

マイナス金利を考慮したフォワードレート・モデルと 市場の金利見通し

菅 沼 健 司*
山 田 哲 也**

[要 旨]

近年、先進国を中心にマイナス金利政策が導入される中、金融実務では「マイナス金利を考慮したフォワードレート・モデル (Shifted SABR, Free boundary SABR)」が提案されている。本稿では、こうした一連のモデル群の特徴を整理したうえで、わが国の研究としては初めて、モデルを実際の金利オプションのデータにフィットさせ、マイナス金利政策やイールドカーブ・コントロール政策の前後における、市場金利の将来分布の変化を分析した。分析の結果、日本では、①マイナス金利政策は導入の半年前から既に意識され始めていたこと、②マイナス金利導入後、追加緩和に対する期待が複数回確認されたこと、③イールドカーブ・コントロール政策導入後は、先行き1～2年程度は市場の金利水準に対する見方が一定の水準に収敛したことが確認された。

キーワード：マイナス金利，イールドカーブ・コントロール，Shifted SABR，Free boundary SABR
JEL classification：E43，E 58，G 12，G 13

I. はじめに

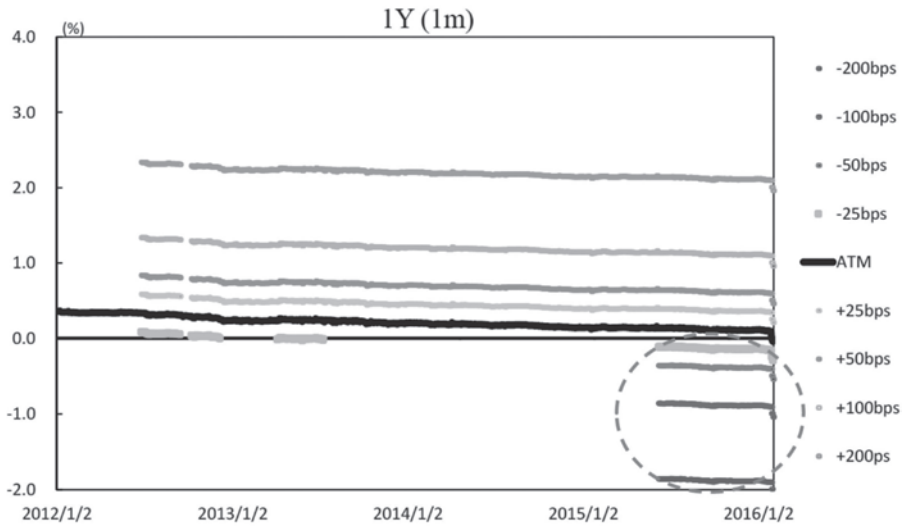
近年、欧州や日本では、中央銀行がマイナス金利政策を導入する中、投資家が予想する金利の将来分布には大きな変化が生じている。実際、日本の金利オプションの市場価格をみると、マイナス金利政策が導入される以前から、マイナス金利を想定したオプションが既に値付けされ始めていた (図1)。

* 日本銀行企画役 (E-mail: kenji.suganuma@boj.or.jp)

** 日本銀行企画役 (E-mail: tetsuya.yamada@boj.or.jp)

本稿は、日本銀行金融研究所ディスカッションペーパーとして公表されたもの。作成に当たっては、Alexandre Antonov 氏 (Numerix 社)、楠岡成雄名誉教授 (東京大学)、森平爽一郎名誉教授 (慶應義塾大学)、沖本竜義准教授 (オーストラリア国立大学)、塚原尚彦氏 (野村證券)、大屋健二郎氏 (野村證券)、水口啓氏 (野村證券)、第45回日本金融・証券計量・工学学会大会、第25回日本ファイナンス学会大会、慶應義塾大学計量経済学ワークショップ、10th Annual Workshop of the BIS Asian Research Networks、日本銀行金融研究所主催ファイナンス・ワークショップの参加者、並びに日本銀行スタッフから有益なコメントを頂いた (肩書はディスカッションペーパー公表時点)。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

図1 スワップション金利に見る市場金利の先行き予想の値付け



(注) 1年スワップを原資産とする満期1か月スワップションのストライク。

こうした動きは、金融実務で用いられるフォワードレート・モデルに大きな影響を与えた。従来のBlackモデル(Black [1976])やSABRモデルでは、金利がマイナスの値を取ることを想定しておらず、非負制約が課されていたため、マイナス金利政策が導入された後は、これらを用いることが困難となった。具体的には、金利オプションの取引に際して、モデルを用いて市場価格をインプライド・ボラティリティに換算するといった、基本的な実務においても変更が必要となり、金融機関にとってはマイナス金利に対応可能なモデル開発が急務となった(Carver [2012], Balland and Quan [2013])。こうしたもとで開発されたモデルには、Shifted SABR(Lee and Wang [2012])や、Free boundary SABR(Antonov, Konikov, and Spector [2015], Kienitz [2015], Le Floc'h and Kennedy [2015])が挙げられる。

また、中央銀行にとっても、金利オプションは金利に対する市場の見方を理解するうえで有益なツールである。オプション価格から原資産価格の将来分布を復元する「インプライド分布」を、Breedon and Litzenberger [1978]が提案して以降、中央銀行では、株や為替、金利に関するインプライド分布の研究が進んでいる(Söderlind and Svensson [1997], 小田・吉羽 [1998], 白塚・中村 [1998]等)。こうしたインプライド分布の研究に際しては、スプライン補間等のノンパラメトリック法がしばしば用いられるが、この手法は、低金利環境では確率がマイナスの値を取る等の問題が生じやすい問題が生じる。このため、最近の研究では、金利が低いものを対象から外し、金利水準が相対的に高い長期金利や、短期金利であっても低金利環境となる以前の期間を分析対象とするものが多い¹⁾。

本稿では、こうしたノンパラメトリック法の問題を回避するために、マイナス金利に対応可能な2つのフォワードレート・モデル(Shifted SABR, Free boundary SABR)を用いて、インプライド分布を推計した。その上で、マイナス金利やイールドカーブ・コントロールといった金融政策変更前後の、

¹⁾ Hull, Sokol, and White [2014], Ivanova and Gutiérrez [2014], Sihvonen and Vähämäa [2014], Hattori, Schrimpf, and Sushuko [2016].

