イコールゼロで1階の条件なんですけれども、加法的均衡なんで、Liプラスローっていう逸脱の仕方、Ls、これLiの合計なんで、nローっていう、合計するとnローっていう、プラスnローが集まってくるわけです。Liのところに、またローっていう逸脱の仕方が後ろに、右の労働の供給の部分のところに、個人の供給のところに入ってきてまして、その解が、加法的カント的均衡ならば、これをローイコールゼロで評価したものが、この1階の条件を満たすはずだということです。

必要条件ということで、これを解いてやると、すごいことに、このtが消えるんです。Tが消えて、任意のiに対して、p分のwイコール、これマイナスのuの偏微分の比ですけれども、これっていうのは限界代替率です。p分のwイコール限界代替率が出て、三つ目は、資本はそのまんま、持っているものをそのまま供給するっていう話になっています。

この結果から何が言えるかっていうと、いわゆる任意の個人iに対して、労働の限界生産物は限界代替率になっていて、いわゆるこの限界代替率イコール限界変形率っていう、この条件っていうのが、任意のtでホールドするんです、なので、社会民主経済における厚生経済学の第一基本定理ということで、これ重要なのは先ほども言いましたけれども、線形所得税による平等な再分配が導入されていることがポイントだということです。

これによって、要するに、いわゆる再分配っていうのは、よくこれは標準的な経済学でも議論されるところですけども、いわゆる公平な分配を目指して成されるわけですから、いわゆる線形所得税による再分配がパレート効率性を満たすっていうのは、これ非常に大きいわけです。

さっきから言ってますけれども、Arrow-Debreu経済と、このRoemerの言う社会民主主義経済の違いっていうのは何かっていうと、主体のナッシュ的最適化を前提とした場合には、行為を変更するのは自分だけなんです。要するに、相手の戦略が所与として、自分が変更したら得になるか損

になるかということを考えるので、この1引くtっていうゆがみがダイレクトに入ってくるんです。

しかし、カント的最適化の場合というのは全体を考えるんで、労働供給ベクトル全体を考えるんで、この1引くtについては全員が直面している状況なんで、それらを全部考慮するために、資源配分のゆがみにはならないんです。

さらに、社会民主主義経済では、Arrow-Debreu経済とは異なって、課税による所得の減少っていうのが、再分配によって完全に補償されるっていうことが言えて、それがパレート効率性の成立につながってくるというわけなんです。

命題3は、これ簡単に与えておくのですが、存在していたとしたらパレート効率的なのはいいけど、本当に存在するのかっていう話は次の疑問として絶対あると思います。その均衡の存在っていうのをRoemerは言っていて、これも証明省略させていただくんですけど、必ず存在する条件はあるよと言ってます。

生産関数のGは厳密に凹で、稲田コンディションです、いわゆる、稲田コンディションっていうのは要するに、偏微分して、その出発点であるところの、偏微分した値がゼロのときに、要するに、最初の増加がいきなりもう、ボンとロケットが発射するかのように増加するけど、それで偏微分した値をプラス無限大に近づけていくと、その偏微分したその変数をプラス無限大に近づけていくと傾きは緩くなるっていう、こういう条件です。

つまりこれは不動点を補償するような条件で、マクロでよく用いられたりする条件ですけども、本当、簡単に言ってしまうと、多分45度線と、この生産関数が確実に1回は交わるよっていうような条件で、これ45度線と交点を持つところから分かるとおり、不動点定理を適用したいっていうことなんです。

だから、証明方針は、基本的にはArrow-Debreuのアナロジーです。若干、この稲田コンディションっていうのは、そもそも生産関数の仮定が強いんで、稲田コンディションっていうのもちょっと強めなんですけれども、応用的にはそこまで強い条件じゃなくって必ず存在することが言えるってことなんです。

最後に、この経済の注意なんですけれども、一つ目は、これは利点です。カント的最適化を実行

するために必要な情報量っていうのは、ナッシュ的最適化を実行するために必要な情報量と同じです。何を言ってるのかっていうと、要するに、別に相手の戦略を知ってる必要はありません。いわゆる、自分と同等の逸脱をした場合についてことをカント的最適化は考えているわけなんで、別に相手の具体的な戦略を、現実的に取る戦略を知っている必要はないので、情報量についてはナッシュ的最適化と全く同じになるんです。

続いて、これはクルーシャルなんです。プライスイリュージョンっていうふうには彼は言っていて、価格錯覚なんていうふうな言い方をしています。このカント的最適化においては、プレーヤー全体の戦略の変化が伴うわけですから、先ほど言ったとおり、そうすると、これってマクロ経済全体の変化なんじゃないかって言えるわけです。そうすると、マクロ経済全体の変化だったら、価格ベクトルの変化も無視できないんじゃないのって話なんです。

しかし、この命題2で先ほど見ました、社会民主主義経済のパレート効率性を証明した証明の中で、明確に言いませんでしたけれども価格は固定されてました。これは要するにArrow-Debreuと同じ扱いしてたんです。これって、やっぱりおかしくないのか。ナッシュ的最適化に関しては、競争経済において、自分の意思決定っていうのが、他にはほとんど影響を与えないよというような条件があったから、価格が固定されていた話で、つじつま合ってたんです。

しかし、カント的最適化っていうのは、全体の変化っていうのを考えたときのアプローチなんです。だとするのならちょっとまずいんじゃないのっていう考え方があるだろう。これは、はっきり言って簡単に解決できるような話ではありません。そもそも、このカント的アプローチが本当に応用可能かどうかということを決めるぐらい、重要な指摘になっていると思います。

続きまして、社会民主的な見方を強めるならば、三つ目なんですけれども、シート1、シートnっていうのは、これももちろんどこまで考えるかっていうところが重要なんですけれども、これはArrow-Debreuではギブン（所与）だったわけですが、政策変数としても考えることができるだろうということなんです。

四つ目の注意点なんですけれども、重要なのはArrow-Debreu経済と対照的なことが成り立ってまして、労働者の税引き後の賃金は、労働者の限界生産物と等しくありません。これはArrow-Debreu経済では等しくなっていたということです。Arrow-Debreu経済は、これが等しくて、むしろパレート効率的じゃないということがいわれている。カント的配分では、それは等しくないんだけれども、配分はパレート効率的であるっていうような話で、結構対照的な、結果が出るということです。二つの方法論で傾向としては全然違うんです。

さっき言った、ここの価格錯覚の話で、やっぱりちょっと時間がないので、話のスピードを少し上げさせていただきます。いろいろ、はしりませうけれども、このプライステイカーの仮定が果たす役割について、例を用いて考えたいんです。例を用いるので、選好はすごいこのログリニアみたいな、こんなすごく強い前提で、対数線形みたいな形で入ってまして、特にこのノーテーションっていうのはお気になさなくてもよいんで。

何を聞いていただきたいかというと、この最後の式です。Leftっていうのが、パレート効率的な労働供給量です。なので、このLeftのアルファ引く1の二乗イコール、ラムダ引くLeft分の1っていうのが、これがパレート効率的な労働供給量を決める式だということさえ分かればいいです。

続いて、tによる再配分があったときの、これはさっきと一緒に。かっこ1引くtのゆがみが入って、LNのアルファ引く1乗が、ラムダ引くLN、これナッシュですけど、NってナッシュのNですけども、それ分の1ということで、これが競争均衡というか、ナッシュ的最適化によって求められるような労働供給量です。

カント的最適化をした場合には、次のこの真ん中ぐらいの、wプライムかっこLKかっこ閉じ掛けるLKプラス、Kっていうのはカンティアン略です。wかっこLKかっこ閉じ、イコールラムダ引くLK分の1っていう式なんですけれども、ここで要するに、ここです。いわゆるwプライムっていうのが、いわゆるさっきの所与だとするならば、これ微分したら消えるわけです。これ別にLKの関数じゃないわけです。けれども、これは実質賃金イコール労働の限界生産物という仮定を

入れて、プライステイカーではないっていうふうな話で前提を進めていくと、カント的な供給量っていうのは、最後にこのアルファが頭に付くんです。アルファかっこのLKのアルファ引く1乗のラムダ引くLK分の1というふうになっています。

三つ並べてみます、何が違うのか。まず、三つ並べる前に、均衡の決まり方は、当然もちろん労働市場のクリアリングコンディション入ります。労働供給量イコール労働需要量って、これは当然ありますけれども。

Leff, パレート効率的な労働供給量と、ナッシュ的な最適化によって得られてるものは、これは任意の t に対して、 t がプラスだったらです。プラスだったら、税率がプラスだったらナッシュの配分で過少供給になる。これはよく寡占とかでもそうなんですけれども、いわゆるナッシュの配分で過少供給になって、パレート効率性なものと比較すると、正の死荷重を生むっていう、これはそのメカニズムそのものです。

カント的均衡量の決定式は、さっき言ったとおり、 1 引く t の、ナッシュのところは 1 引く t だったものがアルファだと。アルファに変わってると。ここです。なので、いろんなことが言えるんですけども、アルファ大なり 1 引く t とかいうのが成立してたら、このパレート効率的配分っていうのは、カント的配分に近づくっていうようなことが言えたりとかします。

t がゼロに近いときに、パレート効率的な配分とナッシュの配分っていうのは等しく、大体同じになるっていうのが、それは当然です。これは別に普通にことを言ってるだけです。要するに、完全競争解がパレート効率的だっていうことを言ってるだけなんで、これはそうなんですけれども。一方で、興味深いのは、逆に t が 1 に近いときに、これです。アルファのLKのアルファ引く 1 イコール、ラムダ引くLK分の 1 なんです。カント的均衡量の決定式には、 t が入ってないんです。

ですので、アルファが十分に 1 に近いと、カント的均衡は t が 1 にめちゃくちゃ近くて、本来めちゃくちゃゆがみを、Arrow-Debreu経済ではゆがみをもたらす、その t の存在がめちゃくちゃ大きかったとしても、それは、そういったことに依存せずに、むしろ生産関数の曲がり方のパラメータです。アルファに依存してくるんだっていうよう

なことを言ってるんです。

なので、言えることは、配分のパレート効率性っていうのは、プライステイカーの場合には、社会民主経済でも、やっぱり一般的には言えないっていうことなんです。これはArrow-Debreu経済と同じです。

要するに、ナッシュ的配分のゆがみが課税に起因するんです。さっき言ってた 1 引く t っていう、この項に依存してたわけですけども、カント的配分のゆがみっていうのは、経済環境です。この例では、生産関数の曲がり方に由来してるっていうことで、全然違うところに由来する。パレート効率性の正の死荷重を生むという意味合いでは同じなんですけれども、そういうことです。

いずれにせよ、やっぱりプライステイカーの仮定っていうのがパレート効率性の成立にクルーシャルに効いてるってことは、これは明らかなわけです。koko

少し急ぎます。社会主義2っていうモデルも彼は提案してまして、二つ目のモデルなんですけど、これさっきと何が違うのかっていうと、ここです。この予算制約っていうか、この x_i の決める、事実上、消費財の量を決めるものなんですけれども、そこにラムダLS分の L_i プラス、かっこの 1 引くラムダのKS分の K_i っていうことで、これLSっていうのは、労働供給量全体で、KSっていうのは資本供給量全体なんで、その自分の割合です。

それにラムダということでパラメトライズして、その上で、凸結合取ってるっていう、この値自体を、この利潤の再分配のパラメータ、シェア、要するに、さっきのシート i の役割を、このいわゆる自分の労働の貢献と資本の提供の貢献の凸結合ということで、こういうふうな分配の仕方でも分配してみたらどうかということ。これ課税の話じゃないんですけどね。

ラムダっていうのは、多分、恐らく政策変数で、こういう経済考えたときに、ラムダsharing equilibriumってことで考えてるんですけども、それが、さっきは L は加法的均衡によって決めましたけど、乗法的カント的均衡で決めたとしても、これ、定義4の特徴はいいですかね。ウエートで、こういうラムダLS分の L_i プラスかっこの 1 引くラムダかっこの閉じのKS分の K_i っていう、こいつをウエートに利潤を分配してるわけです。全員

で分け与えるというわけです。もちろん n_2 の合計は1なので、うまく分け与えられて、利潤が再分配されているということになります。

そうすると、このラムダsharing equilibriumっていうのは、パレート効率的であると言えるんです。さっきと同じような証明なんですけど、これもやっぱり p と w がプライステイカーであるっていうことで、定数なんですよ、与えられてるっていうような話で、結局、限界変形率イコール限界代替率、いわゆる、この条件を簡単にした話で、労働の限界生産物イコール限界代替率っていうのが補償されて、結局、限界変形率イコール限界代替率っていうのが補償されるからパレート効率的っていう、さっきの証明と全く同じ話と言えるということで、いろんな再分配の在り方でもって、カント的最適化っていうのはパレート効率性を満たすよっていうのを言っています。

