

一様確率変数の調和平均

増 田 賢 司

1 はじめに

互いに独立である2つの一様分布からなる調和平均の確率分布を求め、さらに、前記の一様確率変数から得た算術平均および幾何平均との関連について考察する。各々の平均同士に精密な関係が得られない場合は、精密な関係のごく粗い近似あるいは近似の方向性を示したい。具体的には、平均間の差の分布と相関係数を求める。

2 調和平均の確率密度関数

調和平均の確率密度関数を導出する。さらに、すでに導かれている [1] 算術平均と幾何平均の確率密度関数を示すことによって、3種類の平均を比較する。

X を区間 $[0, 1]$ の値をとる一様確率変数とすると $Y = 1/X$ の確率密度関数 $f_1(y)$ は

$$f_1(y) = 1/y^2, \quad 1 \leq y < \infty \quad (1)$$

X_1, X_2 を区間 $[0, 1]$ の値をとる互いに独立な一様確率変数とすると $Y = 1/X_1 + 1/X_2$ の確率密度関数 $f_2(y)$ は (1) と畳み込みの方法を使って

$$f_2(y) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \frac{1}{(y-x)^2} dx$$

ここで、 $1 \leq y-x < \infty$ より $1 \leq x \leq y-1$ より

$$f_2(y) = \left[\left\{ \frac{y(-2x+y)}{x(x-y)} + 2 \log \frac{x}{x-y} \right\} / y^3 \right]_1^{y-1}$$

$x = 1$ のとき

$$\frac{1}{y^3} \left\{ \frac{y(-2+y)}{1-y} - 2 \log(y-1) \right\}$$

$x = y-1$ のとき

$$\frac{1}{y^3} \left\{ \frac{y(2-y)}{(1-y)(-1)} + 2 \log(y-1) + \frac{y(y-2)}{1-y} \right\}$$

だから

$$f_2(y) = \left\{ 2 \frac{y(2-y)}{1-y} + 4 \log(y-1) \right\} / y^3 \quad (2)$$

調和平均は

$$Y = \frac{2}{1/X_1 + 1/X_2} \quad (3)$$

で定義されるから、調和平均の確率密度関数 $f_H(y)$ は

(3) 式の分母の部分から (3) 式への 1 : 1 変換を使って

$$f_H(y) = f_2(x) 2 \frac{1}{y^2} \quad (4)$$

となる.

$$f_H(y) = \left\{ \frac{2x(2-x)}{(1-x)x^3} + \frac{4 \log(x-1)}{x^3} \right\} 2 \frac{1}{y^2}$$

ここで $x = 2/y$ を代入して

$$\begin{aligned} &= \left\{ \frac{2 \frac{2}{y} \left(2 - \frac{2}{y}\right)}{\left(1 - \frac{2}{y}\right) \left(\frac{2}{y}\right)^3} + \frac{4 \log\left(\frac{2}{y} - 1\right)}{\left(\frac{2}{y}\right)^3} \right\} 2 \frac{1}{y^2} \\ &= \left\{ \frac{2 \frac{2}{y} \frac{2y-2}{y}}{\frac{y-2}{y} \frac{8}{y^3}} + \frac{4 \log\left(\frac{2-y}{y}\right)}{\frac{8}{y^3}} \right\} 2 \frac{1}{y^2} \\ &= \left\{ \frac{8(y-1)}{8(y-2)} + \frac{4y \log \frac{2-y}{y}}{8} \right\} \end{aligned}$$

整理をして、調和平均の確率密度関数は

$$f_H(y) = \frac{2(y-1)}{y-2} + y \log \frac{y-2}{y} \quad .0 \leq y \leq 1 \quad (5)$$

調和平均の平均は

$$E(Y) = \left[\frac{2y}{3} + \frac{2y^2}{3} + \frac{1}{3} y^3 \log \left(-1 + \frac{2}{y} \right) + \frac{4}{3} \log((2-y)) \right]_0^1 \approx 0.409 \quad (6)$$

調和平均の二乗平均は

$$E(Y^2) = \left[2y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2} + \frac{1}{4}y^4 \log\left(-1 + \frac{2}{y}\right) + 4 \log(2-y) \right]_0^1 \approx 0.227411 \quad (7)$$

したがって, (6), (7) より, 調和平均の分散は

$$V(Y) \approx 0.060 \quad (8)$$

X_1, X_2 を区間 $[0, 1]$ の値をとる互いに独立な一様確率変数とし, これら 2 つの確率変数から作る調和平均を H , 算術平均を A , 幾何平均を G で表す.

