

貨幣的動学モデルにおける多値性と景気循環の発生： 取引費用アプローチ

吉 田 博 之

要旨：本稿では、財市場における取引費用を明示的に考慮し、貨幣を含む動学的一般均衡モデルを構築した。また、財市場における有効需要の原理と価格の粘着性を想定した。我々は、Phillips 曲線の傾きによって、動学的一般均衡経路の多値性（もしくは、不確定性）や周期的な均衡経路が出現するという結論を導いた。

キーワード：動学的一般均衡，数量調整，Phillips 曲線，内生的景気循環

1 はじめに

現代経済において貨幣はなくてはならないものである。現代では、他者と財・サービスの生産を分業し、貨幣という媒介物を使用して、その生産された財・サービスを交換する商品経済が支配的である。このような中で、貨幣は支払い手段の役割を担っており、貨幣の存在によって、財・サービスの流通が広範囲に円滑に行われることが可能になっている。また、貨幣は価値尺度の機能を持ち、財・サービスの経済的価値を客観的に表現することができる。さらに、貨幣は価値保蔵の機能を持ち、少なくとも短期的には額面の価値を保持し、将来の経済的取引に備えて保有される。以上のように、貨幣は支払い手段、価値尺度、および価値貯蔵の3つの機能を持っている。

Keynes (1936) はマクロ経済学の基礎を確立し、それに伴い、Hicks (1937) は『一般理論』で展開された議論を IS-LM モデルで簡便に整理した。もちろん、IS-LM モデルによって Keynes の主張が正確にすべて反映されているわけではないが、財市場と貨幣市場の相互作用によって、国民所得や利率の水準が決定されるメカニズムを明示的に分析できるようになったことは Hicks の大きな功績である。例えば、日本におけるバブル経済崩壊以降の長期経済停滞やリーマン・ショックを契機に世界的な規模で発生した景気後退など、いずれも金融的要素を多分に含んだ不況現象である。このような問題を分析するためには、財市場と貨幣市場の相互連関作用に着目した IS-LM モデルを用いることが適切である。

一般的に、マクロ経済モデルに貨幣を積極的に取り入れる試みとして、貨幣効用の想定、現金制約の想定、もしくは取引費用の想定を利用することが考えられる。貨幣効用モデルでは、家計が貨幣を保有すること自体に効用を見出すという想定を付加し、マクロモデルを構築する。貨幣効用モデルは多くの論文で分析されているが、この中で最も有名な論文は Sidrauski (1967) であろう。また、現金制約モデルでは、家計が消費財を購入する際に貨幣が必要であることを想定する。例えば、Abel (1985)、Woodford (1994)、Gong and Zou (2001) などが現金制約を考慮した動学的マクロ経済モデルを構築

している。最後に、取引費用モデルは、財市場において取引が行なわれる際に、経済主体が取引費用を負担しなければならないことを想定する。なお、家計の貨幣保有が増大すればするほど、その時点での取引費用が減少することを仮定することが通常である。例えば、Dornbusch and Frenkel (1973), Wang and Yip (1991, 1992), Guidotti and Vegh (1993), Zhang (2000), Jha, Wang, and Yip (2002), Itaya and Mino (2003), Suen and Yip (2005), and Chang, Tsai, and Chang (2011) などがこのような財市場における取引費用の想定を採用してモデル構築をしている。

本稿の主要な目的は、動学的な貨幣経済モデルを構築し、均衡経路の多値性や景気循環の可能性について考察することにある。その際に、財市場における取引費用を家計が負担するという想定でモデルを構築する。なお、貨幣経済モデルを展開する際には、金融政策として、利子率をコントロールするか、もしくは、貨幣供給量をコントロールするかが大きな問題となる。近年では、中央銀行における実務的要素を加味して、利子率をコントロールする Taylor ルールを採用した貨幣経済モデルを構築することが多い。本稿と関連性のある文献として、例えば、Benhabib, Schmitt-Grohé, and Uribe (2001a, 2001b, 2002) がある。これらの文献では、貨幣効用モデルの想定のもとで、Taylor ルールに従う中央銀行を考慮した動学的マクロモデルを展開している。他方、本稿では、取引費用モデルの想定のもとで、貨幣供給量の成長率について $k\%$ ルールに従う中央銀行を考慮した動学的マクロモデルを構築する。この貨幣供給ルールは Friedman (1968) などで提示された金融政策の手法である。

本稿は次のように構成される。第2節ではモデルの提示を行ない、家計・企業・中央銀行の行動について述べる。最後に、価格の硬直性についても解説する。第3節では、動学的一般均衡モデルの解析を行なう。定常状態の分析と周期解の発生について考察する。第4節では結論をまとめる。