このラムダsharing equilibriumの存在についても、Roemerは証明してます。少し条件が複雑になってます、さっきより、消費財と余暇が正常財であるとか、稻田コンディションもまた入ってます。選好の凸性とかっていうのも入ってます。今見ただけでも二つのものが、カント的最適化を行う主体を前提として、これ税制度などを、ラムダシェアリングは税じゃないんです。こういう決め方です。自身の貢献に対して言っている。自身の労働の貢献の供給度合い、資本の供給の貢献度合いをラムダというものでウェイトして凸結合取ったこれを、いわゆるシェアにするわけです。シェアに紐づけて分配するよっていうようなことなんですけどね。

そういう再分配を考慮した社会民主主義経済で、一般均衡解は、パレート効率的は配分を実現するということと言える。若干、条件は厳しくなっていたりしますが、その存在も言えてるということなんです。さらにRoemerっていうのは、公共財とか環境汚染の話でも、社会民主的一般均衡理論っていうのを提示してまして、これ非常に興味深い理論なわけです。

最後に私、これ短く話をします。カント的最適化を応用して、2人の数学の先生がたにせっかく共同研究のグループに入っていたので経済動学の話をしてみようと思います。話としては、私の専門が寡占だったので、動学的寡占を選

んだのと、動学っていうのは今言ったとおりです。微分方程式の話を応用したいというような話が頭にあったからっていうのが特にあります。

さらに、寡占を採用した明確な理由としては、今言った、このパレート最適性にやっぱりプライステイカーの仮定っていうのが非常に効いてて、このプライステイカーの仮定っていうのを外した場合の均衡分析っていうので、当然、寡占っていうのはプライステイカーじゃないので、企業っていうのは部分均衡なんですけれども、一般均衡じゃないんですが、部分均衡なんですけれども、少し配分の話っていうのをしてみたいなというふうに思いました。

設定の最後ですが、Roemerが環境汚染の話とかもしてたので、環境汚染の話も同時に入っていて、さらに、このプロジェクトはネットワーク効果の話なので、ネットワーク効果も同時に考慮されてるような動学モデルを話してみたいと思います。時間がないので急ぎますが。

このモデルにはノーテーションが非常に多くて、少し面倒くさいんですが、ご理解いただきたいのは、時間流れますよと、ゼロからプラス無限大まで。キャピタルの i で、これは品質を改善するためのイノベーション等があって、財の品質を表してて、ここです、重要なのはキャピタルの Q です。時点 t における企業 i の生産する財のネットワークサイズだと、これは財の需要量に関する増加関数です。

これイメージとしては、財の需要が、要するに持ってる仲間が増えると、例えば最近だと、オンラインゲームですかね。私、あまり詳しくないのですが、オンラインゲームとかだと、世界の反対側でそのソフトを持ってる人とつながることができて、財の需要量で、財のネットワークが増えると効用が高まってくるというようなことが観察される。それをモデル化してるんです。

q_i は生産量で、これはデルタとかアルファの値っていうのは、後でちゃんと説明します。ノーテーションがいろいろ煩雑で面倒くさいなんですけれども、この辺、飛ばさせていただきます。

重要なのは、環境汚染も入ってるんで、政府の政策変数はこの環境税です。emission of tax rateです。uiっていうのは、企業はさっきの製品自体の品質を改善するためのR&Dもするんだけど、

green R&Dもするという事です。環境汚染を減らすための投資もするという事で、今の話で、じゃあ代表的消費者の効用関数ってどうなるかっていうと、こんな長ったらしいやつになるんです、この U_t です。

このようになるんですけれども、重要なのは、この代表的消費者の効用関数、これは特に先行研究にあったわけじゃないんですけれども、私が、これから導かれる逆需要関数はこれだよなということで特定したんですけども、逆需要関数は、 p_{it} は、ここです。いわゆる、いつもの線形の大文字のAとか小文字のaとかで表現されるよう部分っていう、大かっこの中身が複雑なんです。

ここで、 X_i っていうのは財の品質です。企業 i の財の品質で、 Q_i はネットワーク効果で、これは要するに、財の品質が高まったり、 Q_i が高くなると、同じ数量に対して価格は高品質になるから価格上がるよとか、ネットワークの効果が上がって、その財の価値が高まるから、価格が上がるよっていうようなことを言っています。

BとDは代替性を表すパラメータで、Bは必ずD以上で、Dっていうのは、プラスの値だと代替性を表します。マイナスだと補完財の関係性を表すんですけども、基本的には代替財である。戦略競争なので、代わりになってる財が競争をするので、Dはプラスだとここでは仮定するんです。企業 i の費用関数は生産量について二次関数で表されるものを考えます。

次に動学的課程です。さっき言ったネットワークサイズっていうのを考えたときに、 dQ_i/dt っていうのが、要するに、これはネットワークサイズが時々刻々とどう変化するかっていうんですけど、これは財の生産に対してどんどん増えていくよと。マイナスアルファの Q_i っていうので、アルファは何かというと、これ財の購入をやめる消費者の比率っていうのをに入れてるんで、この分だけ時々刻々と減ってくと、現状から減っていく。財が生産されて、 Q_i は時々刻々と高まるんだけど、アルファ Q_i の分だけ減っていくよっていうのがあって、スモールの q_i とキャピタルの Q_i は、正の相関があって、さらに言えば、それが効用を高めるような仕組みになってるということです。

環境汚染の排出量なんですけれども、これシータっていうのはパラメータで、これ u_i の効率性を

表します。当然これを見ていただいたらお分りになるとおり、シータが高ければ高いほど、ここはゼロに近づいてきますんで、 u_i の効率性が高いわけです。要するに、 u_i っていうのは、これはgreen R&Dです。環境汚染を低下させる。要するに生産するだけで、1対1の対比表で、環境汚染につながってると、全体の環境汚染につながってるんです。これ企業の、 n 企業分だけ足してるんですけども、エータ ρ っていうのは、このエータだけ、環境汚染が自然に風化するというわけです。だからマイナスエータ ρ っていうのに入れて、動学的過程を入れてるということになります。

EDっていうことでenvironmental damageを表現するわけなんですけれども、これはたまった分だけ、二次でコスト換算される、これはソーシャルコストで、emission taxは、各企業単位で言うと、タウ τ かっこの q_i 引くシータ u_i って、この分だけ税金が取られて、税の総額がPTです。これはpollution taxの総額ですけども、それは企業分だけ合計されてる分になるっていうことで、各企業の、その時点 t における利潤っていうのをこんなふうに表示されて、後ろのこのマイナス2分の $1/u_i$ 二乗と、マイナス2分の $1/u_i$ 二乗っていうのは、二つのR&Dに伴う努力関数です。努力によって費用がかさむっていうこと。これを二次関数で入れています。

企業の目的はもちろん数字的に、これ時間連続で考えてるんで、 e でローっていうのは利子率で、このマイナス e ロー t は割り引くということになるわけなんです。利潤の最大化に際してはそれら連続時間の総和を e ロー t でありびいたものを最大化するわけです。

社会的余剰というのは、各時点 t においては、消費者余剰と、利潤は総余剰です。environmental damage引いて、政府の観点からすると収入なんで、pollution taxは足しておく。そんなようになっているわけです。

分析の方法なんですけれども、これはもちろん動学的な過程が三つも入ってるんで、これはさっき説明しなかったんですけど、品質です。品質は、R&Dで頑張った分だけ X_i を高める効果で入ってて、デルタ X_i だけは、これは、デルタっていうのは、これ腐ってくるんです、品質がだんだん低下していく。減価償却の比率みたいなもんです。と

このように三つも動学的調整過程を考えてるんで、ちょっと複雑なんです。なので開ループ解ぐらいしか出せなくて、先行研究も導出しているのは開ループ解だけです。

ナッシュ的方法っていうのは全部 q も、これコントロールバリエブルは q_i と u_i と I_i でキャピタル I の方です。上添え字ナッシュで決めるんで、 N とします。

カント的方法是、 q_i に関して、要するにマーケットだけです。生産物市場だけ乗法的カント的最適化によって決定して、 u とキャピタル I について、このR&Dの水準っていうのはナッシュ的最適化によって、これは別に決定的な過程じゃなくて、これは別にカント的最適化にしてもよかったんですけど、ここをカント的最適化に直しても、特に結果は変わらなかったと思います。

均衡解を最後まで導出するのは、ここまで特定化してるモデルにもかかわらず、やっぱり難しいです。ですので、結局分析はシミュレーションに頼ることになります。なので、先行研究、Zhao and Li, 2021年の、オペレーション・リサーチ・データズの論文の結果とここでのケース1とケース2を、シミュレーションの方法によって比較します。ケース1は、シータを特定化しています。

シータって何だったかっていうと、これはgreen R&Dの効率性です。要するに、環境ダメージを少なくするR&Dの効率性を2.5にして、 n を特定化しないんです。 n って何だったかっていうと、参入企業数で、要するに均衡値は参入企業数に依存するように想定してるんです。

ケース2は、 n は50という、50企業が参入しているような市場を考えて、今度はgreen R&Dの効率性を表すパラメータ、シータを特定化しないんです。シータに依存する形で均衡値が求められるように出てくる。

ケース1とケース2で共通して、これも変なことやってたんですけども、先行研究は、キャピタル A 引く c が1っていうふうに、そう仮定するだけで当然結果は出るので、私はそうしました。

いろんなタウの条件、タウ K とタウ N です。これケース1なので n の関数なんです。 n を、ケース1は30企業から70企業まで取ってます。そのときに、縦軸見ていただくとマイナスなんで、ナッシュのほうがでかいんです。これ基本的には同じ

です。企業数が増えるにつれて、生産量はナッシュのほうが大きくなります。

企業数が増えるにつれて、この形状です。この右上がりの形状。全部 u も i も、これ要するに二つのR&Dですけども、R&D水準ですけども、これ両方ともが、だんだんやっぱり参入企業数、要するに、1社ずつの存在感がなくなってくると、やっぱりカント的アプローチとナッシュ的アプローチの差異がなくなってくるんで、どんどん均衡値が近づいていくんです。ただし、大小関係はずっとナッシュのほうが大きいと、どの均衡値もそうです。タウにせよ q にせよ、 u にせよ、 I にせよ。

次、ケース2なんですけれども、シータですが、ケース1はシータ2.5だった、ここだったんですけど、これを2から3まで動かしてるんです。そうすると、やはり大小関係は変わらないんです。ナッシュ均衡の方がやっぱり大きいままです。全部、縦軸、全部負なんで、ナッシュ均衡がでかいんですが、右下がりのものが出てます、こんなふうに。だから、シータと n で効果の入りが違うってことです。これもなかなか、僕にとっては興味深い結果でありました。

ケース1の説明も一応させてもらっています。これ時間があれば説明したかったんですけども、これは要するに産業組織的な説明です。これは、決定的なのはやっぱり参入企業数で、両方の場合において競争が促進されるんで、各企業の意思決定が少なくなるために、格差は減ってくる。だけれども、差は絶対に逆転することはないよというようなことが言えていたりとかっていうことです。これはケース1の話で、あとは、ハミルトニアン条件とかがあったりとか、この辺は技術的な話です。

ケース2に関しては、これはさっき見たとおり、興味深かったのが、こんなふうに差が右上がりになる場合と、要するにカント的な値とナッシュ的な値で、これ u ですけども、これが右上がりになる場合と、 I を取る、今度 I にすると、要するに財の品質R&Dにすると、右下がりになってたりするんです。これで、二つのR&Dで全然動きが違うとかっていうことも見て取ることができて、結構ナッシュの振る舞いと、カントの振る舞いの動き、経済主体の行動原理の違いによって結構違いが出てくるんだと、それについての説明も、

当然ここではしてません。

最後、結果のインプリケーションっていうことで、Zhao and Niっていう人たちの論文だと、 n とシータが増えることを、彼らは市場のmatureと、マチャーと、マチャリティみたいなことを言っていて、市場の成熟っていうふうに解釈していました。要するに企業数が増えたりとか、シータは何になったかという、これgreen R&Dの効率性なんで、効率性が高まっていくってというような経済を、市場やマーケットが成熟してるんだというようなことを言っているんです。

そうすると、タウが減少してくってことで、政府の政策の影響がだんだん減ってくなくてというようなことがあったりとか、あとは、この u と I の動きの向きが逆だったりってようなことも先行研究では取り立てては特に指摘されてないような話でした。