算術平均の確率密度関数は

$$f_A(x) = \begin{cases} 4x & , 0 \leq x \leq 1/2 \\ -4x + 4 & , 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{平均 } E(A) = 0.5 \quad \text{分散 } V(A) \approx 0.062 \quad (10)$$

幾何平均 G の確率密度関数は [1] より引用する.

$$f_G(x) = -4 \log x \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (11)$$

$$\text{平均 } E(G) \approx 0.444 \quad \text{分散 } V(G) \approx 0.0524 \quad (12)$$

`Plot[2 * (y - 1) / (y - 2) + y * Log[(2 - y) / y], {y, 0, 1}]`

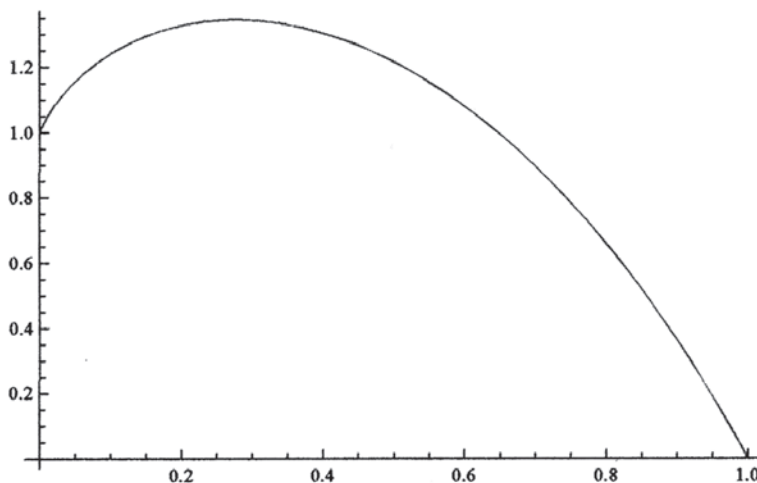


図. 1 調和平均の確率密度関数

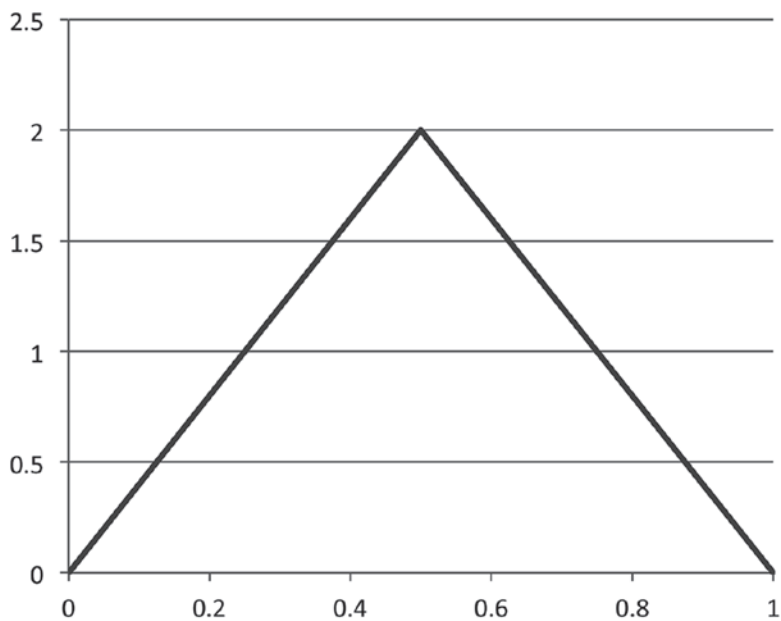


図. 2 算術平均の確率密度関数

`Plot[-4 * x * Log[x], {x, 0, 1}]`

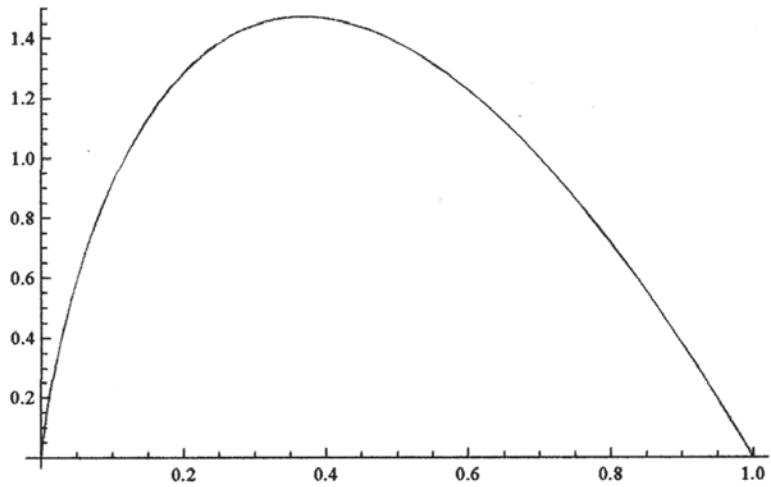


図. 3 幾何平均の確率密度関数

3 各平均間の関連

ここでは、各平均間の差の分布と相関係数を求めることによって、各平均間の関連を考える。

3-1 算術平均 A と幾何平均 G の差の分布と相関係数

[2] より $A - G$ の確率密度関数は

$$f_{A-G}(x) = \frac{4}{3} \left\{ 2 - 3\sqrt{2x} + (\sqrt{2x})^3 \right\} \frac{1}{\sqrt{2x}}, \quad 0 \leq x \leq 1/2 \quad (13)$$

算術平均 A と幾何平均 G の相関係数は

$$\rho_{AG} = 0.9505 \quad (14)$$

とかなり大きい。

3-2 算術平均 A と調和平均 H の差の分布と相関係数

$$\begin{aligned} & \sqrt{xy} - \frac{2xy}{x+y} \\ &= \frac{\sqrt{xy}}{x+y} (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \end{aligned}$$

だから

$$G - H = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{XY}}{(X+Y)/2} (\sqrt{X} - \sqrt{Y})^2$$

(14) 式を利用して、大雑把な変形を試みると

$$\approx \rho_{AG} \frac{\sigma_G}{\sigma_A} \frac{1}{2} (\sqrt{X} - \sqrt{Y})^2$$

分かり易い形に書き換えて

$$= \rho_{AG} \frac{\sigma_G}{\sigma_A} (A - G) \approx 0.87382 (A - G) \quad (15)$$