市場金利見通しの変化を確認した。これらのモデルを使うことで、インプライド分布の期間構造、即ち先行きの金利見通しを観測することが可能となるため、投資家が予想するマイナス金利の継続期間や、中央銀行がイールドカーブをコントロールできる期間などの時間軸分析、またマイナス金利の深掘り可能性に対する市場の見方も分析可能となる。

本稿の構成は以下の通りである。II節では、インプライド分布の概念と導出方法について説明したうえで、ノンパラメトリック法の紹介とその低金利環境における限界を述べる。III節では、マイナス金利環境に対応した2つのフォワードレート・モデル (Shifted SABR, Free boundary SABR) を紹介し、その特徴点を示す。IV節では、この2つのモデルを実際の金利オプションのデータにフィットさせ、その当てはまりから両社の長所と短所を比較する。V節では、ケース・スタディとして、マイナス金利やイールドカーブ・コントロールといった、日本銀行の金融政策変更前後における、投資家の予測する金利の将来分布の変化を分析する。VI節は結論である。

II. インプライド分布とノンパラメトリック法

II-1. インプライド分布

オプションの価格は、原資産価格の将来分布を反映して価格付けされている。すなわち、原資産価格の将来分布を $f^Q(x, T)$ とすると、満期を T 、ストライクを K としたコールオプションの価格 $C(K, T)$ は、以下の (1) 式のように、ブラック＝ショールズの公式を用いて算出される。

$$C(K, T) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (x - K)^+ f^Q(x, T) dx \quad (1)$$

逆に、Breedon and Litzenberger [1978] は、様々なストライクに対応するオプション価格 $C(K, T)$ から、インプライド分布と呼ばれる、原資産価格の将来分布 $f^Q(K, T)$ の推計が可能であることを示した。同分布は、(1) 式の両辺をストライク K で2階微分することによって、以下の (2) 式のように求められる。

$$f^Q(K, T) = e^{-rT} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(K, T) \quad (2)$$

ここで、オプション価格を K で2階微分してインプライド分布を推計するためには、相応数のストライクに対応するオプション価格が値付けされている必要があるが、実際の市場ではオプションのストライクは離散的にしか取引されていない。例えば日本のスワップション市場では、データの取得が可能な点は、At the Money (ATM) および、そこから各々 $\pm 25\text{bps}$, $\pm 50\text{bps}$, $\pm 100\text{bps}$, $\pm 200\text{bps}$ 乖離した計9つのみである。したがって、実際のオプションのデータを (2) 式のようにストライクで2階微分するためには、何らかの手法を用いてデータを補間する必要がある。この手法は、ノンパラメトリック法とフォワードレート・モデルの2種類に大別される。

II-2. ノンパラメトリック法とその限界

まず、ノンパラメトリック法について、インプライド分布の推計に多く使われている、スプライン補間を紹介する。この手法は、離散的なストライクにおけるオプションの価格を、3次多項式を繋ぎ合わせた関数 (スプライン関数) で補間した上で、(2) 式を適用する手法である。この手法は、特定のモデルを仮定する必要がなく、手法も単純であることから、インプライド分布の研究にしばしば用いられて来た。

ただし、この方法にはいくつかの問題が存在する。第1に、補間した曲線は元々の離散的な市場価格の全ての点を通るため、実際の市場データに当てはめると、オーバーフィッティングの問題が生じる。その結果、確率が本来取りえない負の値となるケースが起こりうる。こうした問題は、典型的には、ゼロ金利制約の壁が存在する低金利環境において、インプライド・ボラティリティの水準が正と負の領域で極端に異なっている場合に生じる。

第2に、同法は、ストライクの端点を超えて外挿できないという問題がある。したがって、本稿の分析対象である、インプライド分布の期間構造（投資家の金利の先行き見通し）の推計においては、オプションの満期が長い、かなり先の将来におけるインプライド分布が、的確に推計されないという問題が生じる。

Ⅲ. マイナス金利に対応したフォワードレート・モデル

本節では、Ⅱ節で述べたノンパラメトリック法に生じる問題点を補う手法である、フォワードレート・モデルのうち、金融実務において最も標準的な手法として用いられている SABR モデルを概説する。そのうえで、SABR モデルを改良する形で、近年、マイナス金利に対応するべく開発された、Shifted SABR モデルと Free boundary SABR モデルの2つを紹介する。

Ⅲ-1. SABR モデル

金利デリバティブに用いる代表的なフォワードレート・モデルに、Hagan *et al.* [2002] の SABR (Stochastic Alpha Beta Rho) モデルがある。同モデルは、従来の正規モデルと対数正規モデルの中間的な性質を持つほか、ボラティリティを確率変動させることで、モデル精度を高めている。定式化は以下の(3)式となる。

$$\begin{aligned} dF_t &= \sigma_t F_t^\beta dW_t \quad (0 \leq \beta \leq 1) \\ d\sigma_t &= \nu \sigma_t dB_t, \quad \sigma_0 = a, \quad \langle dW_t, dB_t \rangle = \rho dt \end{aligned} \quad (3)$$

F_t は時点に t おける先行きの金利（フォワードレート）の水準、 σ_t はそのボラティリティである。 W_t と B_t は標準ブラウン運動となる。

次に、SABR モデルを形作る4つのパラメータ (a, β, ρ, ν) について説明する。 a は初期時点 ($t = 0$) の金利ボラティリティである。 ν はボラティリティのボラティリティであり、ボラティリティの時間経過における変化や分布の尖度を表す4次モーメントとも関連する。 ρ は上で示した2つのブラウン運動の相関となるが、具体的には金利の水準とボラティリティの相関を表すため、将来分布の歪度と関係する。最後に、 β は0と1の間の値を取り²⁾、モデルが正規モデルと対数正規モデルのいずれに近いかを示す。即ち、SABR モデルは $\beta = 0$ の時には正規モデルとなり、 $\beta = 1$ の時には対数正規モデルとなる。

なお、正規モデルは負の値を取りうるが、対数正規モデルは非負制約がある。したがって、SABR モデルの特徴点として、 β の値が大きく対数正規分布に近い時 ($1/2 \leq \beta \leq 1$) は、金利はマイナスの値を取らないが、 β の値が小さく正規分布に近い時 ($0 \leq \beta \leq 1/2$) は、金利がマイナスの値を取りうる。

²⁾ 通常の SABR モデルにおいては、 $\beta < 0$ の場合、 F_t^β が分数の分母側になり、 F_t がゼロに近づくと発散してしまうため、 $\beta \geq 0$ と仮定している。また、 $\beta > 1$ の場合は、マルチンゲール性が成立せず、裁定取引が発生しうることが数学的に知られているため、 $\beta \leq 1$ と仮定している。したがって、 $0 \leq \beta \leq 1$ となる。

ただし、(3)式に示されるように、 F_t^β というべき乗の関数式が含まれるため、モデル上は金利がマイナスの値を取ることが許容されない。したがって、境界条件を用いて強制的に金利水準を正に引き上げる必要がある。

主な境界条件には、吸収壁と反射壁がある。吸収壁では、金利のパスがゼロとなった場合に、以降の値はずっとゼロの値を取り続ける。一方反射壁では、ゼロ線を軸にして金利パスを反射させ、パスを正の領域に戻す。一般的に、SABRモデルでは吸収壁が用いられることが多い。

SABRモデルは正規分布と対数正規分布の双方の特徴を兼ね備えた、非常に便利なモデルではあるが、このモデル自体はマイナス金利に対応したものではない。したがって最近では、Shifted SABRやFree boundary SABRといった、SABRモデルを改良して、マイナス金利下で確率分布の取扱いを可能にしたモデルが開発されている。