あとは、もちろんナッシュ的アプローチとカント的アプローチを比較したのは、これが動学的方法論で論じられるのは初めてなので、シミュレーションとはいえ、ある種、符号は絶対変わらないんだというような話が出たのは、割と以外だったかなという気がします。

最後、まとめです。すいません、長くなりましたが、ネットワーク経済のさらなる研究に向けてということで、私は代表者の観点から、最後に述べさせていただきまして発表したいと思います。

数学者との連携には経済動学的な分析が不可欠だと私は感じてます。なので、最後の話題で動学の話をしていただいたということになります。特にこのネットワーク経済の話っていうのを、一般均衡解の安定性、さっきのは話しは部分均衡だったので少し微妙だったんですけども、一般均衡の安定性に関してはほとんど何も分かってないんです。

要するに、ネットワーク効果がさっき言ったような、要するに財の需要量が上がって、ネットワーク自体が増大して、それが個人の効用の増加につながるってようなメカニズムが、ある種もっと抽象的に、さっき言ったような線形の効果として入るんじゃないくて、これは計算の過程なんであれですけども、もっと抽象的な数学だと、もっと抽象的に入る。基本的な大枠は同じです。

ネットワークが大きくなることによって、正の外部性を受けるというような話を前提としたときの、均衡解の安定性、それは、どの程度入るかとか、そういうこともありますし、こういうことに関しては何も分かってないと言えらると思います。

当然ですけれども動学の安定性の話なので、常微分方程式とか偏微分方程式の解の性質に関する定理、特に安定性に関わる定理の応用の可能性を少し模索したいというふうに、私は今思ってます。

プロジェクトメンバー4人全員が、当然これはわれわれの総意なんですけれども、この研究プロジェクトで立ち止まらずに、さらにネットワーク経済っていうのをキーワードに数学と経済学の協働を進めていく所存でございます。私の報告は以上にさせていただきます。どうもありがとうございます。ありがとうございました。

豊福 ありがとうございます。じゃあ次、僕から発表させていただければと思います。

私は金融の専門家ということで、金融機関のネットワークというのがわれわれの中でも非常に重要なテーマなので、それに関して研究を進めました。タイトルなんですけど、『Effects of asset commonality among banks on interbank liquidity allocation and economic fluctuations』ということで、銀行の資産を通じたネットワーク形成が、金融危機とかそういう経済変動とか、そういうところに与える影響について考えた論文を発表させていただきます。

まず、モチベーションとしては、Yellenが、世界同時金融危機において、銀行の入り組んだネットワークというのが、システムリスク、金融機関が同時に破綻するような、そういうリスクを引き起こしたというふうに述べています。

Interconnected banking systemsというのは二つに分かれて、ダイレクトコネクションというのと、インダイレクトコネクションというのになります。ダイレクトコネクションというのは、銀行が他の銀行にお金を貸すという貸借関係の下での関係になります。

この論文で注目するのは、これから説明するインダイレクトコネクションになります。このインダイレクトコネクションというのは、図にありま

すように、各銀行が、先ほどの貸借関係がない下でも、同様の資産を持つことによって、各銀行の収益、資産の変動が、コリレーションが生じる、そういうような状態になります。

こういったネットワーク、それが、特に世界同時金融危機においては注目を集めて、この資産が同質化する現象が注目されました。それがアセットコモナリティーというものになります。このように共通した資産を持つ、もしくは資産ポートフォリオがオーバーラップするということによって、直接的な関係はなくても、各銀行のリターンがコリレートするという状態が生じます。

実際にKopytov 2023の研究によりますと、これはシンジケートローンの割合なんですけど、世界同時金融危機の前には上昇したということが示されています。

実際に、世界同時金融危機におけるスタイライズドファクトとしては、銀行のインターコネクションはダイレクトコネクションが減って、インダイレクトコネクションが増えたというのが実証研究によって明らかになっています。その結果として、金融システムの脆弱性というのが上がったということも、これも実証研究によって明らかになっています。

また、このインターバンクマーケット、ダイレクトコネクションが生じる場所ですけれども、そこにおける流動性のトランスファーというのが効率的に行われていなかった。さらには、中央銀行が流動性を銀行に供給するというのも、非常に効率的でなかったという実証研究がなされています。

そこで、私の研究のモチベーションというのが、なんで金融危機の前にこういった現象が起きたのか、このアセットコモナリティーというのが銀行間の流動性配分にどのような影響を与えたのか、そして、アセットコモナリティーというのが銀行の健全性、支払い能力、さらには経済変動にどのような影響を与え、そして最後に、そこから導き出されるポリシーインプリケーションは何なのかということを研究した、そういう論文になっています。

この論文の、それでは早速、モデルの説明に移ります。0, 1, 2の3時点で、グッズとアセットがサーキュレートしている状態を考えます。三つのリージョンがありまして、二つのローカルリー

ジョンAとB、そして、アウターリージョンがあると。ローカルリージョンiには、一つの銀行と預金者が存在しています。銀行は地域銀行、各預金者のプールを持っている地銀みたいな感じを考えます。各地域の預金者の数は1、預金者は2単位のグッズをエンダウメント、持っています。それを、各地域の地銀に預けるということになります。

投資家はアウターリージョンに生息していると、図にするとこんな感じになります。二つのリージョンに預金者がいて、各地域には一つの銀行がある。預金者は2単位をデポジットするということになります。

次に、この2単位預かった銀行は、この2単位のグッズを、ストレージかローカルプロジェクト、もしくはジェネラルプロジェクトに分配します。このローカルプロジェクト、ジェネラルプロジェクトというのは、資産のプロダクティビティーショックを受けるという、そういう設定になっている。

ここで、このローカルプロジェクトは、ゼロ期に1単位のグッズを投資したら、翌期に R_i というアセットを生み出します。第2期にも R_i というアセットを生み出すんですが、銀行Aの RA と、銀行Bの RB は、同時分布に従いまして、片方が良ければ片方悪いと。その確率が2分の1という状況を考えます。一般性を失うことなく RL 足す RH は2、足したら2になる状況を考えます。

一方ジェネラルプロジェクトは、ゼロ期に1単位のグッズを投資すると、翌期に RG 、第2期にも同じ額の RG のアセットを生み出します。この RG というのは、確率 q で RH 、確率 $1-q$ で RL になります。ここで、この q というのが2分の1よりも小さい状況を考えて、先ほどのローカルプロジェクトよりは非効率な投資機会だということを考えます。

このジェネラルプロジェクトに投資をする量というのが、これが両方の銀行が投資できるんで、ここの g_i の割合というのがアセットコモナリティーを表すという、そういう設定になっています。

各期のトランザクションはこのようになりまして、1期にアセットを生み出すんですが、各銀行は預金者に1単位のお金を払わないといけないです。そのお金をどうやって調達するかという

と、銀行が資産を売ります。外側にいる投資家からお金を集めて、これを配分して、十分お金があれば自力で預金者にお金を払えるんですが、もしお金が足りなかったら、お金が足りているもう片方の銀行からお金を調達すると。

この1期でお金を借りたら、2期ではインターバンクを通じたりペイメントが行われるという状況になっています。そういう意味で、このモデルの中ではダイレクトコネクション、インダイレクトコネクション、両方とも存在している状況になっています。

予算制約は、制約としては資産と資源の制約、流動性制約。1期には預金者に1単位のグッズを払わないといけない。2期でもお金を払わないといけない。さらにはインターバンクでお金を借りるときは、ボロイングコンストレイントが掛かってくるという状況になります。

中村 難しい設定ですね。

豊福 このときに、この論文でのフリクションというのは、インコンプリート・ファイナンシャル・マーケットということで、各銀行が完全に資産を分散することはできない状況を考えています。A銀行がB銀行のローカルアセットに投資をすることはできないと、逆もまたしかりという状況です。投資家が相互に保険契約を結ぶことはできないという状況を考えます。

また、このアセットマーケットの供給者というのは、A銀行とB銀行の二つだけなので、その寡占的な状況を考えているということになります。そういう意味で、この二つの銀行が価格支配力を持っているので、お互いにそこでストラテジックに振る舞う、そういう状況が出てくることになります。

まず、ベンチマークとして、constrained optimal allocationというのを考えたんですが、それは流動性資産には1、効率的なローカルアセットに1、非効率なジェネラルアセットには投資をしないというのがオプティマル、コンストレイントオプティマルになるということになります。

次に、均衡を解いていくわけなんですが、この場合の均衡というのは、 q とRLという、資産の変動のRLというのを外性として、ここのかっこの

中にある変数を解いていきます。解く際には、預金者は1期と2期、両方の期ともに1単位を引き出すことができる。それに対して銀行は、自分の12の最後に、自分の手元にあるグッズの量が最大になるようなデシジョンをします。

アセットマーケットのプライスというのはこのように決まってくるということで考えて、それぞれのオプティマルビヘイビアを解いてやると、やった結果として出てくるのが、この『Optimal asset portfolio for banks』ということになるんですが、これが、この論文のメインのプロポジションになるんですが、このようになります。

横軸がRLというので、ジェネラルプロジェクトとローカルプロジェクトの資産の変動の幅を表しています。1に近いほど資産が変動しない。このときは効率的な資産配分になりまして、 L が1、ローカルプロジェクトが1になるということなんですが、そこからRLはちっちゃくなってきます。資産の変動が大きくなってくると、個々の銀行が資産を、リスクを分散するという、そういうインセンティブが出てくるので、ローカルプロジェクトだけじゃなくて、非効率だけどジェネラルプロジェクトにも投資をする、そういう状況が出てきます。

その結果、ジェネラルプロジェクトへの投資が増えていくんで、ここでアセットコモナリティーが増加するということになります。今、ここの領域になりますと、 $R2$ バーよりも下になりますと、インターバンクでお金を借りるときのボロイングコンストレイントがバインドしてくるので、お互いの銀行が事前にジェネラルプロジェクトに投資をしようという協調が生じるということになる。コーディネーションが生じるということになります。

実際に解いてみると、ジェネラルプロジェクトに投資をするというときに、ストラテジックコンプリメンタリティーがお互いの銀行に生じるということになります。このように、ジェネラルプロジェクトに投資をするというのが、一種、両銀行にとってはリスク共有手段として機能している状態を表しています。

それでも、さらに左に行って、資産の変動が大きくなると、それでもリスクに対応することはできなくなるので、そのときは流動性資産、この青

い線ですけど、青い線を持つようになるということになります。

以上、説明したのが、ここら辺の資料になっていきます。

実際に先ほどの図で、アセットコモナリティーがどのように変化するかというのを表したのが、このグラフになっています。このように銀行がジェネラルプロジェクトに保有することを通じて、結局は、銀行間の流動性のアロケーションをより均等配分するというようになって、その結果、預金者への引き出しに対応できるので、このアセットコモナリティーっていうのは、銀行にとってみると支配能力を維持するためには必要なことになるんですが、ですが、それによって銀行がよりジェネラルプロジェクトに投資をするということになると、経済全体で見ると、そのジェネラルプロジェクトへのリスクっていうのが、このアセットプライスに大きな影響を与えてくるということになります。

その結果、この図で表してますように、アセットプライスのボラティリティが、結局、アセットコモナリティーが進むことによって増加する。それによって、投資家が直面するリスクというのが大きくなっていくということになります。その結果、投資家のユーティリティというのがRL、この資産の変動が大きくなるほどに小さくなるということが表されています。

結局、ここで生じてることっていうのは、そのリスク、資産変動のリスクというのを投資家にシフトしてる、リスクシフトの問題が生じているということになります。結局、インターバンクが使われなくなって、ジェネラルプロジェクトに投資をするというのがリスク共有の手段として使われるということになるので、インターバンクでの取引が左に行くほど減少するというということになります。

こういった現状を改善するための政策として、中央銀行を出してきて、流動性を供給するんですけども、そのときの供給の仕方というのも、流動性保険の機能を持たせた流動性供給の在り方について言及をしています。

さらにポリシーインプリケーションとしては、先ほど言いました流動性保険の機能としての流動性供給ということで、それは近年、The committed liquidity provisionという形で行われているものに対しての理論的明答、バックグラウンド、説明するというのを言いました。

また、個々の銀行が最適な行動をしていても、最適な資産選択をしていても、トータルで経済全体で見ると非効率な状態になってしまうという、そういう合成の誤謬的な状態が、この論文の中でも生じているわけなんですけど、それを防ぐためにもマクロブルーデンシャルレギュレーションがいいというのを導き出しました。