2 モデルの提示

本稿で取り扱う経済モデルでは、代表的家計・代表的企業・中央銀行という3つの経済主体がそれぞれの経済活動を営んでいる。なお、財政政策を実行する経済主体である政府は考慮しない。また、財市場と株式市場という2つの市場に対して、分析の焦点を当てる。なお、本稿では、連続時間モデルを取り扱う。以後、3つの経済主体の行動について順に説明していこう。

2.1 家計

代表的家計は以下のような生涯効用を持つ。

$$\int_0^{\infty} \exp(-\rho t) \ln(c_t) dt \quad (1)$$

ここで、 c_t は時点 t における消費量であり、 ρ は主観的割引率である。なお、 ρ は正の一定値をとる。

経済には2種類の資産があることを想定する。具体的には、株式 E と貨幣 m である。時点 t における金融資産の実質価値は $a_t = q_t E_t + m_t$ によって与えられる。ここで、 q_t は産出物で評価された株式の相対価格であり、時点 t における値である。また、 m_t は時点 t における実質貨幣残高である。

家計の予算制約式は次のように表記される。

$$\dot{a}_t = r_t a_t - (1 + \omega) c_t + \tau_t - (r_t + \pi_t) m_t \quad (2)$$

ただし、 r_t は時点 t における実質利子率、 τ_t は時点 t における政府からの一括移転(負の値を取るならば、一括税)、 π_t は時点 t における物価上昇率である。また、 ω は消費財に関する取引費用である。

本稿のモデルの特徴は、代表的家計が財市場において取引や交換を実施する際に、取引費用を負担す

ることにある。ここでは、消費1単位当たり ω だけの追加的な取引費用が発生することを想定する。したがって、財市場において c 単位の消費財の取引を実行する際には、 $[1+\omega]c$ 単位の支出が必要になる。

前節で述べたように、本稿では、取引費用アプローチを導入することによって、モデルに貨幣を内生変数として取り込み、貨幣経済のモデル分析の確立を試みる。なお、消費財の取引費用が消費者の保有する貨幣残高に依存すると想定して、取引費用について

$$\omega = \omega(m) \quad (3)$$

が成立すると仮定する。なお、関数 $\omega(m)$ は次のような性質を持つ。つまり、 $\omega(m) > 0$, $\omega'(m) < 0$, $\omega''(m) > 0$, $\lim_{m \rightarrow 0} \omega(m) = \infty$, および $\lim_{m \rightarrow \infty} \omega(m) = 0$ という性質である。 $\omega(m) > 0$ という条件は、あらゆる m の水準について、正の取引費用が必要になることを示している。また、 $\omega'(m) < 0$ という条件は、家計の保有する実質貨幣残高が増加すれば、取引費用が減少することを表している。さらに、 $\omega''(m) > 0$ という条件は、実質貨幣残高による取引費用減少効果が貨幣保有量の増大とともに逓減していくことを示している。なお、最後に、家計の保有する実質貨幣残高が正値をとることを保証するための条件として、 $\lim_{m \rightarrow 0} \omega'(m) = -\infty$ であることも仮定する。

家計は生涯効用(1)を最大化することが目的である。ただし、そのためには予算制約(2)と消費財に関する取引費用(3)を考慮する必要がある。つまり、家計は制約条件付きの最大化問題を解くことになる。今回、我々が取り扱うのは異時点間の動学的最適化問題であり、最大値原理を適用することによって最適解の時間経路を求めることになる。この問題を解決するために我々は次のようなHamiltonian関数を設定する。なお、以下では混乱の生じない限り、時点を示す右下の添字は表記しないこととする。

$$H = \ln c + \lambda[ra - (1 + \omega(m))c + \tau - (r + \pi)m] \quad (4)$$

ただし、 λ は共役状態変数(costate variable)であり、時間の関数である。

家計の生涯効用最大化問題を解くときには、消費量と実質貨幣残高が制御変数であり、資産量は状態変数である。したがって、一般的に、Hamilton関数に対する最適化の1階条件は

$$\partial H / \partial c = 0 \quad (5)$$

$$\partial H / \partial m = 0 \quad (6)$$

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \partial H / \partial a \quad (7)$$

となる。これを我々のモデルに適用するならば、最適化条件は次のように表現される。

$$\frac{1}{c} = \lambda[1 + \omega(m)] \quad (8)$$

$$-\omega'(m)c = r + \pi \quad (9)$$

$$\dot{\lambda} = (\rho - r)\lambda \quad (10)$$

また、横断性条件として、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_t \lambda_t e^{-\rho t} = 0 \quad (11)$$

が付加される。なお、家計がPonziゲームを実行することを防ぐための条件として、以下の条件を考慮することが必要になる。

$$\lim_{s \rightarrow \infty} a_s \exp\left(-\int_0^s r_t dv\right) \geq 0 \quad (12)$$

この条件は非Ponziゲーム条件と呼ばれるものである。この条件式は家計の予算制約式(2)を計画期間 $[0, +\infty)$ において積分を実行し、生涯に関する予算制約式に変形することによって得ることがで

きる。

(10) と (11) を用いるならば, $\lim_{s \rightarrow \infty} a_s \exp(-\int_0^s r_t dv) = 0$ を得る. このことより, 非 Ponzi ゲーム条件が厳密に等号で成立するならば, 非 Ponzi ゲーム条件と横断性条件 (11) が一致することが分かる.