III - 2. Shifted SABRモデル

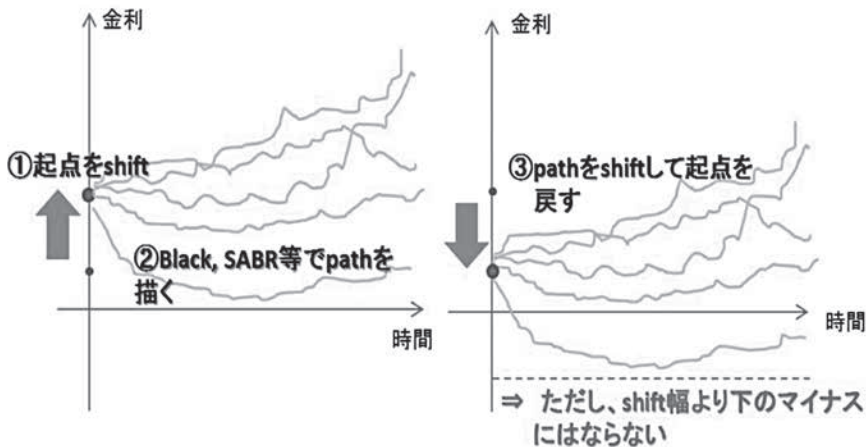
Shifted SABRモデルは、SABRモデルの金利 F_t を、 F_t+s (s はシフト幅)に置き換えたモデルである。

$$\begin{aligned} d(F_t+s) &= \sigma_t(F_t+s)^\beta dW_t \quad (0 \leq \beta \leq 1) \\ d\sigma_t &= \nu\sigma_t dB_t, \quad \sigma_0 = a, \quad \langle dW_t, dB_t \rangle = \rho dt \end{aligned} \tag{4}$$

Shifted SABRの金利パスは、図2で示される。まず、金利パスの出発点であるフォワードレートの初期値をシフト幅 s だけ上方シフトさせる(F_0+s)。次に、この点から通常のSABRモデルに従って金利の将来パスを描くが、この際、出発点を持ち上げているため、金利パスは負の値を取らなくなる。最後に、生成した金利パスをシフト幅($-s$)だけ下方シフトさせ、元の水準 F_0 を出発点とした金利の将来パスが完成する。最後に下方シフトさせることで、モデルの金利パスは負の値を取るが、これらのパスの下限はシフト幅($-s$)となる。

Shifted SABRの長所は、既存のSABRモデルと殆ど式が同じなため、キャリブレーション(市場データを用いたパラメータ推計)における数学的手法が、従来のSABRモデルを微修正するだけで転用が

図2 Shifted SABR



可能な点である。短所は、分布を適切に表現するためには、マイナス幅の下限となるシフト幅を、各時点で適確に選択する必要がある。ただし、シフト幅を変更すると推計されるパラメータの値も変わるため、実務上の観点からは非効率となる。また、シフト幅を大きく取れば、シフト後の金利パスにおける下限問題は緩和されるが、パスの起点が原点から乖離することで、モデルの推計精度が低下する問題が生じる。

Ⅲ - 3. Free boundary SABR モデル

次に示す、Free boundary SABR モデルは、SABR モデルにおいて、パラメータ β が小さい ($0 \leq \beta \leq 1/2$) の時に金利が負の値を取る性質を利用したものである。通常の SABR モデルを用いた場合には、この領域において、 F_t^β が複素数にならないように境界条件を設ける必要があったが、Free boundary SABR は (5) 式のように、 F_t^β を $|F_t|^\beta$ に置き換えることで、この問題の解決を図っている。

$$\begin{aligned} dF_t &= \sigma_t |F_t|^\beta dW_t \quad (0 \leq \beta \leq 1) \\ d\sigma_t &= v\sigma_t dB_t, \quad \sigma_0 = a, \quad \langle dW_t, dB_t \rangle = \rho dt \end{aligned} \tag{5}$$

絶対値を付すことによって、SABR モデルでは水準ゼロで反射壁を用いて正の領域に反射されていた金利パスが、同水準を軸として負の領域に対称に折り返されるため、金利水準が負の値を取ることが可能となる (図3)。Free boundary SABR の長所は、Shifted SABR のように最適シフト幅を決める必要がないため、いかなる状況下でも、同じモデルを適用することが可能な点である。短所は、絶対値を付けることで、関数の数学的な扱いは難しくなり、また確率密度も原点周辺の一部でスパイクすることがある。

図4では、パラメータ β が 0.1 ないし 0.4 の Free boundary SABR における、金利パスの動きを比較する。 $\beta = 0.1$ の時は、金利パスはゼロ金利の壁を越えて負の領域へ自由に入って行くものの、 $\beta = 0.4$ の時も、金利のパスは負の領域へ入った後、深くは入り込まずゼロ近傍に留まる。なお、 $\beta \geq 0.5$ の場合、金利パスはそもそも負の値を取らないので、通常の SABR モデルと同様の形状となる。

図3 Free Boundary SABR

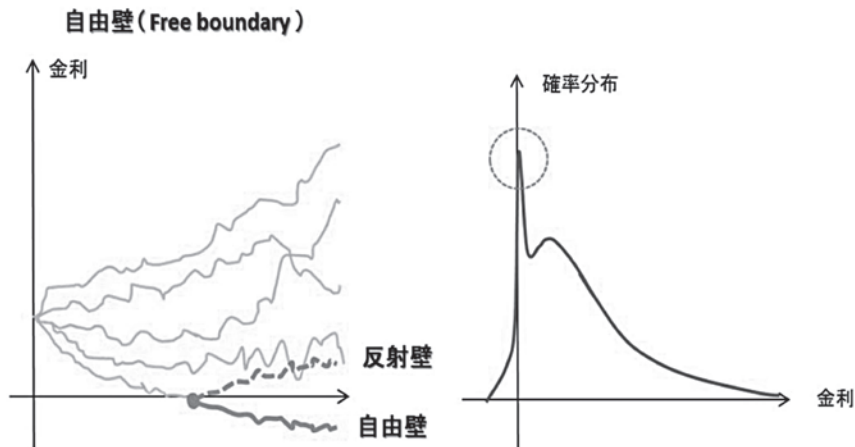
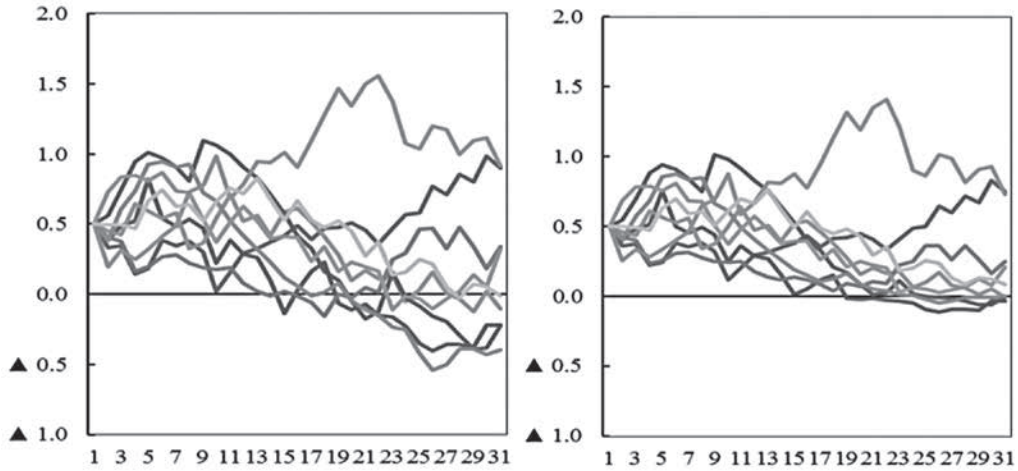