さらには、この論文では、結局、資産が同質化する、それによって銀行が同質化することによるデメリットを表現しているので、銀行がより異質である、ヘテロジェネイティーであるところが重要になってくる。いろんな特徴を持った銀行が存在することが、結局、社会的にも望ましいということになりますんで、そういった観点から、銀行の異質性を高めるような政策の在り方について言及したというのが、この論文になります。

結局、アセットコモナリティーというのが、インベストメントリスクが高くなればなるほど増加していく。それによって経済の変動の幅も大きくなっていくということになります。それによって、投資家が直面するリスクが大きくなる、そういう問題が生じるというのを説明したのが、この研究になります。

Effects of asset commonality among banks on interbank liquidity allocation and economic fluctuations

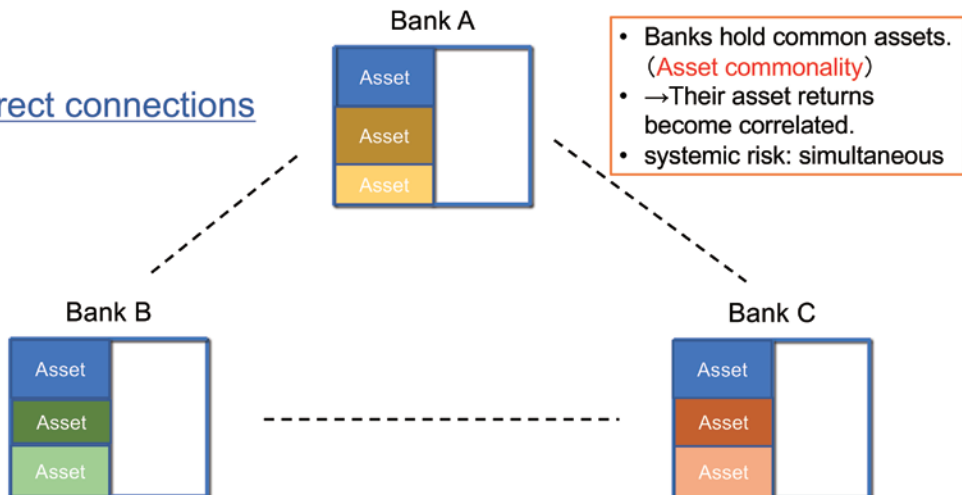
Kenta Toyofuku

College of Economics, Nihon University

Background

- Yellen(2013):
 - The global financial crisis of 2007-09 revealed that **interconnected banking systems** can create systemic risk by exposing banks to common sources of risk.
- Interconnected banking system:
 1. **Direct connections**: interbank loan
 2. **Indirect connections**: asset commonality among banks

Indirect connections



Stylized facts about the global financial crisis

• About bank interconnectedness:

- Direct connections ↓, indirect connections ↑
(e.g.) Billio et al. (2012), Brunetti et al. (2019)
- The asset commonality among banks raised the vulnerability of the financial system.
(e.g.) Cai et al. (2018), Barucca et al. (2021)

• About the role of interbank markets:

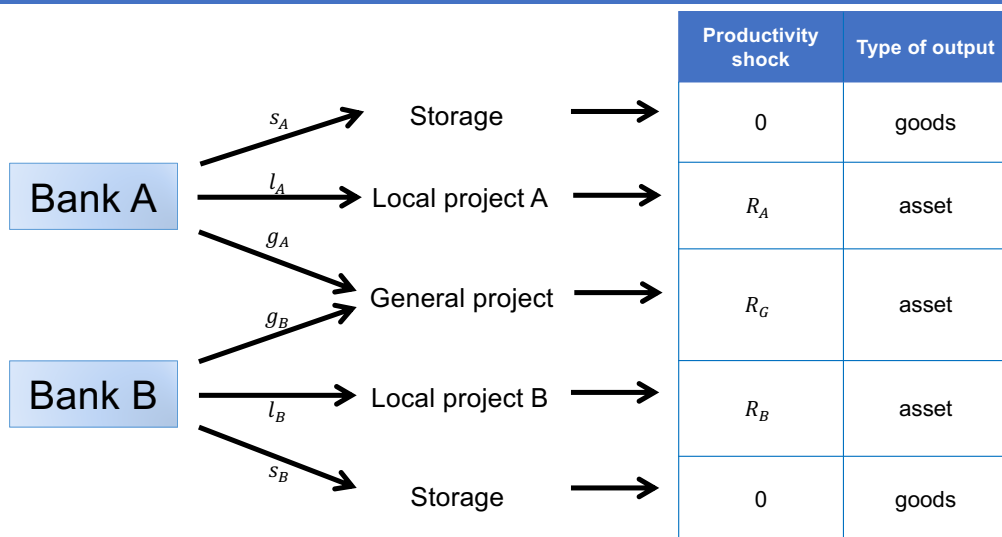
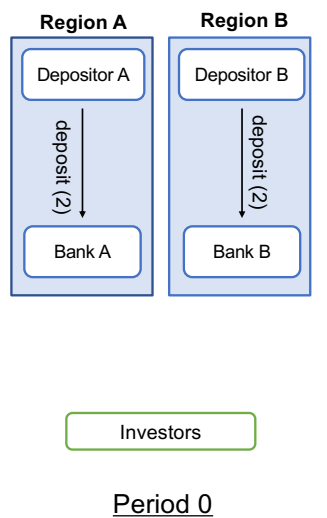
- Liquidity transfers among banks did not operate efficiently.
(e.g.,) Afonso et al. (2011), Angelini et al. (2011)
- The traditional central bank liquidity provision was ineffective.
(e.g.,) Brunetti et al. (2011)

Motivations

This paper investigates

1. why was asset commonality among banks pervasive before the global financial crisis ?
2. how asset commonality affects the liquidity allocation among banks ?
3. how asset commonality affects bank solvency and economic fluctuations ?
4. what should the policy makers do to enhance bank solvency and the efficiency of the economy?

The model



Local project : l^i

- period 0 period 1 period 2

$$1 \longrightarrow R_i \longrightarrow R_i$$

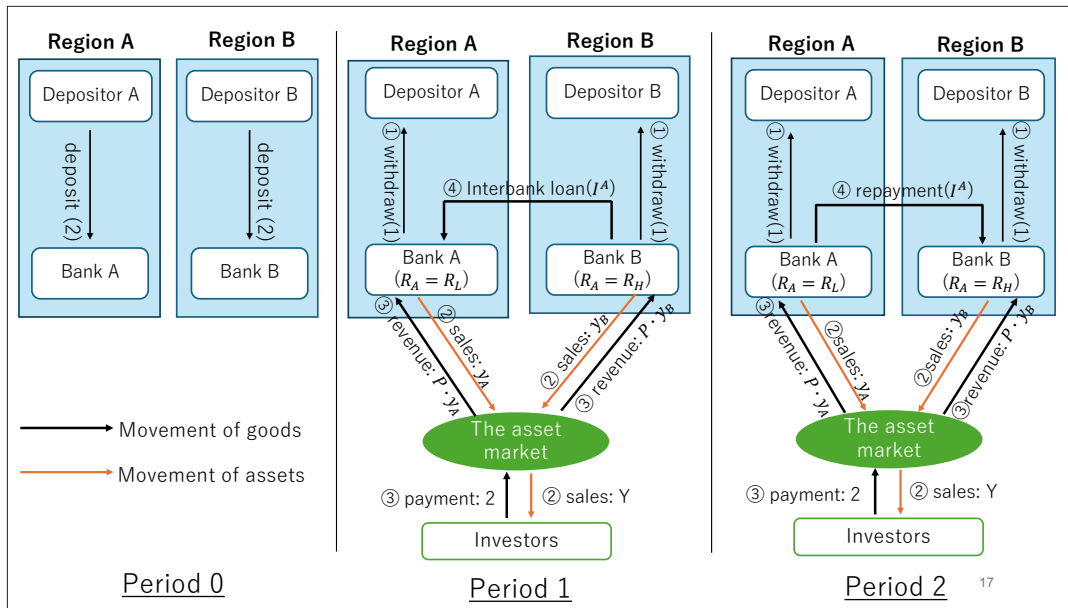
(goods) (assets) (assets)
- $(R_A, R_B) = \begin{cases} (R_H, R_L) & \text{w.p. } 1/2 \\ (R_L, R_H) & \text{w.p. } 1/2 \end{cases}$
- $0 < R_L < 1 < R_H$
- Without loss of generality, $R_L + R_H = 2$

General project: g^i

- period 0 period 1 period 2

$$1 \longrightarrow R_G \longrightarrow R_G$$

(goods) (assets) (assets)
- $R_G = \begin{cases} R_H & \text{w.p. } q \\ R_L & \text{w.p. } 1 - q \end{cases}$
- $0 < q < 1/2$
- $\frac{s^i + g^i}{2}$: the degree of asset commonality



Constraints and frictions

Constraints:

1. Resource constraint:

$$s^i + l^i + g^i = 2$$

2. liquidity constraint in period 1:

$$s^i \geq 1$$

3. liquidity constraint in period 2:

$$s^i - 1 + P_1 \cdot y^i(R_i, R_G) + I^i(R_i, R_G) \geq 1$$

4. borrowing constraint when a bank borrows liquidity from the other bank:

$$I^i(R_i, R_G) \leq P_2 \cdot y^i(R_i, R_G)$$

Frictions:

1. The incomplete financial market.

- Depositors can deposit their endowments to a bank in the same region.
- Local project i is invested only by bank i .
- Investors cannot arrange mutual insurance in period 0 against the productivity shock.

2. Asset market is duopoly.

- Only bank A and B can supply assets.

Equilibrium

Definition of the equilibrium

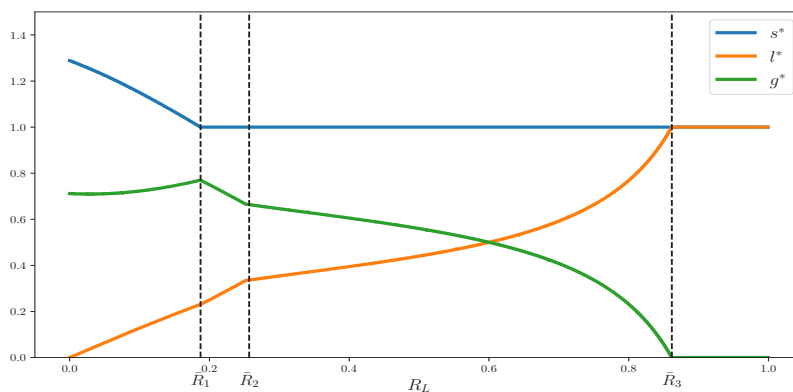
The equilibrium, given the set of parameters (q, R_L) , consists of a vector of parameters,

$(s^i, l^i, g^i, C_t^i(R_G), A(R_G), Y_t(R_G), P_t(R_G), I(R_i, R_G))$, such that

1. a depositor i and a representative investor solve their maximization problems given $P(R_G)$,
2. bank i solves its maximization problem given bank j 's investment decision,
3. the price of asset in period 1 and 2 is determined by $P(R_G) \sum_i y^i(R_i, R_G) = 2$,
4. all markets clear.

Optimal asset portfolio for banks (Proposition 2)

Equilibrium levels of s^*, l^*, g^* when $q = 0.3$



Asset commonality

Investment risk

low

high

Behaviors of banks

- An efficient investment
- Individual risk diversification
- Risk sharing among banks
- Liquidity hoarding + risk sharing among banks

The degree of asset commonality

low

high

Banks vs investors

As the investment risks increase,

- banks:
 - increase an investment to a common asset (i.e., a general project).
 - ex post liquidity will be more equally allocated.
- investors:
 - affected by the productivity shock of the common asset
 - asset price: volatility $\uparrow$, utility level: $\downarrow$

→ The asset commonality among banks may shift the investment risks from banks to investors and thus worsen the welfare of the economy (the risk-shifting problem).

Policy implications

1. The committed liquidity provision
 - the CB offers a liquidity insurance.
 - the committed liquidity facility
 - **Related literature**: Stein (2013), Bech and Keister (2013), Li and Ma (2022)
2. The macro-prudential regulation
 - individual optimal asset portfolio $\neq$ efficient allocation
 - **Related literature**: Acharya (2009), Acharya, et al (2017)
3. The regulation of bank heterogeneity
 - As banks become more heterogeneous, the more risks can be absorbed in the banking sector.
 - the ring-fencing policy
 - **Related literature**: Liu (2019), Capponi and Weber (2019), Goldstein, et al (2023)

1 「ネットワーク産業に関する統合的研究」最終報告会

中村靖彦
2024年12月23日

1.1 紀要に収められるメンバーの研究

- 豊福先生「Financial networks and systemic risk」：金融ネットワークとシステミック・リスクに関する文献をレビュー → 「金融ネットワーク」に関する論文.
- 林先生「Effective tools for analyzing the periodic motion of the generalized Liénard system」：古くは，競争均衡解の安定性に応用されたリエナール型の微分方程式系について，周期運動の一意的な存在または非存在の基準を確立するための新しい数学的ツールを提供した論文 → マクロ経済のネットワーク分析に応用可能!?