2.2 企業

まず, 生産の効率的水準 (y^e) について言及しておこう. 本稿のモデルでは簡単化のために, 資本ストックについて蓄積も減耗も発生せず, 一定とする. 資本ストックが完全に稼働される場合に, 効率的な生産が実行されるとする. つまり,

$$y^e = \sigma k, \sigma > 0 \quad (13)$$

ただし, σ は効率的な産出 - 資本比率を示す. なお, 技術進歩を捨象するので σ は一定値をとる.

現実の経済では, 需要水準が効率的な生産水準に常に等しくなることはない. これは, 経済活動が分権的に営まれていることの必然的な結果である. 本稿では, 伸縮的な価格調整メカニズムを想定せず, 企業が財に対する需要に応じて生産量を柔軟に変更することを想定する. なお, 具体的には, 企業は資本ストックの稼働率を制御することによって生産量を調整することを想定する. このような企業行動の想定は, Keynes 的な有効需要の原理が財市場において成立していることを反映している. さらに, 本稿では, 企業が生産量を変更する際に, 価格を所与として行動することも想定している. もし, 経済の需要水準が D_t であるならば, それに対応する稼働率は

$$u_t = D_t / y^e$$

と表される.

本稿のモデルでは, 生産要素として, 資本のみを考察し, 労働を明示的に考察しない. そのため, 利潤は総収入と一致することになる. さらに, 有効需要の原理を想定していることに注意すれば, 総需要の水準が利潤の水準に等しいことになる.

なお, $u_t = 1$ が成立するとき, 資本ストックが完全稼働が実現しており, 効率的生産が行なわれている. また, $u_t < 1$ であれば, 資本ストックが過少稼働の状態にある. この場合には, 有効需要の不足によって遊休設備が発生していることになる. 他方, $u_t > 1$ であれば, 資本ストックが過度稼働の状態にある. この場合には, 生産能力に比して過大な需要によって資本設備の不足が出現していることになる.

次に, 企業の金融構造について説明しておこう. 本稿では, 企業によって新規の株式が発行されることはないと仮定しよう. つまり, 流通している株式の発行数は一定である.

$$E_t^s = \bar{E}$$

ここで, $\bar{E} > 0$ を想定し, 一定値である. さらに, 我々は, 企業の得た利潤はすべて配当として株式保有者である家計に分配されることを想定する. つまり, 以下の式が成立する.

$$d_t = D_t / E \quad (14)$$

したがって, d_t は 1 株あたりの配当の実質値を示す.

2.3 中央銀行

公的機関として, 中央銀行の存在を想定する. 中央銀行の役割は貨幣 M^s を発行することであり, 新規に発行される貨幣は家計に対して一括移転の形で注入される.

$$\dot{M}_t^s = p_t \tau_t \quad (15)$$

なお, ここで提示されている τ_t が, 家計の予算制約に含まれていることに注意せよ. Walras の法則によっ

て、 n 種類の市場が存在する経済では、 $n-1$ 種類の市場の均衡分析を考察すれば十分であることが知られている。各経済主体の予算制約式を考慮することにより、Walras の法則が成立することを確認できる。したがって、本稿のモデルでは、財市場・株式市場・貨幣市場という 3 つの市場が存在しているが、Walras の法則により、我々の分析は財市場と貨幣市場の均衡分析に限定すれば良いことになる。

さらに、本稿では、中央銀行が名目貨幣量の成長率を一定に維持するという金融政策を採用していることを想定する。名目貨幣供給量の成長率を θ とし、中央銀行の政策を以下のように定式化することができる。

$$\dot{M}_t^s / M_t^s = \theta \quad (16)$$

2.4 価格の硬直性

価格の硬直性を導入するために、Phillips 曲線を導入する。近年では、マクロ経済学的視点から貨幣経済理論を取り扱う専門書として、Woodford (2003)、Walsh (2010)、および Galí (2015) などが代表的な地位を獲得している。このような専門書には必ずと言って良いほど、New Keynesian Phillips 曲線の解説が取り上げられている。本来、Phillips 曲線は統計的事実をもとに定式化された構造的方程式であるが、これに対して、New Keynesian Phillips 曲線は精巧なミクロ経済学的基礎を有しているところに大きな特徴がある。例えば、先駆的な業績として、Calvo (1983) があるが、Calvo は企業群の非同期的価格調整 (staggered price adjustment) 行動を強調し、New Keynesian Phillips 曲線を導出している。具体的には、各時点において一定割合の企業が最適価格を設定する一方で、残りの企業は価格変更を実施しないことを Calvo は想定している。さらに、動学的観点からは、個別企業の価格変更の機会が Poisson 過程に従うことを仮定することによって、Calvo 型 Phillips 曲線を導出している。また、別の取り組みとして、Rotemberg (1982) は価格調整費用関数を導入し、企業の利潤最大化行動に基づいて New Keynesian Phillips 曲線を導出している。