いま、 $A - G$ の確率密度関数は (13) 式で与えられているので、(15) 式で示される確率変数の密度関数は明らかである。したがって、 $G - H$ の確率密度関数が近似的に得られた。

ρ_{GH} については未解決である。

3-3 幾何平均 G と調和平均 H の差の分布と相関係数

$A - H$ の分布については正確な分布の導出は難しいと思われるので、3-2 を参考に処理したい。 H を A と G により表現する。

$$\begin{aligned}
 A-H &= A - \frac{AH}{A} = A - \frac{G^2}{A} \\
 &= \frac{A+G}{A} (A-G) \\
 &= \left(1 + \frac{G}{A}\right) (A-G)
 \end{aligned}$$

ここで、 A と G の相関係数が大きいことから、近似をすることによって

$$\approx \left(1 + \rho_{AG} \frac{\sigma_G}{\sigma_A}\right) (A-G) = 1.87382 (A-G) \quad (16)$$

(16) 式により、 $A-H$ の確率密度関数が近似的に得られる。

次に A と H の相関係数について考える。

$$\rho_{AH} = \frac{E(AH) - E(A)E(H)}{\sqrt{V(A)} \sqrt{V(H)}}$$

ここで、 $G = \sqrt{AH}$ であり、[1] より $E(G^2)$ を得て

$$= \frac{E(G^2) - E(A)E(H)}{\sqrt{V(A)} \sqrt{V(H)}} = 0.7460 \quad (17)$$

4 各平均間の不等式

算術平均と幾何平均の関係から ([2] 参照), 任意の正の数 $x_1 x_2 \cdots x_n$ に対して

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt{\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}}$$

両辺の逆数をとれば

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

これにより調和平均と幾何平均の関係が示せた (明らかであるが, メモとして記述した). 算術平均と幾何平均の関係の証明は [2] 参照.

5 おわりに

最初に、調和平均の確率密度関数を与え、2個の互いに独立な一様確率変数から作られる算術平均、幾何平均と調和平均の密度関数の比較を行った。次に、各平均間の差の正確な確率密度関数、それが求められないときはその近似分布を与えた。ただし、近似分布はあまり近似度がよくないと思われるが精度については確認をしていない。したがって、近似分布をさらに研究する必要性は多いと思われる。相関係数については、幾何平均と調和平均の相関係数を除き、各平均間の相関係数を求めることができた。一様確率変数の数が3,4についての研究も興味をもたれるが、多分に処理が煩雑になり、理論研究よりむしろコンピュータシミュレーションで傾向を見るほうが効果的だと思われる。

6 参考・引用文献

- [1] 増田賢司 (2009) : “一様分布の幾何平均”, 経済集志 第78巻1号.
- [2] 増田賢司 (2013) : “算術平均と幾何平均”, 経済集志 第83巻2号.