- 宮崎先生「Overview of Morrey spaces」：経済学への応用例も多いルベーク空間の一般化である「モーレイ空間 (Morrey space)」について、基本的な性質と種々の定理が論じられている論文 → (消費者間/財間の) ネットワーク効果を持つ一般均衡分析に応用!?
- 中村「Network externalities in a quantity-setting vertically differentiated luxury goods market」：寡占的数量競争下で垂直的製品差別化を行う高級品市場において、ネットワーク外部性の強さと製品品質の格差が均衡市場の結果にどのような影響を与えるかを考察した論文 → 寡占市場の消費に伴うネットワーク効果を分析した論文.

- 研究プロジェクトを閉じるにあたって：
 - － 良かった点：数学を専門とする研究者と経済学を専門にする研究者が「ネットワーク」をキーワードに合同で議論できて、各人の興味関心から論文が出そろったこと.
 - － 反省点：お二人の数学者の数学的な定理をネットワーク経済の分析に応用するには、時間的猶予がなかったこと (これは未来への私たちの課題 (最後にも簡単に触れる))

2 ここ最近の関心事

- 「拘束的合意」の前提（← 有名な協力ゲームの前提）なしで人間の協力行動を説明できないか？
 - － 利他 $\neq$ 協力
 - * 「利他」：直接的に他者を助けたいという欲求に動機づけられる → 「利他主義」を前提にすれば「協力」行動が導出されるのは、ある意味明らか。
 - * 「協力」：あくまで自分自身の効用を高めるために人々と協同すること。
 - 自身の効用の最適化を目指す、独立した主体を前提とした下で、「協力的行為」を導くことはできないのか？

- John Roemerによる提案：協力的行動を導く非古典的アプローチ – **Kantian approach**（カント的方法論/最適化）
- ナッシュ的方法論/最適化（標準的経済学的前提） vs. カント的方法論/最適化 → この区別については後述
- 差し当たって、Rormer (2021, IER)の説明に依拠する形で、ナッシュ的方法論とカント的方法論の差異を競争均衡（一般均衡解）を題材に見ていく。

2.1 資本家経済 (Capitalist economy, Arrow – Debreu))

- 標準的な経済学における一般均衡：
- L ：労働量， K ：資本量.
- $G : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ – 生産関数.

仮定 1 – G の仮定：

- * 増加関数.
 - * 微分可能な凹関数.
- n ：個人の数.
 - (x, L) ： x – 消費財の需要量， L – 労働供給量.

- $u^i(\cdot, \cdot)$ ：個人 i の選好（効用関数）.

仮定 2 – u_i の仮定：

- * 準凹関数.
 - * (x, L) 上で微分可能.
- $\bar{K}^i$ ：個人 i の資本の初期保有量.
 - $\bar{L}^i$ ：個人 i の労働の初期保有量.
 - θ^i ：個人 i の企業のシェア（＝株式保有比率）.
 - p ：消費財の価格.
 - w ：労働の価格（賃金）.
 - r ：資本の価格（資本のレンタル価格（コスト））.

定義 1 競争均衡 – $\{G, \{u^i, \bar{K}^i, \bar{L}^i, \theta^i\}, i = 1, 2, \dots, n\}$:
 価格ベクトル (p, w, r) , 企業による資本と労働の需要量
 (K^*, L^*) , 企業の財の供給量 y^* , n 人の個人の財の需要量
 $(x^1, \dots, x^n)$, 労働供給量 $(L^1, \dots, L^n)$, および資本供給量
 $(K^1, \dots, K^n)$ が以下の条件を満たす :

- $(y^*, K^*, L^*) = \arg \max \underbrace{py - rK - wL}_{\text{利潤}} \text{ subject to}$
 $y = G(K, L).$
 - 企業の均衡利潤 : $\Pi^* = py^* - rK^* - wL^*.$
- $(x, L^i, K^i) = \arg \max u^i(x, L^i) \text{ subject to}$
 $px = wL + rK + \theta^i \Pi^*, \quad L^i \leq \bar{L}^i, \quad K^i \leq \bar{K}^i.$
- 市場清算 (Market clear) : $y^* = \sum x, \quad L = \sum L^i,$
 $K^* = \sum K^i.$

- 企業の利潤最大化の1階の条件 : $G_K(K, L) = r/p$ and $G_L(K, L) = w/p$ ($G_i : i$ による G の偏微分) .
- $(w/p)L^i$: 労働者 i (= 個人 i) の生産への貢献.
- $(r/p)K^i$: 投資家 i (= 個人 i) の生産への貢献.
- $G_K(K^*, L^*)K^* + G_L(K^*, L^*)L^* \leq G(K, L)$ (G の凹性より (厳密な不等号は G が厳密な凹関数ならば成立する)) .
- 企業の平均生産 (生産要素1単位当たりの生産量) :

$$\frac{G(K^*, L^*)}{G_K(K^*, L^*)K^* + G_L(K^*, L^*)L^*} \geq 1$$
 (厳密な不等号は G が厳密な凹関数ならば成立する) $\rightarrow$ 資本家経済における生産は生産要素の貢献の合計以上の価値を生む.

- 資本家経済（Arrow-Debreu 経済）の競争均衡の性質：
 1. パレート効率的（＝ 厚生経済学の第一基本定理）.
 2. 価格システムが競争均衡の配分（についての情報）を分権化（decentralize）する：
 - (a) 企業は価格と生産関数 G のみを知っているが，消費者の選好は知らない.
 - (b) 消費者は価格と選好を知っているが，利潤に関わる情報は知らない.
 - (c) i. 労働者と投資者は自身の生産への貢献分を正確に受け取る.
 - ii. 企業の所有者はシェアに従って，余剰金（＝ プラスの利潤）の全額を受け取る.

→ ただし結果としての配分が“公平”とは限らない.

- （話は変わって）社会が Arrow-Debreu 均衡からの収入の再分配をする状況を考える.
- 線形所得税を課し，その収益をすべての国民に平等に分配する：
- 労働者と投資家の予算制約：

$$px^i = \underbrace{(1-t)\{wL^i + rK^i + \theta^i[p(K^*L^*) - wL^* - rK^*]\}}_{\text{所得税後の残った個人 } i \text{ の所得}} + \underbrace{\frac{t}{n}pG(K^*, L^*)}_{\text{＝所得の再分配}} \quad (\text{所得税率：} t).$$

- 個人 i の 1 階の条件： $(1-t)\frac{w}{p} = -\frac{u_{L^i}^i(x^i, L^i)}{u_{x^i}^i(x^i, L^i)}$ and $K^i = \bar{K}^i$.

- $(1 - t)G_L(K^*, L^*) = -\frac{u_{L^i}^i}{u_{x^i}^i} \left(\because \text{利潤最大化条件} : \frac{w}{p} = G_L(K^*, L^*) \right) \rightarrow t > 0 \text{ ならば, パレート効率性の条件 (限界代替率 = 限界変形率) が violate する (正の死荷重を生む).}$
- Roemerの主張：Arrow-Debreu 経済において，線形課税による再分配が正の死荷重を生む理由 – 各エージェント（個人および企業）のナッシュ的行動.

2.2 ナッシュ的最適化 (Nashian) vs カント的最適化 (Kantian)

- 具体的な議論に入る前に大きな2つの疑問を掲げておく：
 - 資本家（Arrow-Debreu）経済の資源配分メカニズムによって得られる性質は，この経済特有の（“unique” な）性質といえるか？
 - （1. の疑問とも関連するが）パレート効率性と資源配分に関する分権化（Decentralization）は限界生産に従って報酬が決定されるメカニズムや企業の私的所有権制度に依存しているのか？

- $\mathbf{V} = (V^1, \dots, V^n) : n$ 人のプレイヤーの標準形ゲーム (あくまで Roemer による定義の仕方).
 - $V^i : I^n \rightarrow \mathbb{R}$ – 利得関数 ($I : \mathbb{R}_+$ の区間).
 - 個人 i の戦略 : $E^i \in I$ – 貢献 (“contributions”) / 努力 (“efforts”).
 - ゲームが厳密に単調増加 (減少) $\iff$ 利得関数 V^i が他の個人 $j (\neq i)$ の貢献 E^j に対して, 厳密な増加 (減少) 関数.

定義 2 ● 3 種類の「カント的均衡 (Kantian equilibrium)」の定義 :

- 戦略プロファイル $(E, E, \dots, E)$ が単純カント的均衡 (simple Kantian equilibrium) : $\forall i$,
 $E = \arg \max_{x \in I} V^i(x, x, \dots, x)$.
- 戦略プロファイル $(E^1, E^2, \dots, E^n)$ が加法的カント的均衡 (additive Kantian equilibrium) : $\forall i$,
 $0 = \arg \max_{\{\rho | E^i + \rho \in I\}} V^i(E^1 + \rho, E^2 + \rho, \dots, E^n + \rho)$.
- 戦略プロファイル $(E^1, E^2, \dots, E^n)$ が乗法的カント的均衡 (multiplicative Kantian equilibrium) : $\forall i$,
 $1 = \arg \max_{\{\rho | \rho E^i \in I\}} V^i(\rho E^1, \rho E^2, \dots, \rho E^n)$.

- “カント的 (Kantian)” の由来：イマニュエル・カントによる定言命法「あなたの意志の格律がいつでも同時に普遍的立法の原理として妥当するように行為せよ」－自分と同様の逸脱行動が得になる場合にのみ、現状からの逸脱を認める → この原理によって逸脱しない状況では、「自分の行為が他者によっても同様に採用されるという意味での道徳的普遍性を獲得できている」
- 注意：定義から明らかなように、単純カント的均衡は加法的カント的均衡と乗法的カント的均衡に含まれる。

命題 1 [Roemer (2021, Prop 1.)]

- 任意の厳密に単調なゲームにおいて、単純および加法的カント的均衡はパレート効率的である。
- 任意の厳密に単調増加なゲームにおいて、任意の厳密に正の（＝正の外部性がある（例：“貢献”が公共財を生成するような状況））乗法的カント的均衡はパレート効率的である。
- 証明は省略する。
- 「パレート最適性はナッシュ的行動のみによって、正当化されるものではない」

2.3 社会主義1

- 経済環境： $\{G, \{u^i, K^i, L^i, \theta^i | i = 1, \dots, n\}\}$.
- 労働者のゲーム：
 - W^i ：労働者の利得関数 – $W^i(L^1, L^2, \dots, L^n) =$

$$u^i \left(\frac{(1-t)(wL^i + rK^i + \theta^i \Pi(K^*, L^*))}{p} + \frac{t}{n} \frac{wL^S + rK^S + \Pi(K^*, L^*)}{p}, L^i \right).$$
 - * $L^S = \sum L^i$.
 - * $K^S = \sum K^i$.
 - * $\Pi(K^*, L^*) = pG(K^*, L^*) - wL^* - rK^*$ (= 均衡利潤).

- 投資家のゲーム：
 - 資本を保有していることから効用は生まれない →
 $r > 0$ である限り, $K^i = \bar{K}^i$ (→ 初期資本保有量がそのまま各個人 i の資本供給量になる).

定義 3 ● 社会民主的均衡 (Social democratic (Socialist 1) equilibrium) $\{G, \{u^i, K^i, L^i, \theta^i | i = 1, \dots, n\}\}$:

- $(K^*, L^*) = \arg \max p y - r K - w L$ subject to
 $y = G(K, L) \rightarrow \Pi^* = p G(K^*, L^*) - r K^* - w L^*.$
- $\forall i, K^i = \bar{K}^i.$
- $(L^1, \dots, L^n)$: 労働者のゲームの加法的カント的均衡 - $\mathbf{W} = \{W^i\}$ (所与 : $\{K^i, p, w, r, \Pi^*\}$)
- $\forall i, x_i = \frac{(1-t)[w L^i + r K^i + \theta^i \Pi(K^*, L^*)]}{p} + \frac{t}{n} G(K^S, L^S).$
- 市場清算 (Market clear) : $x^S = y^*$ (財の均衡),
 $L^S = L^*$ (労働量の均衡), $K^S = K^*$ (資本量の均衡).

命題 2 $(K^*, L^*, y^*, \{K^i, L^i, x^i\})$ が任意の税率 $t \in [0, 1]$ に対して, 社会民主的均衡 (Social democratic (Socialist 1) equilibrium) であるとき, パレート効率的である.