マクロ経済モデルの構成要素の 1 つとして価格硬直性を定式化している Phillips 曲線は、伝統的な Phillips 曲線であれ、New Keynesian Phillips 曲線であれ、基本的な構造は共通であり、以下のような定式化が一般的である。

$$\pi_t = E_t(\pi_{t+1}) + \beta (\text{労働市場もしくは財市場の状況}), \quad \beta > 0 \quad (17)$$

この定式化では、今期の物価上昇率が来期の予想物価上昇率と今期の労働市場もしくは財市場の状態に依存することが明示されている。

標準的な New Keynesian モデルにおいては、経済主体の完全予見の想定を厳格に踏襲し、 $E_t(\pi_{t+1}) = \pi_{t+1}$ という仮定を採用することが多い。完全予見の想定のもとでは、(17) は

$$\pi_{t+1} - \pi_t = -\beta (\text{労働市場もしくは財市場の状況}), \quad \beta > 0 \quad (18)$$

と変形される。この式は、 π_t が一定という条件のもとでは、 t 期の財市場の状況が好転するならば、 $t+1$ 期の物価上昇率が下がってしまうということを意味している。このような産出量と物価上昇率の負の関係については、実証的観点からの不整合性が指摘されている。また、(18) で表現されている New Keynesian Phillips 曲線では、外生的なショックに対して物価上昇率の調整が過敏に反応し、物価上昇率の持続性がないと指摘されることが多い。

このような点は、例えば、Fuhrer and Moore (1995) で指摘されており、彼らは相対的実質賃金契約モデルを提示し、そのモデルの動学的挙動が物価上昇率に関する現実データと整合的であることを主張している。また、Galí and Gertler (1999) や Galí, Gertler, and Lopez-Salido (2005) は、New

Keynesian Phillips 曲線に後方注視予想の項目を付加したモデル, つまり, 混成的 New Keynesian Phillips 曲線を提示し, モデルの実証的な説明力を強化することに成功している.

このような状況を考慮して, 本稿のモデルでは, Phillips 曲線における予想物価上昇率について完全予見とは異なる定式化を想定し, その理論的な帰結を追求してみよう. ここでは, 予想物価上昇率に代替的な要素として「基調的物価上昇率」を導入する. t 時点における基調的物価上昇率 π_t^c を以下のように定義する.

$$\pi_t^c = \int_{-\infty}^t \gamma \exp[-\gamma(t-s)] \pi_s ds, \gamma > 0 \quad (19)$$

この定式化において, 基調的物価上昇率が過去の物価上昇率の加重平均によって決定されると想定している. このとき, 過去の物価上昇率に対する重み (重要度) は指数関数で定義されており, 過去のデータになればなるほどその過去の物価上昇率に対する重みが逡減していくことに注意せよ. さらに,

$$\int_{-\infty}^t \gamma \exp[-\gamma(t-s)] ds = [\exp[-\gamma(t-s)]]_{-\infty}^t = 1 \quad (20)$$

が成立することにも注視しよう. なお, (19) について時間 t に関して微分演算を実行するならば,

$$\dot{\pi}_t^c = \gamma(\pi_t - \pi_t^c), \gamma > 0 \quad (21)$$

を得る. これは, 基調的物価上昇率が現実の物価上昇率と基調的物価上昇率の差に応じて徐々に改訂されることを示している.

さて, Phillips 曲線の重要な項目である労働市場もしくは財市場における状況を数値化することについて考えてみよう. ここでは, 需要と効率的産出量の差を効率的産出量で評価した産出ギャップを財市場における不均衡の指標として採用する. つまり,

$$\frac{D_t - y^e}{y^e} \quad (22)$$

と定式化する. したがって, 本稿でのモデルの構成要素としての New Keynesian Phillips 曲線は

$$\pi_t = \pi_t^c + \beta \left(\frac{D_t}{y^e} - 1 \right), \beta > 0 \quad (23)$$

と表現されることになる.

3 動学的一般均衡モデル

ここでは, 動学的一般均衡経路を定義する. 動学的一般均衡経路上では, (1) 家計が生涯効用を最大化している, (2) 財市場, 貨幣市場, および株式市場において各時点の需要と供給が一致している, さらに, (3) 各種の価格流れ (財価格と株価) について予想値と実現値が正確に一致しているという条件が満たされていなければならない.