図4 Free Boundary SABR のシミュレーション

(1) $\beta = 0.1$ (正規分布に近い)

(2) $\beta = 0.4$ (対数正規分布に近い)



IV. 実証分析—キャリブレーション—

本節では、Ⅲ節で紹介した2つのフォワードレート・モデル (Shifted SABR, Free boundary SABR) を、実際の市場データにフィットさせ、その適合性と特徴を比較する。特に、マイナス金利政策の導入前後で、金利の先行きに対する市場の見方は大きく変化したため、前後の局面でモデルの適合性がどのように変化したか、2時点比較を行う。なお、キャリブレーションを行う際には、それぞれの日のオプション価格のみを参照し、他の日付のデータの影響を受けないため、以降の実証結果については遡及改正されることがないことを付言しておく。

IV-1. 市場データ

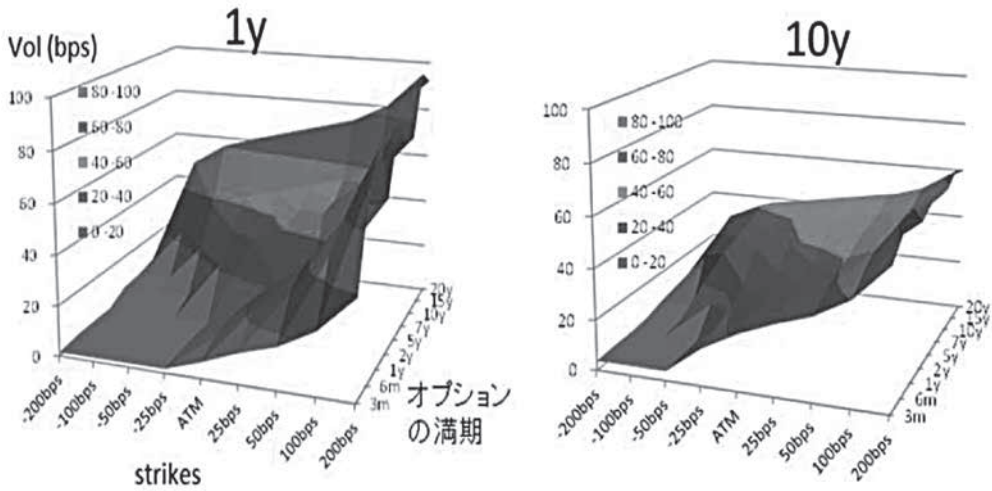
本稿では、Ⅱ節で述べたように、Bloomberg社が提供する、日本におけるスワップション (スワップ金利を原資産としたオプション) のデータを分析に用いる。具体的には、原資産としてのスワップ金利7つ (1年, 2年, 3年, 5年, 7年, 10年, 20年), ストライク9つ (ATM, ATM±25bps, ATM±50bps, ATM±100bps, ATM±200bps), オプションの満期9つ (3か月, 6か月, 1年, 2年, 5年, 7年, 10年, 15年, 20年) を3つの軸とし、それぞれの軸に対応するインプライド・ボラティリティを、2015年1月以降の日次データで使用する。

図5は、市場データのインプライド・ボラティリティを示したものである。このように、ストライクとオプションの満期の組み合わせごとに、ボラティリティの水準が面状に表示されていることから、ボラティリティ・サーフェイスと呼ばれる。こうしたサーフェイスを、原資産であるスワップ金利の年限ごとに描くことができる。

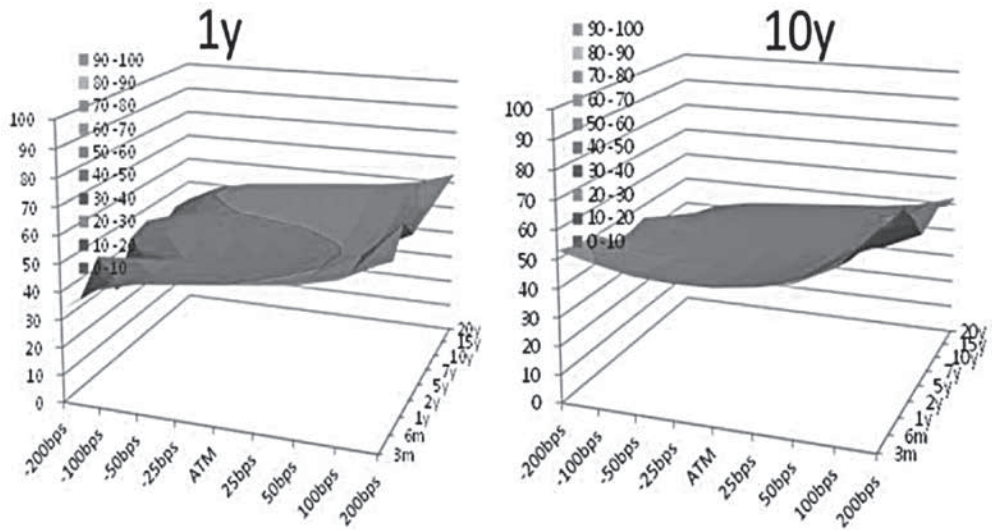
マイナス金利導入直前 (2016年1月28日) におけるボラティリティ・サーフェイスをみると、当時はマイナス金利のストライクに対応するボラティリティが極めて低かったことが確認される。これが意味することは、仮に金利パスが負の領域に入った場合でも、ボラティリティが低いために金利水準が殆ど動かず、より深い負の領域に入らないという、いわゆるゼロ金利制約の壁が存在していたことと解釈

図5 市場データ：スワップションのインプライド・ボラティリティ

(1) マイナス金利導入前（1月28日）



(2) マイナス金利導入後（2月22日）



できる。一方、マイナス金利導入の後（同年2月22日）では、全ての満期とストライクにおいて、ボラティリティ水準がフラットになっており、政策変更によってゼロ金利制約の壁が取り払われている。