● 命題2の証明 :

1. 利潤最大化条件 : $p G_K(K^*, L^*) = r,$
 $p G_L(K^*, L^*) = w.$
2. $(L^1, \dots, L^n)$: 労働者ゲーム $\mathbf{W}$ の加法的カント的均衡

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\rho} u^i \left(\frac{(1-t)(w(\underline{L^i + \rho}) + r K^i + \theta^i \Pi(K^*, L^*))}{p} \right. \\ & \left. + \frac{t}{n} \frac{w(\underline{L^S + n\rho}) + r K^S + \Pi(K^*, L^*)}{p}, \underline{L^i + \rho} \right) \Big|_{\rho=0} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall i, \quad u_{x^i}^i \cdot \underbrace{\left((1-t) \frac{w}{p} + \frac{t}{n} \frac{wn}{p} \right)}_{=\frac{w}{p}} + u_{L^i}^i = 0,$$

$$\therefore \forall i, \quad \frac{w}{p} = -\frac{u_{L^i}^i}{u_{x^i}^i}.$$

$$3. \quad K^i = \bar{K}^i.$$

4. 1. から3. より, $\forall i, \quad G_L(K^*, L^*) = -\frac{u_{L^i}^i}{u_{x^i}^i} \rightarrow$ 生産関数の G の凹性から, 加法的カント的均衡配分パレート効率的である (「限界代替率 = 限界変形率」):
社会民主主義経済における厚生経済学の第一基本定理 (← 線形所得税による再分配が導入されていることがポイント).

- Arrow-Debreu 経済と社会民主主義経済（社会主義 1）における線形所得税の効果の違い：
 1. 主体のナッシュ的最適化を前提にした場合には、行為を変更するのが自分だけであるため、 $(1 - t)$ という項の存在によって、資源配分の歪みにつながる。一方で、カント的最適化の場合は労働供給ベクトル全体の変化を考慮するために、資源配分の歪みの原因にならない。
 2. 社会民主主義経済（社会主義 1）では、Arrow-Debreu 経済とは異なり、課税による所得の減少が、再分配により、完全に補償される（→ パレート効率性の成立）。

命題 3 [Roemer (2021), Prop. 3 (均衡の存在)]
 生産関数 G が厳密に凹かつ稲田条件 (the Inada condition ($\lim_{i \rightarrow 0} G_i(K, L) = +\infty$ かつ $\lim_{i \rightarrow +\infty} G_i(K, L) = 0$, ($i = K, L$)) を満たすとする。選好が凸であるとする。このとき、社会民主主義均衡 (Social-democratic equilibrium) が必ず存在する。

- 証明は省略する。
- 証明方針は基本的には資本家経済 (Arrow-Debreu 経済) の均衡の存在証明のアナロジー。

● 注意点：

1. カント的最適化を実行するために必要な情報量は、ナッシュ的最適化を実行するために必要な情報量と同じ（選好，価格（税率を含む），および利潤の取り分）。
2. 価格錯覚（Price illusion）：カント的最適化においては，プレイヤー全体の戦略の変化が伴うため，いわばマクロ全体の変化が伴う → マクロ的变化が伴うならば，価格（ベクトル）の変化も無視できないだろう → しかし，命題2（パレート効率性）においては価格が固定されたもとで証明されている（これが社会民主主義経済（社会主義 1）モデルの欠点）。
3. 社会民主主義的な見方を強めるならば， $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ を政府（＝ 公的セクター）にのつての政策変数とみなせる。

4. カント的均衡配分では，一般に，労働者の税引き後の賃金は労働の限界生産物と等しくない（この部分は資本家経済（Arrow-Debreu 経済）とは対照的）が，配分はパレート効率的である。

- 上記2. の「価格錯覚」に伴う社会民主主義経済（社会主義 1）モデルに決定についてもう少し議論をする → パレート効率性の成立に，いわゆる「Price-taker（価格受容者）の仮定」が果たす役割について考える。
- ある例を用いた死荷重（パレート効率性）についての議論：
 - － 選好： $u(x, L) = x + \log(\lambda - L)$.
 - * x ：単一の消費財の需要量.
 - * L ：労働供給量.
 - * λ ：（全員共通の）初期労働保有量.

- つづき :

- 生産関数 : $G(\bar{L}) = \frac{\bar{L}^\alpha}{\alpha}$.

- * $\alpha \in (0, 1]$.

- * $\bar{L}$: 平均労働供給量 (労働者は同質なのだから実質的に, $\bar{L} = L$ と考えてよい).

- 利潤は労働者に平等に分配される.

- 一意な (パレート) 効率的労働供給量 (u の準凹性より) は, 以下の条件で与えられる :

$$\max_L G(L) + \log(\lambda - L) \rightarrow \underline{\underline{G^{L^{\text{eff}}} = (L^{\text{eff}})^{\alpha-1} = \frac{1}{\lambda - L^{\text{eff}}}}}$$

- 競争均衡における税率 t :

- 労働需要量 (L^D) : $L^D = \arg \max_L [G(L) - wL]$ ($\rightarrow$ 利潤最大化, w : 実質賃金)

- 労働供給量 (L) :

- * 労働者によるナッシュ的最適化による労働供給量 (L^N) の決定 :

$$L^N = \arg \max_L \underbrace{(1-t)wL + tw\bar{L} + \Pi}_{= \text{貨幣所得に基づく効用}} + \log(\lambda -$$

$$L) \rightarrow \underline{\underline{(1-t)(L^N)^{\alpha-1} = \frac{1}{\lambda - L^N}}}$$

$$(\because w = G'(L^N) = (L^N)^{\alpha-1}).$$

* 労働者による単純カント的最適化による労働供給量 (L^K) の決定 (労働者は同質であると仮定しているので, 加法的カント的均衡は単純カント的均衡と同値):

$$L^K = \arg \max_L \underbrace{(1-t)w(L)L + tw(L)L + \Pi}_{=\text{貨幣所得に基づく効用}} + \log(\lambda -$$

$$L) \rightarrow w'(L^K)L^K + w(L^K) = \frac{1}{\lambda - L^K}.$$

* カント的最適における仮定: カント的最適化をする労働者は, 労働供給量 (L) の実質賃金 (w) への効果を勘案して, L の水準を決定する (実質賃金 = 労働の限界生産物 $\neq$ 「Price-takerではない」): $w(L^K) = G'(L^K) = (L^K)^{\alpha-1}$.

$$* (\alpha - 1)(L^K)^{\alpha-1}L^K + (L^K)^{\alpha-1} = \frac{1}{\lambda - L^K}$$

$$\therefore \underline{\underline{\alpha(L^K)^{\alpha-1} = \frac{1}{\lambda - L^K}}}.$$

– 労働市場の清算 (Labor market clear): $L = \bar{L} = L^D$.

• L^{eff} と L^N の比較: $(L^{\text{eff}})^{\alpha-1} = \frac{1}{\lambda - L^{\text{eff}}}$ vs.

$(1-t)(L^N)^{\alpha-1} = \frac{1}{\lambda - L^N} \Rightarrow$ 任意の $t > 0$ に対して,
 $L^{\text{eff}} > L^N$ (ナッシュ的配分の過少供給).

1. $(L^{\text{eff}})^{\alpha-1} = \frac{1}{\lambda - L^{\text{eff}}}$ (パレート効率的な量の決定式).

2. $(1-t)(L^N)^{\alpha-1} = \frac{1}{\lambda - L^N}$ (ナッシュ的均衡量の決定式).

3. $\alpha(L^K)^{\alpha-1} = \frac{1}{\lambda - L^K}$ (カント的均衡量の決定式).

- 1, 2, かつ 3 → 「 $\alpha > 1 - t$ 」が成立していれば、ナッシュ的均衡配分（ $= L^N$ ）よりも、単純カント的均衡（ $= L^K$ ）がパレート効率的配分（ $= L^{\text{eff}}$ ）に近くなる。
- 特に...,
 - t がゼロに近いとき, $L^{\text{eff}} \simeq L^N$.
 - t が1に近いとき（特に α が十分に1に近いとき）,
 $L^{\text{eff}} \simeq L^K$.
- 上記の例からわかること：
 - 一般に社会民主主義（＝社会主義 1）均衡でも、Price-taker（価格受容者）の仮定を外せば、配分のパレート効率性は一般的に成立しない。
 - ナッシュ的配分の歪みが課税に起因するのに対して、カント的配分のゆがみは経済環境（この例では、生産関数の曲がり方（ $= \alpha$ の大きさ））に起因する。

2.4 社会主義 2

- 社会民主主義に関する第2モデル（社会主義2）：企業の全生産物が労働者と投資家に分配される。
- 単一企業モデル：
 - $\lambda \in [0, 1]$ ：パラメータ。
 - 労働者のゲーム $\mathbf{R}$ ：
 - * 戦略：労働供給量（ L ）。
 - * 利得関数： $\forall i = 1, \dots, n : R^i(L^1, \dots, L^n) =$

$$u^i \left(\frac{wL^i + rK^i}{p} + \left[\lambda \frac{L^i}{L^S} + (1 - \lambda) \frac{K^i}{K^S} \right] \cdot \left[\frac{pG(K^*, L^*) - wL^* - rK^*}{p} \right], L^i \right)$$
 ただし、
 $L^S = \sum_{i=1}^n L^i, K^S = \sum_{i=1}^n K^i$.

定義 4 • λ - sharing equilibrium for the economic environment $\{G, \{\bar{K}^i, \bar{L}^i, u^i | i = 1, 2, \dots, n\}\}$: 以下の条件を満たす, 価格ベクトル (p, w, r) , 財の供給量 y^* , 企業の生産要素需要ベクトル (K^*, L^*) が以下の条件を満たす :

1. $(y^*, K^*, L^*) = \arg \max py - rK - wL$ subject to $y = G(K, L)$ (G : 生産関数, いわゆる利潤最大化).
2. $\forall i, K^i = \bar{K}^i$.
3. $(L^1, \dots, L^n)$: 所与の $(K^1, \dots, K^n)$ に対して, ゲーム $\mathbf{R}$ の乗法的カント的均衡.
4. $\forall i,$

$$x_i = \frac{wL^i + rK^i}{p} + \left[\lambda \frac{L^i}{L^S} + (1 - \lambda) \frac{K^i}{K^S} \right] \frac{\Pi(K^*, L^*)}{p}.$$

• 定義4の続き :

5. すべての市場の清算 (All markets clear) : $y^* = x^S$ (財の均衡), $L^* = L^S$ (労働量の均衡), $K^* = \bar{K}^S$ (資本量の均衡).

• 定義4の特徴 :

- 個人 i の各生産要素 (L または K) の貢献の度合い ($= L^i/L^S$ および K^i/K^S) の凸結合 (ウェイト : λ) の基づいて, 個人 i に対して利潤が再分配されている.

命題 4 任意の厳密に正の λ - sharing equilibrium はパレート効率的である。

● 命題 4 の証明：

1. 利潤最大化条件： $\frac{w}{p} = G_L(K^*, L^*)$ and

$$\frac{r}{p} = G_K(K^*, L^*).$$

2. - 初期労働保有量がゼロ ($\bar{L}^i = 0$) のプレイヤー：
 $L^i = 0$ (このようなプレイヤーを「passive」と称する)。

2. の続き：

- 初期労働保有量がプラス ($\bar{L}^i > 0$) のプレイヤー：

$$\left. \frac{d}{d\rho} u^i \left(\frac{w}{p} \rho L^i + \frac{r}{p} \bar{K}^i + \left[\lambda \frac{\rho L^i}{\rho L^S} + (1 - \lambda) \frac{\bar{K}^i}{\bar{K}^S} \right] \frac{\Pi(K^*, L^*)}{p} \right) \right|_{\rho=1} = 0 \Rightarrow u_{x^i}^i \cdot \left(\frac{w}{p} L^i \right) + u_{L^i}^i L^i = 0.$$

3. 1. と 2. から, $G_L(K^*, L^*) = -\frac{u_{L^i}^i}{u_{x^i}^i}$ ($\rightarrow$ 限界変形率 = 限界代替率). よって乗法的カント的均衡配分は パレート効率的.