3.1 微分方程式体系

これまでに提示してきた数式を整理することによって, 以下の微分方程式体系を得る. なお, 財市場における需要量は, $D_t = (1 + \omega(m_t))c_t$ と定義している.

$$\dot{\lambda} = (\rho + \pi^c - \beta)\lambda + \frac{\beta}{y^e} + \frac{\omega'(m)}{1 + \omega(m)} \quad (24a)$$

$$\dot{m} = (\theta - \pi^e)m - \beta \left(\frac{1}{\lambda y^e} - 1 \right) m \quad (24b)$$

$$\dot{\pi}^e = \beta \gamma \left(\frac{1}{\lambda y^e} - 1 \right) \quad (24c)$$

ここで以下の関数 $\Omega(m)$ を新たに導入しよう。

$$\Omega(m) = \frac{\omega'(m)}{1 + \omega(m)}$$

取引費用関数 $\omega(m)$ については、以前に述べたように、 $m > 0$ に対して $\omega'(m) < 0$ と $\omega(m) > 0$ という基本的な性質が成立する。これを考慮するならば、 $\Omega(m) > 0$ が成立する。なお、

$$\Omega'(m) = \frac{\omega''(1 + \omega) - (\omega')^2}{(1 + \omega)^2}$$

が成立することにも注意しよう。取引費用関数 $\omega(m)$ が $\omega''(m) > 0$ という性質を加味しても、 $\Omega'(m)$ の符号について確定することは不可能である。以下の議論では、

仮定 1 $\Omega'(m) > 0$

であることを仮定する。

ここで、例えば、 $\omega(m) = b/m$ という具体的な関数を考えてみよう。ただし、 b は正の定数である。このとき、 $\Omega(m) = -b/(m^2 + bm)$ となり、 $m > 0$ に対して $\Omega(m) < 0$ となる。さらに、関数 $\Omega(m)$ の微係数について $\Omega'(m) = b(2m + b)/(m^2 + bm)^2 > 0$ が成立する。この事例に関しては、 $\Omega'(m) > 0$ という結果と仮定 1 が調和的である。

3.2 定常状態

定常状態 $(\lambda_*, m_*, \pi_*^e)$ は、すべての時間について $\dot{\lambda} = \dot{m} = \dot{\pi}^e = 0$ が成立する状態である。具体的には、定常状態は以下の条件によって定義される。

$$\lambda_* = 1/y^e, \quad -\frac{\omega'(m_*)}{1 + \omega(m_*)} y^e = \rho + \theta, \quad \pi_*^e = \theta \quad (25)$$

上記の結果から、定常状態において、物価上昇率は名目貨幣供給量の成長率と等しいことが分かる。また、定常状態において、実質利利率が主観的割引率に一致すること ($r_* = \rho$) や設備の完全稼働 ($u_* = 1$) が成立することも導出できる。

さらに、定常状態における比較静学分析として、外生変数である θ の影響を考察してみよう。結果は容易に得ることができる。つまり、 θ の上昇は物価上昇率の増大を招くだけであり、生産量や実質利利率に影響を与えない。この事実は貨幣の超中立性が本稿のモデルでは成立することを意味する。なお、 $dm_*/d\theta < 0$ が成立するので、物価上昇を加速する政策は経済の実質貨幣残高を減少させることに注意が必要である。

3.3 定常状態の動学的特徴

ここでは、定常状態の動学的特徴を検討する。そのために、一意に存在する定常状態で評価された Jacobi 行列を分析することから始める。

$$J = \begin{bmatrix} \rho + \theta - \beta & \Omega'(m_*) & \lambda_* \\ -\beta m_* y^e & 0 & -m_* \\ -\beta \gamma y^e & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

この Jacobi 行列に対応する特性方程式は

$$C(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \quad (27)$$

ただし,

$$a_1 = \beta - \rho - \theta \quad (28a)$$

$$a_2 = \beta m_* y^e \Omega'(m_*) + \beta \gamma > 0 \quad (28b)$$

$$a_3 = -\beta \gamma y^e m_* \Omega'(m_*) < 0 \quad (28c)$$

$$\Delta = (m_* y^e \Omega(m_*) + \gamma) \beta^2 + [(\gamma - \rho - \theta) m_* y^e \Omega'(m_*) - \gamma(\rho + \theta)] \beta \quad (28d)$$

が成立している. なお, $\Delta = a_1 a_2 - a_3$ と定義していることに注意.

ここで, $C(0) = a_3 < 0$ であることに加えて, $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = +\infty$ が成立することに注意すれば, 特性方程式 $C(x) = 0$ が少なくとも 1 つの正の実数解を保有することが判明する.