IV-2. キャリブレーション手法

SABRモデルのキャリブレーションは、以下のボラティリティ公式（6）を用いる。現在の金利水準 f 、ストライク K 、満期 T をインプットすると、インプライド・ボラティリティ $\sigma_N(f, K, T)$ が算出され、ボラティリティ・サーフェイスが理論的に表される。また、この公式には、SABRモデルのパラメータ (a, β, ρ, ν) も含まれるため、これを変化させ、IV-1で示した、実際の市場データにおけるボラティ

リティ・サーフェイスにフィットするようなパラメータの組み合わせを、最小二乗誤差法によって求める (キャリブレーション)³⁾。

$$\sigma_N(f, K, T) = \frac{a}{\int_K^f C(g)^{-1} dg} \left[\frac{z}{\chi(z)} \right] \left[1 + \left(Ga^2 + \frac{\rho va}{4} \frac{C(f) - C(K)}{f - K} + \frac{2 - 3\rho^2}{24} v^2 \right) T \right]$$

(6)

ただし, $C(g) = g^\beta$

Shifted SABR モデルのボラティリティ公式は, (6) 式におけるストライク K と金利の初期値 f を, (7) 式のように f_s 分だけシフトさせることで簡単に求められる。一方, Free boundary SABR モデルのボラティリティ公式は, 以下の (8) 式で与えられる⁴⁾。

$$\sigma_{N,S}(f, K, T) = \sigma_N(f + f_s, K + f_s, T)$$

(7)

$$\sigma_{N,FB}(f, K, T) = \frac{a}{\int_K^f C(g)^{-1} dg} \left[\frac{z}{\chi(z)} \right] \left[1 + \left(Ga^2 + \frac{\rho va}{4} \frac{C(f) - C(K)}{f - K} + \frac{2 - 3\rho^2}{24} v^2 \right) T \right]$$

(8)

ただし, $C(g) = |g|^\beta$

(8) 式は, 積分式に絶対値が含まれるため, 場合分けを必要とする関数となるが, 根本的には SABR モデルのボラティリティ公式と形が似ている。同式は, Kienitz [2015] や Le Floc'h and Kennedy [2015] が提示したもので, 通常の SABR モデルとはほぼ同じ手順でキャリブレーションを行うことが可能になっている。

以降では, マイナス金利政策導入前 (2016 年 1 月 28 日) と導入後 (同年 2 月 22 日) の 2 時点における, これらの手法を用いたキャリブレーションを行う。

IV-3. キャリブレーション結果① (マイナス金利導入前)

図 6 は, マイナス金利政策導入直前 (2016 年 1 月 28 日) におけるキャリブレーション結果である。図 5 の市場データと比較すると, まず 1 年金利では, Free boundary SABR のボラティリティ・サーフェイスは, 市場データと形状が近く, 当てはまりが良いことが示唆される。一方 Shifted SABR は, 必ずしもボラティリティ・サーフェイスの形状を的確に表しているとは言えない。特に, 短い満期 (3 か月 ~ 2 年程度) におけるマイナスのストライクの分布を, うまく描くことができていない。ただし, 満期の長い 10 年金利では, Free boundary SABR, Shifted SABR いずれも当てはまりは良い。

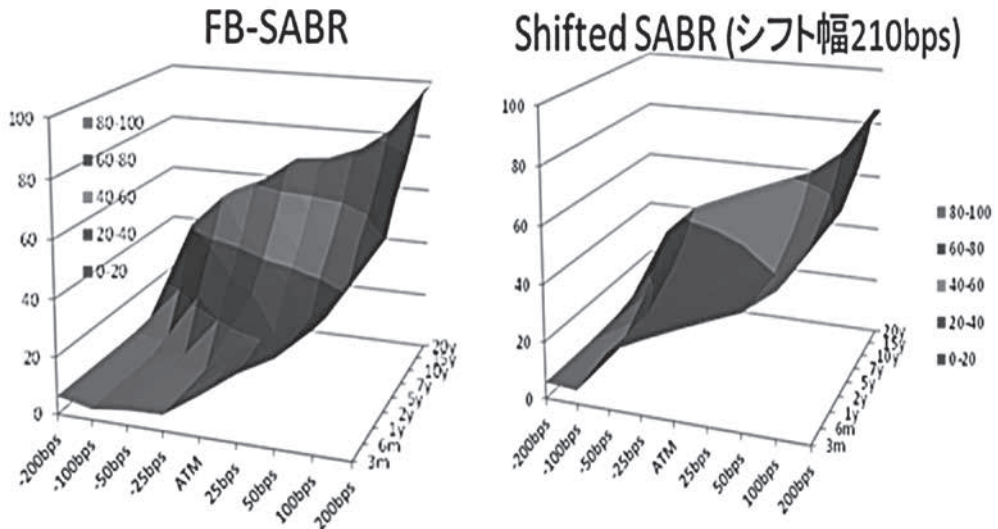
金利年限別に 1 グリッドあたりの推計誤差をとると, マイナス金利導入前のゼロ金利制約の壁があった時点では, ①特に短期金利では, Free boundary SABR の方が Shifted SABR に比べて市場データに対するフィットが高い, ②ゼロ金利制約の弱い長期金利では, Shifted SABR のフィットも改善する,

3) 実務上は, ストライク方向と満期方向の各々の満期ごとに, ストライク方向を補間して精度を高めることも多いが, そうした方法は相対的に流動性の問題を受けやすいため, 本研究では, 両方向に同時推計している。

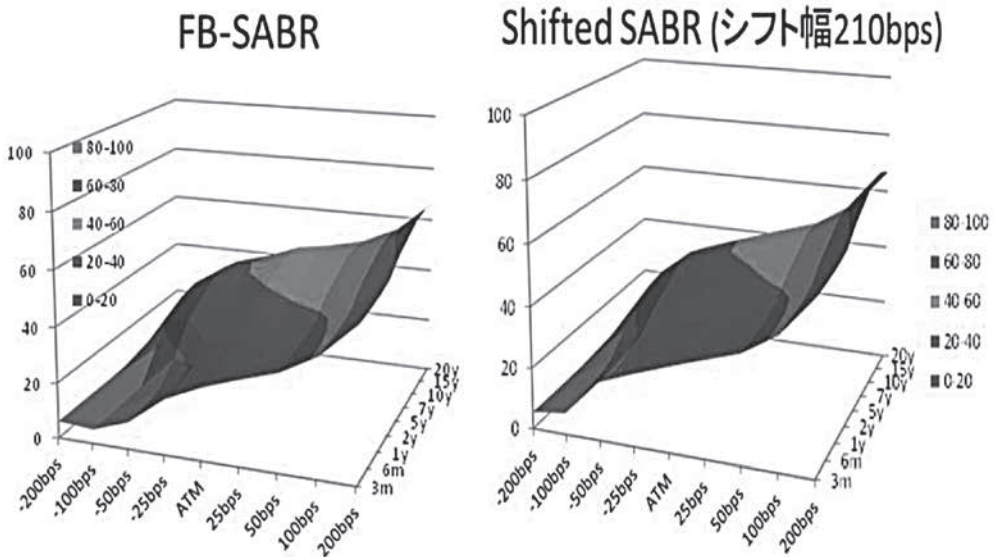
4) ただし, $f < 0$ の場合は, $-f \rightarrow f$, $-K \rightarrow K$, $-v \rightarrow v$ と置き換える。