命題 5 [Roemer (2021), Prop. 5 (λ -sharing equilibrium の存在)]

生産関数 G を厳密な凹関数かつ稻田条件を満たすものとし、選好は凸とし、かつ消費財と余暇 (leisure) は正常財であるとする。このとき、任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対して、パレート効率的な λ -sharing equilibrium が存在する。

- カント的最適化を行う主体を前提とし、税制度などを利用した再分配を考慮した社会民主主義的経済で、一般均衡解がパレート効率的な配分を実現する経済体制のバリエーションは複数ある（上で見ただけでも2つ）。
- Roemer (2021) は Public goods (= 公共財) や public bads (例：環境汚染) などの要素を組み入れた社会民主的一般均衡理論も提示している。

2.5 カント的最適化の応用：動学的寡占市場

- 次の話題：
 - カント的最適化の配分の分析には、「Price-taker（価格受容者）の仮定」が重要。
 - もう少し、「Price-taker（価格受容者の仮定）」を外した場合の配分の分析に関心がある。
 - そこで動学的数量的寡占市場に関して、ナッシュ的均衡とカント的均衡の比較を試みる（ただし部分均衡だが...）。
 - ベースとなる論文は Zhao and Li (2021, OR Lett)：環境汚染と財間のネットワーク効果が同時に考慮されている
 - 以下、Zhao and Li (2021) のモデルを説明する。

- Zhao and Li (2021) モデル： n 企業からなる差別財市場。
 - 時点： $t \in [0, +\infty)$.
 - $I_i(t)$ ： 時点 t における企業 i の（財の品質を改善するための）イノベーション投資量。
 - $X_i(t)$ ： 時点 t における企業 i の財の品質。
 - $Q_i(t)$ ： 時点 t における企業 i の生産する財のネットワークサイズ（財の需要量に関する増加関数で大きいほど高い効用をもたらす）。
 - $q_i(t)$ ： 時点 t における財の生産量。
 - δ ： 各企業の財の品質が低下する比率（depression rate, 時間を通じて一定）
 - α ： 財の購入をやめる（＝退出する）消費者の比率（exit rate of consumers, 時間を通じて一定）

- 設定の続き (1)：
 - A ： 留保価格（＝消費者が財に出してもよい最大の価格水準, 時間を通じて一定）
 - $c(\in (0, A))$ ： 費用関数の一次の項のパラメーター（時間を通じて一定）
 - $L(> 0)$ ： 環境汚染に伴う費用係数（cost coefficient associated with environmental damage（時間を通じて一定）
 - $b(\geq 0)$ ： 生産イノベーションによって改善された財の品質は価格に与える効果の強さ（sensitivity of the price to the improved quality due to product innovation（時間を通じて一定）

- 設定の続き (2) :
 - $\mu > 0$: ネットワーク外部性の強さ (時間を通じて一定)
 - $B(\geq D)$: 各企業の財の価格反応性 (時間を通じて一定)
 - $D(\geq 0)$: 財間の代替性の程度 (時間を通じて一定)
 - * D の上昇 $\rightarrow$ 各企業の生産する財が同質に近くなる.
 - $\theta(> 0)$: 各企業のグリーン R&D 投資量の効率性 (effectiveness of green R&D, 時間を通じて一定)
 - $\eta(> 0)$: 汚染の自然腐敗率 (natural decay rate of pollution, 時間を通じて一定)

- 設定の続き (3) :
 - $\tau(> 0)$: 税率 (rate of emission tax).
 - $u_i(t)$ 環境汚染を減らすためのグリーン R&D 投資の水準 (green R&D investment) $\rightarrow$ 時点 t の企業 i の生産に伴う汚染量 $= q_i(t) - \theta u_i(t)$.
- 代表的消費者の効用関数 :

$$U(t) = \sum_{i=1}^n [A + bX_i(t) + \mu Q_i(t)] q_i(t) - \frac{1}{2} B \sum_{i=1}^n [q_i(t)]^2 - D \sum_{i \neq j} q_i(t) q_j(t) + k(t) \quad (k(t) : \text{時点 } t \text{ におけるニューメール財の量}) \rightarrow \text{逆需要関数 :}$$

$$p_i(t) = [A + bX_i(t) + \mu Q_i(t)] - Bq_i(t) - D \sum_{j \neq i} q_j.$$
- 企業 i の生産に伴う費用関数 : $C_i(t) = cq_i(t) + \frac{1}{2}[q_i(t)]^2.$

- 動学的過程：

- 各財のネットワークサイズ： $\frac{dQ_i(t)}{dt} = q_i - \alpha Q_i(t)$ ($\leftarrow q_i(t) \uparrow \rightarrow Q_i(t) \uparrow$ ：財の取引量の増大が個人の効用を増大する（例：オンラインゲームなど））。

- 環境汚染の排出量：

$$\frac{dP(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n [q_i(t) - \theta u_i(t)] - \eta P(t).$$

- 各財の品質： $\frac{dX_i(t)}{dt} = I_i(t) - \delta X_i(t)$ 。

- $ED(t) = \frac{1}{2}L[P(t)]^2$ ：時点 t における環境汚染の社会的コスト（social cost of pollution）

- $\tau[q_i(t) - \theta u_i(t)]$ ：時点 t における企業 i の emission tax の金額。

- $PT(t) = \sum_{i=1}^n \tau[q_i(t) - \theta u_i(t)]$ ：時点 t の税の総額。

- $\pi_i(t) = q_i(t) \left[p_i(t) - c - \frac{1}{2}q_i(t) \right] - \tau[q_i(t) - \theta u_i(t)] - \frac{1}{2}u_i^2(t) - \frac{1}{2}I_i^2(t)$ ：時点 t における企業 i の利潤

- 企業 i の目的： $\max_{q_i(t), u_i(t), I_i(t)} \int_0^\infty e^{-\rho t} \pi_i(t) dt$ （通時的利潤の最大化）。

- $\frac{1}{2}u_i^2(t)$ ：時点 t における企業 i の green R&D 投資に伴う費用。

- $\frac{1}{2}I_i^2(t)$ ：時点 t における企業 i の財の品質向上に対する R&D 投資に伴う費用。

- $\rho(> 0)$ ：利子率（interest rate）。

- 時点 t の社会厚生（総余剰）：

$$SW(t) = \sum_{i=1}^n [A + bX_i(t) + \mu Q_i(t)] q_i(t) - \frac{1}{2} B \sum_{i=1}^n [q_i(t)]^2 - D \sum_{i \neq j} q_i(t) q_j(t) - \sum_{i=1}^n p_i(t) q_i(t) + \sum_{i=1}^n \pi_i(t) - ED(t) + PT(t).$$

- 時点 t の消費者余剰：

$$CS(t) = \sum_{i=1}^n [A + bX_i(t) + \mu Q_i(t)] q_i(t) - \frac{1}{2} B \sum_{i=1}^n [q_i(t)]^2 - D \sum_{i \neq j} q_i(t) q_j(t) - \sum_{i=1}^n p_i(t) q_i(t).$$

- 時点 t の生産者余剰（＝総余剰）： $PS(t) = \sum_{i=1}^n \pi_i(t)$.

- 分析の方法：

- まず，開ループ解として， $(q_i(t), u_i(t), I_i(t))$ を求めて，後方帰納的に，時点 t の（瞬間的な）社会厚生最大化の観点から，税率 τ を求める（部分ゲーム完全解を求めるルーティン）。
- ナッシュ的方法： $(q_i(t), u_i(t), I_i(t))$ のすべてをナッシュ的最適化によって決定する（上添え字 “ N ”）
- カント的方法： $q_i(t)$ についてのみ乗法的カント的最適化によって決定し， $(u_i(t), I_i(t))$ はナッシュ的最適化によって決定する（上添え字 “ K ”）。
- ただし，均衡を解析的に導出することはこのモデルでは困難であるので，Zhao and Li (2021) の（後述の Case 1 と Case 2），

● シミュレーションの方法：

- Case 1 : $b = 0.05$, $\mu = 0.1$, $B = 1$, $D = 0.8$, $n = 50$,
 $\delta = 0.1$, $\alpha = 0.1$, $\theta = 2.5$, $\rho = 0.06$, $\eta = 0.01$, $L = 1$
 (← 均衡は，参入企業数 n に依存するするように想定している)。
- Case 2 : $b = 0.05$, $\mu = 0.1$, $B = 1$, $D = 0.8$, $n = 50$,
 $\delta = 0.1$, $\alpha = 0.1$, $\underline{n = 50}$, $\rho = 0.06$, $\eta = 0.01$, $L = 1$
 (← 均衡は，green R&D投資量の効率性を表すパラメーターである θ に依存するするように想定している)。
- Case 1 と 2 で共通して， $A - c = 1$ とする。