また, ここで, 以下の仮定を追加する.

仮定2 $\gamma < \rho + \theta$

この仮定は, 基調的物価上昇率の加重度の係数 γ が定常状態における名目利子率より小さいことを意味している.

この仮定のもとで, 定常状態の局所的性質に関する分析を進めていこう. その際に, 我々は, Phillips 曲線の傾きである β を分岐パラメーターとして選択し, 分析の焦点とする. (28d) において, β を変数とみなして関数 $\Delta = \Delta(\beta)$ と定義しよう. この関数は β に関する 2 次関数であるから, 以下の性質を持つことが容易に分かる. $0 < \beta < \beta_H$ に対して $\Delta(\beta) < 0$ となり, $\beta > \beta_H$ に対して $\Delta(\beta) > 0$ となる. さらに, $\beta = \beta_H$ に対して $\Delta(\beta) = 0$ となることも重要である. また, $\Delta(\rho + \theta) = -a_3 > 0$ が成立することから, $\beta_H < \rho + \theta$ となることも判別できる.

$\beta = \beta_H$ のとき, $\Delta(\beta) = 0$ であるから, $a_1 a_2 = a_3$ が成立する. このとき, 特性方程式は

$$C(x) = (x^2 + a_2)(x + a_1) = 0 \quad (29)$$

と整理できる. $a_2 > 0$ が保証されているので, 特性方程式が 1 つの実数解と 1 組の純虚数解を持つことが分かる. なお, $\beta_H < \rho + \theta$ であることに注意すれば, $a_1 < 0$ であり, 特性方程式の実数解は正値をとることも分かる.

以上の議論を敷衍すれば, $\beta = \beta_H$ の近傍において, 特性解について, 1 つの実数解 $(x_1(\beta))$ と 1 組の共役な虚数解 $(a_r(\beta) \pm a_i(\beta)i)$ が存在することも言える. ただし, $a_r(\beta_H) = 0, a_i(\beta_H) \neq 0$ が成立する. さらに, Viète の定理を援用するならば, $\beta = \beta_H$ の近傍では,

$$a_1 = -x_1(\beta) - 2a_r(\beta) \quad (30a)$$

$$a_2 = 2x_1(\beta) a_r(\beta) + (a_r(\beta))^2 + (a_i(\beta))^2 \quad (30b)$$

$$a_3 = -[(a_r(\beta))^2 + (a_i(\beta))^2] x_1(\beta) \quad (30c)$$

が成立する. これらを利用して,

$$\Delta(\beta) = a_1 a_2 - a_3 = -2a_r(\beta) [(x_1(\beta) + a_r(\beta))^2 + (a_i(\beta))^2] \quad (30d)$$

を得る.

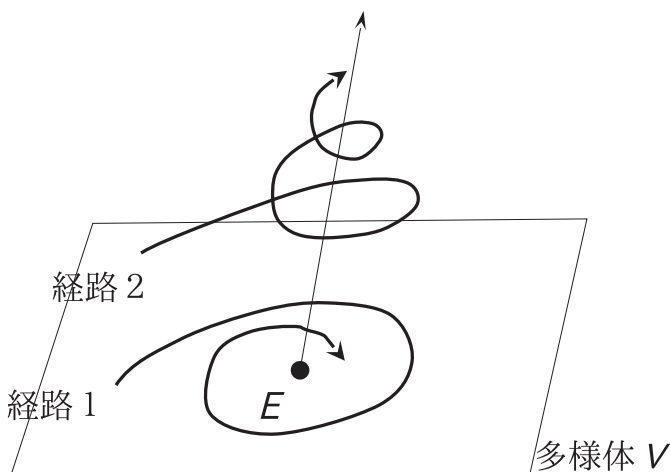
前述したように、 $0 < \beta < \beta_H$ に対して $\Delta(\beta) < 0$ となり、 $\beta > \beta_H$ に対して $\Delta(\beta) > 0$ となることに注意しつつ、(30d) を考慮するならば、 $\beta < \beta_H$ では、 $a_r(\beta) > 0$ が成立し、他方、 $\beta > \beta_H$ では、 $a_r(\beta) < 0$ が成立することが分かる。

したがって、以下の定理を得る。

定理 1 $\beta = \beta_H$ の近傍を考える。 $\beta < \beta_H$ では、動学的一般均衡経路は定常点であり、 $\beta_H < \beta$ では、動学的一般均衡経路は多値性を持つ。

(証明) (λ, m, π^e) に関する微分方程式体系において、 (λ, m) は家計の制御変数であり、 π^e は過去の情報によって決定される先決変数である。 $\beta < \beta_H$ のとき、特性解について、正の実数解と実数部分が正となる共役な虚数解が発生する。また、 $\beta_H < \beta$ のとき、特性解について、正の実数解と実数部分が負となる共役な虚数解が存在する。制御変数の個数と発散する特性解の個数を比較することにより、定理 1 を得る。□