図6 キャリブレーション結果 (マイナス金利導入前<1月28日>)

(1) 1年金利



(2) 10年金利

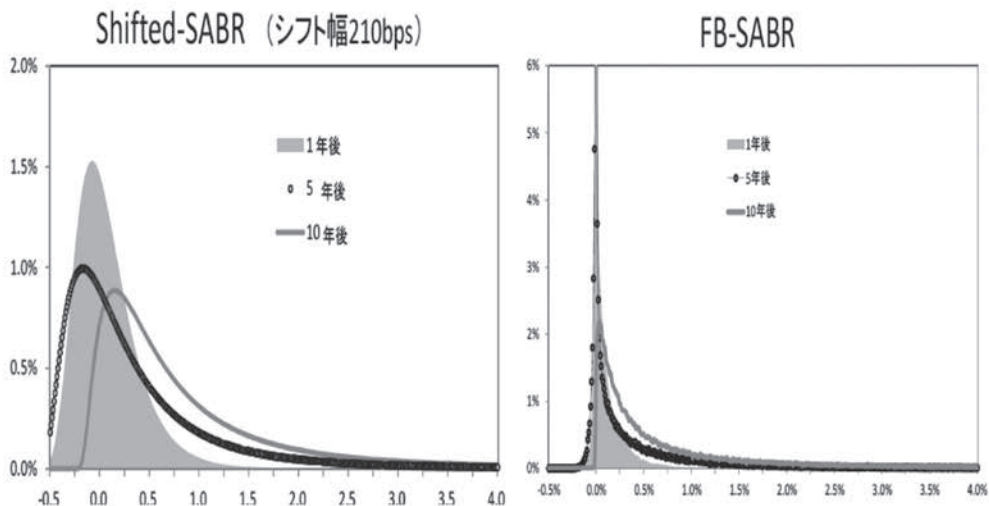


③ Shifted SABR のシフト幅は小さいほどフィットが良い, ことが示された.

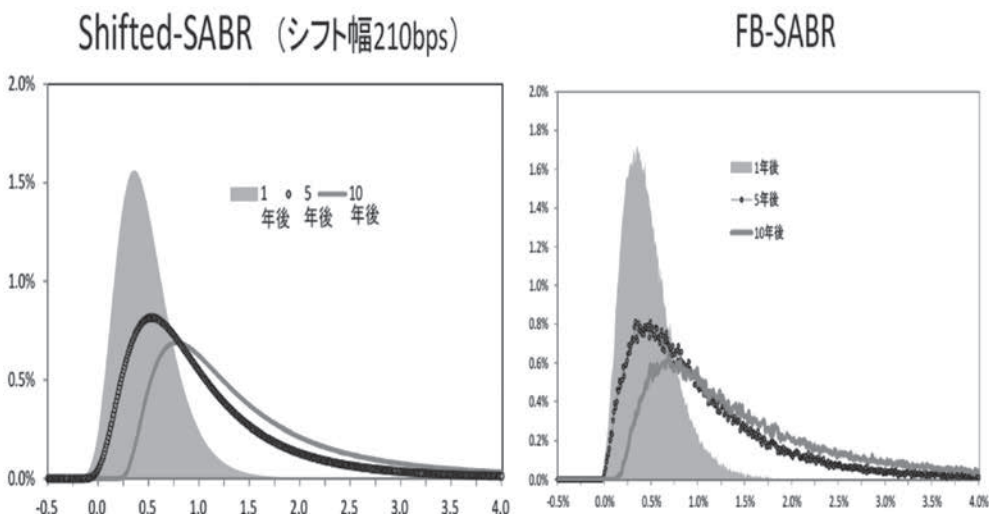
図7は、各モデルから推計されたインプライド分布を示したものである。Shifted SABR, Free boundary SABR いずれも、全ての点で確率が非負となっており、ノンパラメトリック法と比べて、分布の形状が改善している。ただし、ゼロ金利制約の壁は、Free boundary SABR の方が Shifted SABR よりも上手く表すことができている、これが推計誤差の違いを生んでいると考えられる。一方、ゼロ金利制約から水準が遠い中長期の金利では、Shifted SABR でも同様の分布が描けている。

図7 インプライド分布の推計結果（マイナス金利導入前<1月28日>）

(1) 1年金利



(2) 10年金利



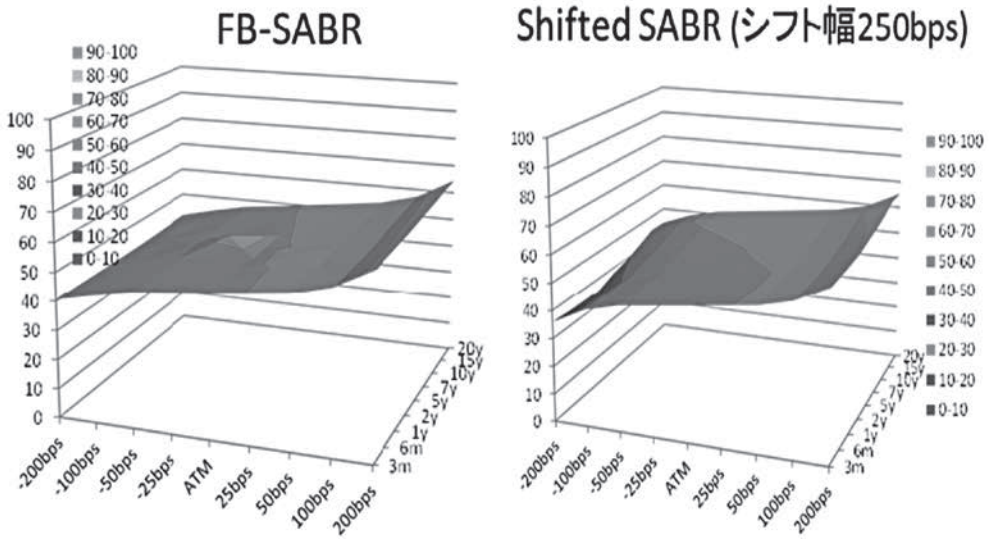
IV-4. キャリブレーション結果②（マイナス金利導入後）

次に、図8は、マイナス金利政策導入後（2016年2月22日）におけるキャリブレーションの結果である。市場金利のボラティリティ・サーフェイスは、IV-1節でみたように、ゼロ金利制約の壁が解消されたフラットなものとなっているが、これを、フォワードレート・モデルで表した場合には、Shifted SABR、Free boundary SABR のいずれも、短期金利、長期金利によらず当てはまりが良いことがみてとれる。キャリブレーションの推計誤差も、いずれのモデルもマイナス金利政策導入以前と比べ、誤差の水準は等しく低い。