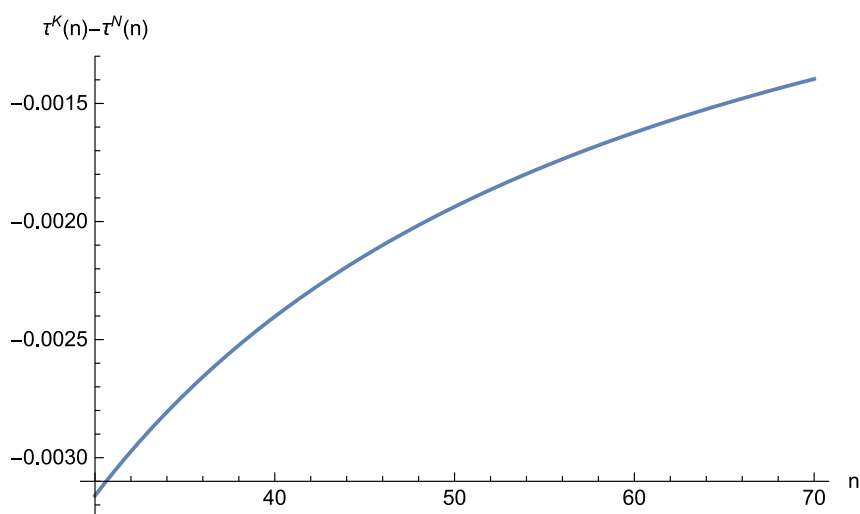


図1 Case 1 : $\tau^K(n)$ の $\tau^N(n)$ の比較 $\rightarrow \tau^N(n) > \tau^K(n)$

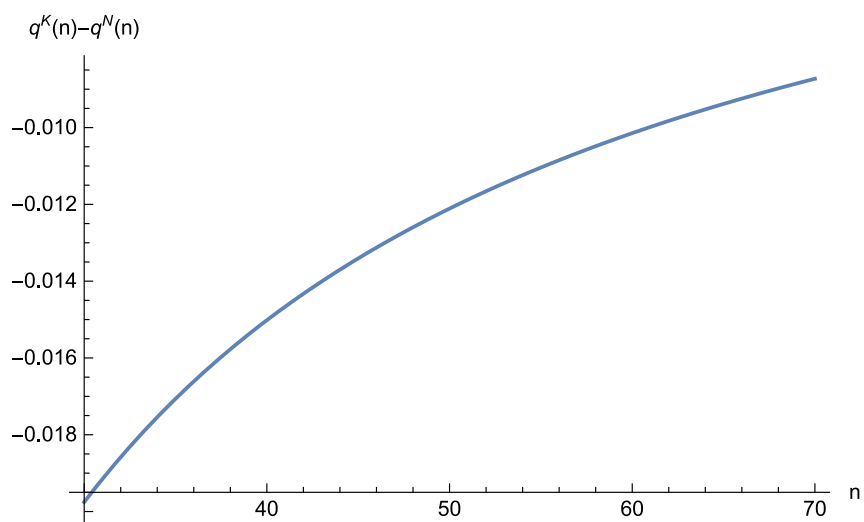


図2 Case 1 : $q^K(n)$ の $q^N(n)$ の比較 $\rightarrow q^N(n) > q^K(n)$

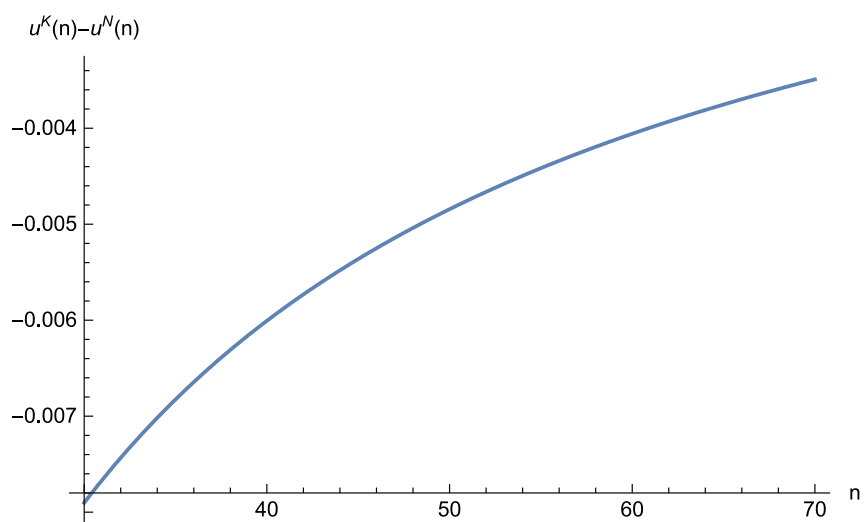


図3 Case 1 : $u^K(n)$ の $u^N(n)$ の比較 $\rightarrow u^N(n) > u^K(n)$

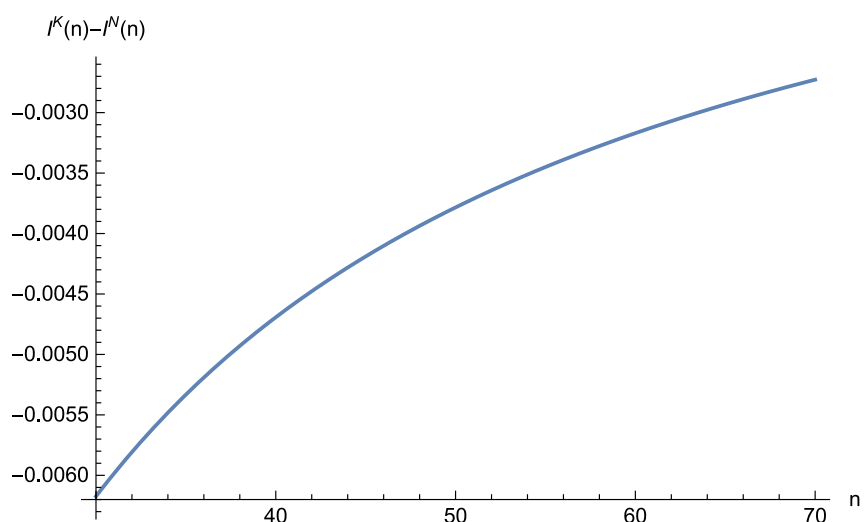


図4 Case 1 : $I^K(n)$ の $I^N(n)$ の比較 $\rightarrow I^N(n) > I^K(n)$

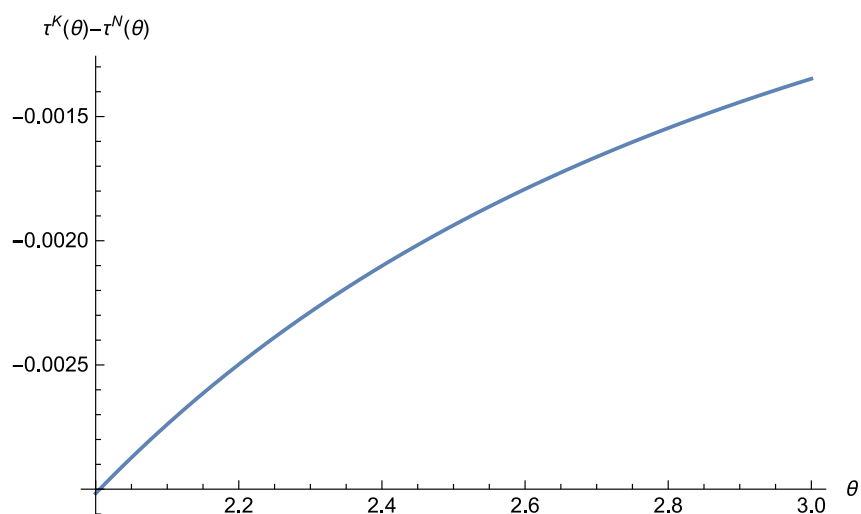


図5 Case 2 : $\tau^K(\theta)$ の $\tau^N(\theta)$ の比較 $\rightarrow \tau^N(\theta) > \tau^K(\theta)$

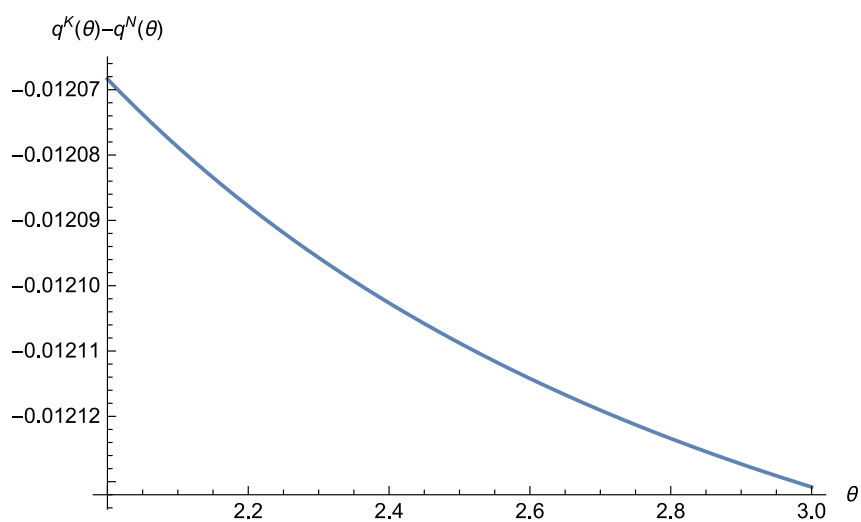


図6 Case 2 : $q^K(\theta)$ の $q^N(\theta)$ の比較 $\rightarrow q^N(\theta) > q^K(\theta)$

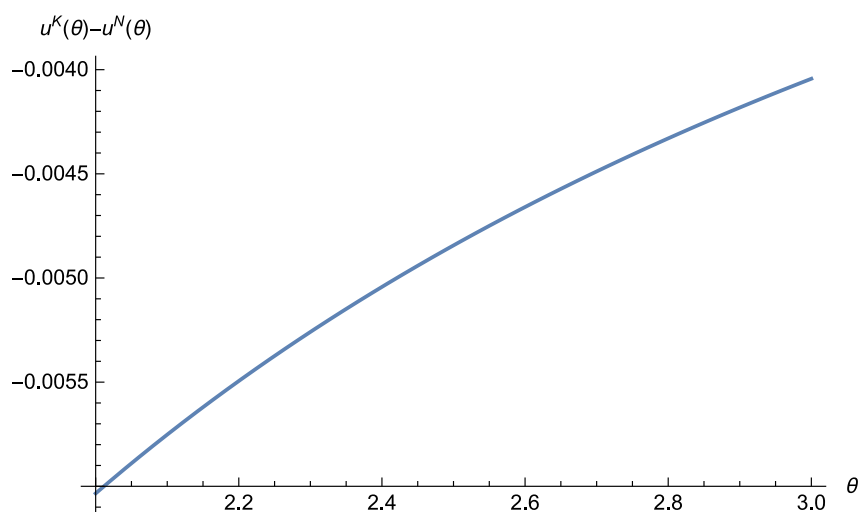


図7 Case 2 : $u^K(\theta)$ の $u^N(\theta)$ の比較 $\rightarrow u^N(\theta) > u^K(\theta)$

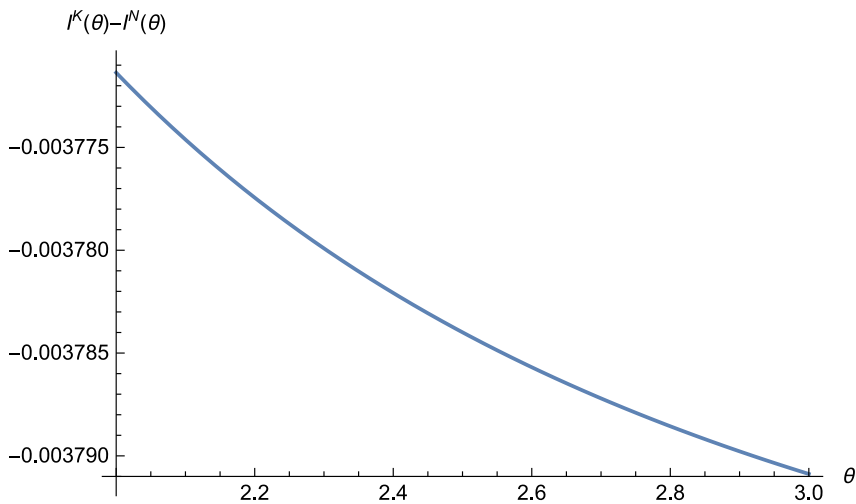


図8 Case 2 : $I^K(\theta)$ の $I^N(\theta)$ の比較 $\rightarrow I^N(\theta) > I^K(\theta)$

- Case 1 の説明 (1) : n (= 参入企業数) の増加によって、各均衡値差は小さくなる (カント的かつナッシュ的均衡の両方の場合において競争が促進されて、各企業の意思決定の影響力が小さくなるため)。
- $q^N(n) > q^K(n)$: カント的均衡はナッシュ的均衡に比べて、現状からの逸脱に対してより慎重である。結果として、各企業がけん制しあって生産量は小さくなる。
- $I^N(n) > I^K(n)$: q_i と X_i の正の相関により、生産量が大きいナッシュ的均衡の方がイノベーション投資が大きくなる ($q_i(n) \uparrow \rightarrow X_i(n) \uparrow \rightarrow I_i(n) \uparrow$)。

- Case 1の説明 (2) :
 - $\tau^N(n) > \tau^K(n)$: 各企業の生産量がより高い, ナッシュ的均衡において政府は高い税率を設定する.
 - $u^N(n) > u^K(n)$: ハミルトニアン条件から, $\underline{u^i} = \theta \tau$ ($i = K, N$) が得られるため, τ^i のランキングと同じになる.

- Case 2の説明 (1) : θ (= 各企業のグリーン R&D 投資量の効率性) の上昇とともに, ナッシュ的均衡とカント的均衡の q_i と I_i の差は大きくなる (θ の上昇とともに, 競争が促進され, その効果がカント的均衡よりもナッシュ的均衡の方がより大きく出るため ($\leftarrow n$ が固定されていることに注目)).
 - $q^N(\theta) > q^K(\theta)$: カント的均衡はナッシュ的均衡と比較して, 現状からの逸脱に対してより慎重である. 結果として, 各企業がけん制しあって生産量は小さくなる.
 - $I^N(\theta) > I^K(\theta)$: q_i と X_i の正の相関により, 生産量が多いナッシュ的均衡の方がイノベーション投資が大きくなる ($q_i(\theta) \uparrow \rightarrow X_i(\theta) \uparrow \rightarrow I_i(\theta) \uparrow$).

- Case 2の説明 (2) : θ (= 各企業のグリーンR&D投資量の効率性) の上昇とともに、ナッシュ的均衡とカント的均衡の τ_i と u_i の差は小さくなる (θ の上昇とともに、単位当たりの green R&D 投資量と課税の効果が失われるため、各方法論の差がなくなるため) .
 - $\tau^N(\theta) > \tau^K(\theta)$: 各企業の生産量がより高い、ナッシュ的均衡において政府は高い税率を設定する.
 - $u^N(\theta) > u^K(\theta)$: ハミルトニアン条件から、 $\underline{u^i = \theta\tau}$ ($i = K, N$) が得られるため、 τ^i のランキングと同じになる.

- 結果のインプリケーション :
 1. Zhao and Ni (2021) : n や θ の増加 –
市場の成熟 (mature) と解釈 (n や θ に注目する)
 - カント的均衡, ナッシュ的均衡ともに n や θ の増加に対して、政府は τ を減少させる $\rightarrow$ ただし、ナッシュ的均衡の方が常に τ は大きい.
 - カント的均衡, ナッシュ的均衡ともに θ の増加に対して、 $u_i \downarrow$, $I_i \uparrow \rightarrow \theta$ の上昇によって、単位当たりの u_i の環境負荷を抑える効果は減少するため、 $\theta \uparrow \rightarrow u_i \downarrow$. 一方、 θ の上昇は、競争を促進する効果もあるため、財の品質を上昇させるイノベーション投資 I_i はカント的均衡, ナッシュ的均衡問わず増加する. ただし、より競争的なナッシュ的均衡の方が常に大きい ($I^N(\theta) > I^K(\theta)$).

- ネットワーク経済の更なる研究に向けて...
 - 数学者との連携には動学的な分析が不可欠と感じる.
 - 特に, ネットワーク経済 (ここでは, 上記のような「ネットワーク効果」が入った経済) の一般均衡解の安定性に関しては, ほとんど何もわかっていない → 常微分/偏微分方程式の解の性質に関連する定理 (特に安定性に関わる定理) の応用の可能性を模索したい.
 - プロジェクトメンバー4人全員がこの研究プロジェクトで立ち止まらずに, さらに「ネットワーク経済」をキーワードに数学と経済学の協働を進めていく所存である.