図 1：3次元空間で表現された動学的一般均衡経路の概略図



ただし、定理 1 について若干の補足を行なっておこう。 $\beta < \beta_H$ のときには、3つ存在する特性解について、すべての解が正の実部を持つ。さらに、多く場合、初期値について $\pi_0 \neq \pi_*$ が成立するであろう。このときには、すべての軌道は発散することになり、最適な動学的一般均衡経路は存在しない。つまり、経済そのものが存在しないことになる。 π_t は状態変数であり、先決変数である。特に、初期値 π_0 は歴史によって決定される変数であり、時点 $t=0$ において、 $\pi_0 = \pi_*$ を成立させるような経済的メカニズムは存在しない。最適経路がそもそも存在しないというのは極端なケースであるが、これは理論的に正当な結果である。

また、 $\beta_H < \beta$ のときには、図 1 で提示されるような状況になる。図 1 は 3次元空間で表現された動学的一般均衡経路の概略図であり、定常状態 E を含む多様体 V が描かれている。多様体 V 上に初期値が存在するならば、虚数である特性解の実数部分が負であるという事実によって、その経路は定常状態 E へ循環を伴って収束することになる。これが経路 1 である。他方、経路 2 では、初期値が多様体 V

に配置されていない。最終的には、唯一の正の実数である特性解が支配的な決定要因となり、経路2は発散することになる。

定理2 $\beta = \beta_H$ において、景気循環が発生する。

(証明) この定理を証明するためには、Hopf分岐の定理を適用すれば良い。(1) 特性方程式が1組の純虚数解と非ゼロの実数解を持ち、(2) 純虚数の実数部分が分岐パラメータに関して停留的でないことを示すことができるならば、Hopf分岐の定理が適用可能であり、周期軌道の存在が保証される。

まず、 $\beta = \beta_H$ のとき、(29)が成立するので、特性解は $x_1 = -\alpha_1 \neq 0$ 、 $x_{2,3} = \pm \sqrt{\alpha_2}i$ となる。つまり、1組の純虚数解と非ゼロの実数解が存在していることが分かる。

次に、関数 $\Delta(\beta)$ が2次関数であることから、 $d\Delta(\beta_H)/d\beta > 0$ が成立することに注意しよう。ここで、 $\alpha_r(\beta_H) = 0$ が成立することを考慮しつつ、(30d)を利用して、 $\beta = \beta_H$ における関数 $\Delta(\beta)$ の微係数を求めると、

$$\frac{d\Delta(\beta_H)}{d\beta} = -\frac{d\alpha_r(\beta_H)}{d\beta} [(x_1(\beta_H))^2 + (\alpha_i(\beta_H))^2] \quad (31)$$

を得る。したがって、 $d\Delta(\beta_H)/d\beta > 0$ に注意すれば、 $d\alpha_r(\beta_H)/d\beta < 0$ が成立するので、純虚数の実数部分が分岐パラメータに関して停留的でないことが判明した。

以上の議論により、 $\beta = \beta_H$ においてHopf分岐の成立要件がすべて満たされることが確認された。ゆえに、貨幣経済モデルにおける周期軌道の存在が証明された。□

なお、定理2で周期軌道の存在を証明したが、その安定性および個数については述べていない。周期軌道の個数を確定する数学的理論は未だ確立されていないが、周期軌道の安定性を判別するためには、関数の3次以下の微係数を計算することによってその安定性を確定できる。ただし、その計算は一般的に煩雑であり、経済的含意を付与しがたい場合が多く、経済学の理論的分析においてその計算が実行されることは少ない。このような事情に鑑み、本稿でも周期解の安定性の議論については割愛する。

また、周期解の発生状況については、図1が参考になる。認識すべき最も重要な現象は、特性解の変容に伴いHopf分岐の条件が満たされた場合には、多様体 V 上に周期解が発生するという点である。周期解は有限値における振幅運動を示すことから、横断性条件を満たす。なお、初期点が多様体 V に存在していなければ、その経路は単純に発散し、横断性条件を満たさないであろう。このような状況では、初期点がちょうど多様体 V 上に含まれるように λ_0 と m_0 が選択され、経済の周期的挙動が観察されることになるだろう。

4 結論

本稿では、家計と企業の最適化行動および価格の粘着性を考慮したIS-LM分析モデルを構築した。特に、生涯効用を最大化する経済主体としての家計を設定し、さらに、Phillips曲線を考慮することによって価格の粘着性を定式化した。また、価格の粘着性という性質を考慮することと密接に関係するが、財市場における数量調整メカニズムを導入した。これにより、財市場において有効需要の原理が明示的に機能することになった。