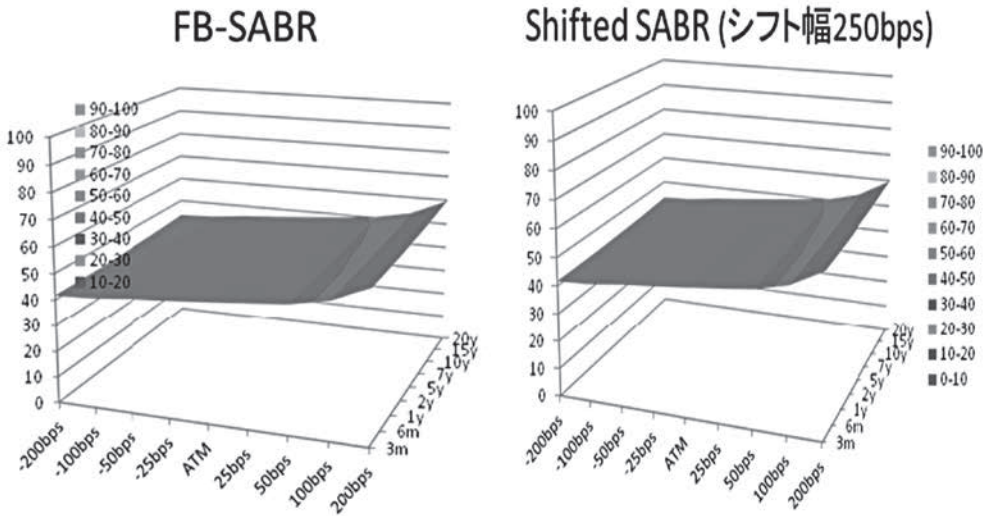
分布の形状を表すパラメータ β の推計値も、いずれのモデルでも 0 に近い値となっており、分布がマイナス金利を取りうる正規分布に近い形状へシフトしたことが窺われる。図9のインプライド分布をみ

図8 キャリブレーション結果 (マイナス金利導入後<2月22日>)

(1) 1年金利



(2) 10年金利



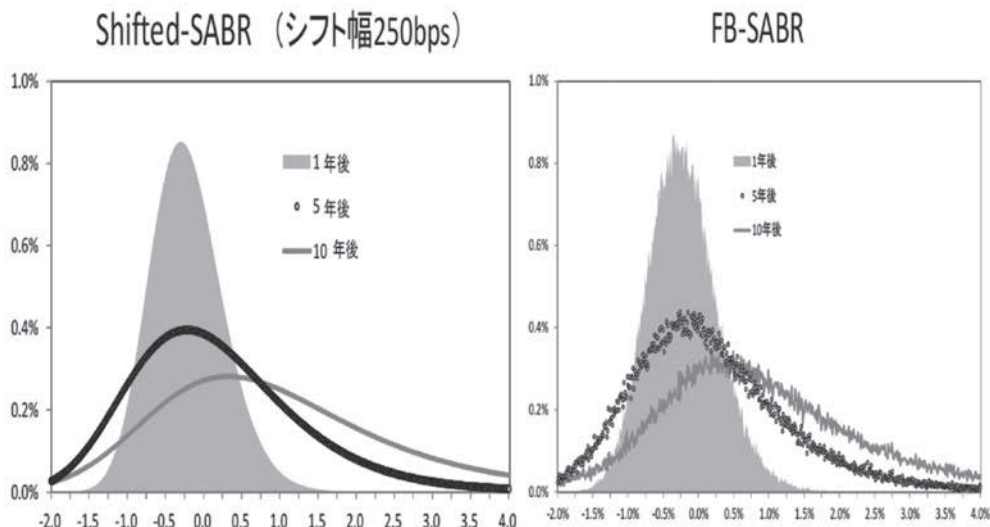
ても, Shifted SABR, Free boundary SABR のいずれも, 確率分布が的確な形で描けており, マイナス金利政策導入後, 市場の金利予想がマイナスへと拡大した様子を捉えられている. また, ノンパラメトリック法と比較しても, オプション取引のない部分まで含め, 外挿が自然な形でできている.

IV-5. キャリブレーション結果の頑健性

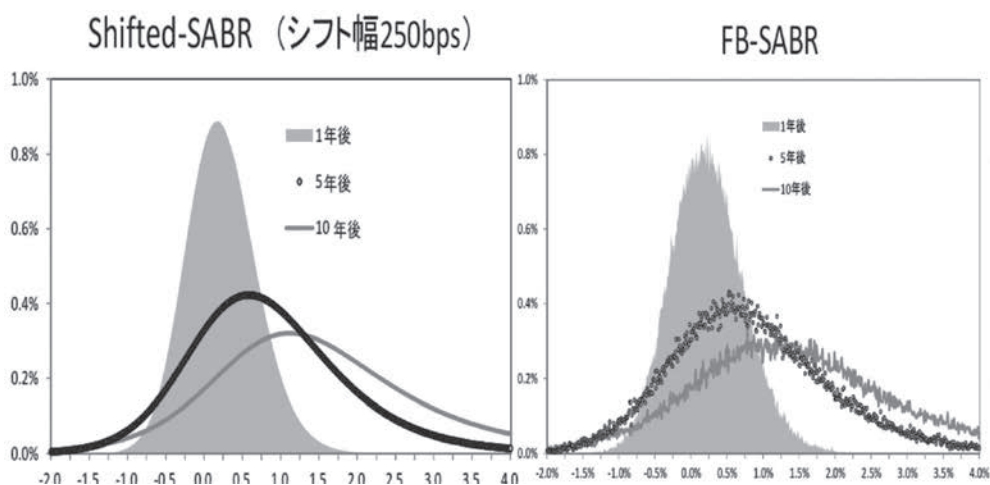
最後に, これらの結果の頑健性の確認として, 2つの SABR モデルの推計誤差を時系列で比較する. 図10は, 金利の年限ごと(1年, 10年)に, 2つのモデルの推計誤差の推移を確認したものである.