このようなモデルでは、以下のような経済的結論が得られた。定理1として、Phillips 曲線の傾きが小さいとき、つまり、価格の粘着性が強いときには、最適な動学的一般均衡経路は定常状態のみであるという結論を得た。さらに、Phillips 曲線の傾きが大きいとき、つまり、価格の粘着性が弱いときには、動学的一般均衡経路は多値性を有することになり、どの均衡経路が選択されるかは不確定になる。このような状況では、Keynes 的血気もしくは自己実現的予想が重要な役割を果たすことになる。

また、定理2では、Hopf 分岐の定理を援用することによって、周期解の発生を証明した。この定理により、内生的景気循環が発生し、景気循環が動学的一般均衡経路として実際に観察されることになる。

なお、今後の課題として、現実のデータとの整合性を本格的に考える必要があるだろう。本稿では、厳密な解析的議論を展開することを重視したが、現実の景気循環を再現するためのカリブレーション分析などが重要であることは疑いがない。

References

- Abel, A. B. (1985) Dynamic behavior of capital accumulation in a cash-in-advance model. *Journal of Monetary Economics* 16, 55-71.
- Benhabib, J., Schmitt-Grohe, S., and Uribe, M. (2001a) The Perils of Taylor rules. *Journal of Economic Theory* 96, 40-69.
- (2001b) Monetary policy and multiple equilibria. *American Economic Review* 91, 167-186.
- (2002) Avoiding liquidity traps. *Journal of Political Economy* 110, 535-563.
- Calvo, G. A. (1983) Staggered prices in a utility-maximizing framework. *Journal of Monetary Economics* 12, 383-398.
- Chang, W. Y., Tsai, H. F., and Chang, J. J. (2011) Interest rate rules and macroeconomic stability with transaction costs. *International Review of Economics and Finance* 20, 744-749.
- Dornbusch, R. and Frenkel, J. A. (1973) Inflation and growth: Alternative approach. *Journal of Money, Credit, and Banking* 5, 141-156.
- Friedman, M. (1968) The role of monetary policy. *American Economic Review* 58, 1-17.
- Fuhrer, J. and Moore, G. (1995) Inflation persistence. *Quarterly Journal of Economics* 110, 127-159.
- Galí, J. (2015) *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework and Its Applications*. Princeton University Press: New Jersey.
- Galí, J. and Gertler, M. (1999) Inflation dynamics: A structural econometric analysis. *Journal of Monetary Economics* 44, 195-222.
- Galí, J., Gertler, M., and Lopez-Salido, J. D. (2005) Robustness of the estimates of the hybrid New Keynesian Phillips curve. *Journal of Monetary Economics* 52, 1107-1118.
- Gong, L. and Zou, H. F. (2001) Money, social status, and capital accumulation in a cash-in-advance model. *Journal of Money, Credit and Banking* 33, 284-293.
- Guidotti, P. E. and Végh, C. A. (1993) The optimal inflation tax when money reduces transactions costs: A reconsideration. *Journal of Monetary Economics* 31, 189-205.
- Hicks, J. R. (1937) Mr. Keynes and the "Classics"; A Suggested interpretation. *Econometrica* 5, 147-159.
- Itaya, J. and Mino, K. (2003) Inflation, transaction costs and indeterminacy in monetary economies with endogenous growth. *Economica* 70, 451-470.
- Jha, S. K., Wang, P., and Yip, C. K. (2002) Dynamics in a transactions-based monetary growth model. *Journal of Economic Dynamics and Control* 26, 611-635.
- Keynes, J. M. (1936), *The General Theory of Employment, Interest and Money*. Macmillan: London.
- Rotemberg, J. J. (1982) Sticky prices in the United States. *Journal of Political Economy* 60, 1187-1211.
- Sidrauski, M. (1967), Rational choice and patterns of growth in a monetary economy. *American Economic Review* 57, 534-544.
- Suen, M.-H. and Yip, C. K. (2005) Superneutrality, indeterminacy and endogenous growth. *Journal of Macroeconomics* 27, 579-595.
- Taylor, J. B. (1993) Discretion versus policy rules in practice. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*

- 39, 195-214.
- Walsh, C. E. (2010) *Monetary Theory and Policy*. MIT Press: Cambridge, MA.
- Wang, P. and Yip, C. K. (1991) Transactions cost, endogenous labor, and the superneutrality of money. *Journal of Macroeconomics* 13, 183-191.
- (1992) Alternative approaches to money and growth. *Journal of Money, Credit and Banking* 24, 553-562.
- Woodford, M. (1994) Monetary policy and price level determinacy in a cash-in-advance economy. *Economic Theory* 4, 345-380.
- (2003) *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*. Princeton university press: New Jersey.
- Zhang, J. (2000) Inflation and growth: pecuniary transactions costs and qualitative equivalence. *Journal of Money, Credit and Banking* 32, 1-12.