図9 インプライド分布の推計結果（マイナス金利導入後< 2月 22 日>）

(1) 1年金利



(2) 10年金利

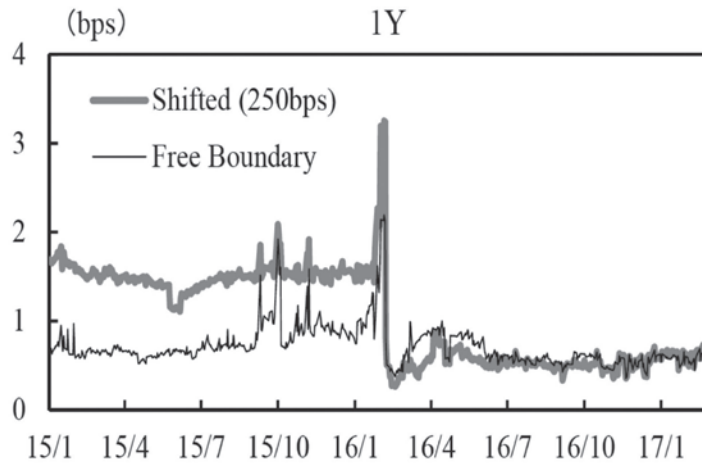


短期金利では、マイナス金利政策導入以前では、Free boundary SABRの方が誤差が小さく当てはまりが良かったが、導入後はShifted SABRでもフィットが良くなっている。一方長期金利では、マイナス金利政策導入前における両者の差は小さく、また導入後はほぼ同水準となっている。これらの結果は、2時点比較の結果と整合的であり、上述の結果は観測期間を通じて頑健であることが確認された。

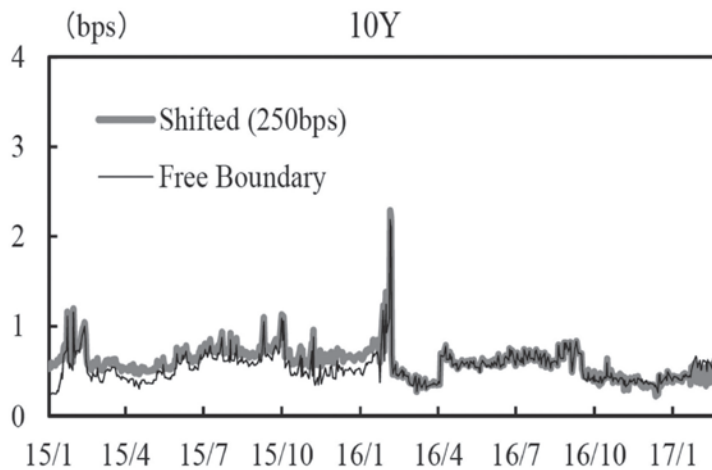
いずれのモデルとも、市場データに対して相応のフィットが確認され、特にFree boundary SABRモデルは、マイナス金利政策の導入前、導入後いずれも対応可能なことから、金利水準が様々に変化している時系列分析においても有効であると考えられる。以降では、Free boundary SABRモデルを用いて、市場が予想する金利分布の変化を確認する。

図10 推計誤差の比較（時系列）

(1) 1年金利



(2) 10年金利



V. ケース・スタディ

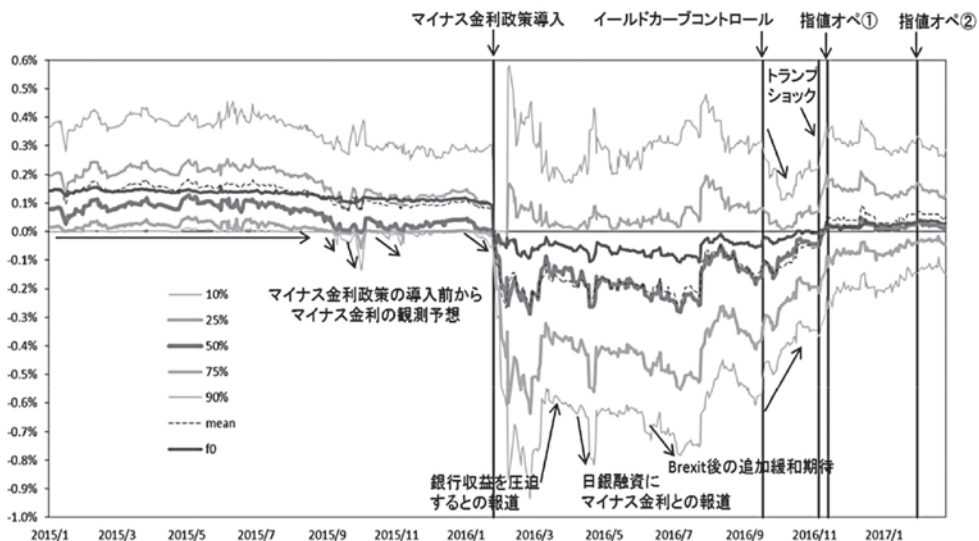
ケース・スタディとして、日本銀行の2016年の金融政策の変更（マイナス金利政策，イールドカーブ・コントロール）の前後における，市場金利の将来分布の変化を分析する．政策金利に近い短期金利（1年金利）を中心としつつ，イールドカーブ・コントロール後は，10年金利などより長い年限の金利も分析対象に加えている．

V-1. 概観：インプライド分布の推移

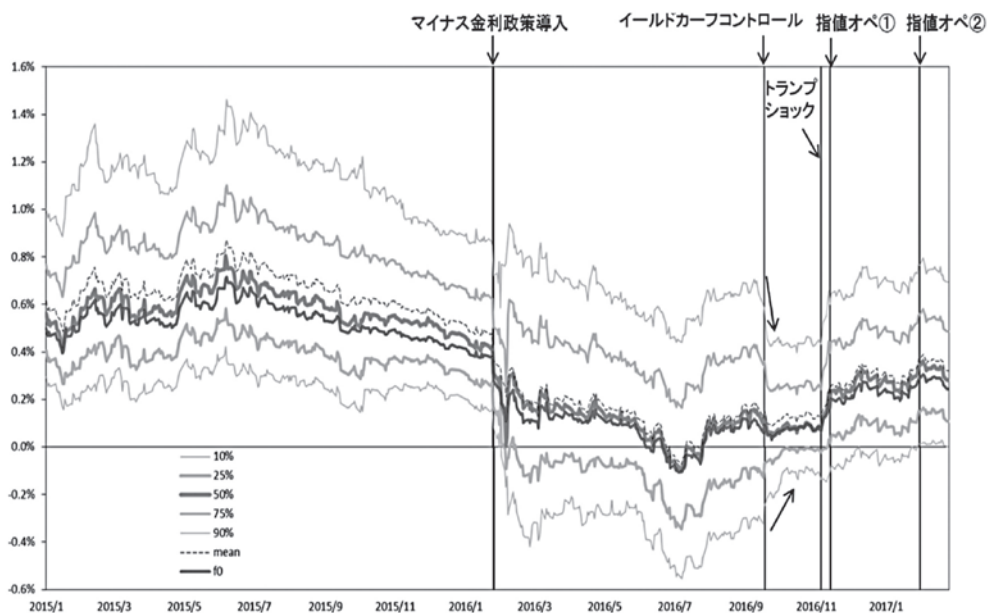
まず，1年金利の1年後のインプライド分布の変化を概観する．図11(1)は，現時点の金利水準 (f_0)，1年後のインプライド分布の分位点（10%，25%，50%，75%，90%点），および期待値の推移を示したものである．これをみると，マイナス金利政策導入（2016年1月29日）のおよそ半年前頃（2015年

図 11 インプライド分布の推移

(1) 1年金利（1年後）



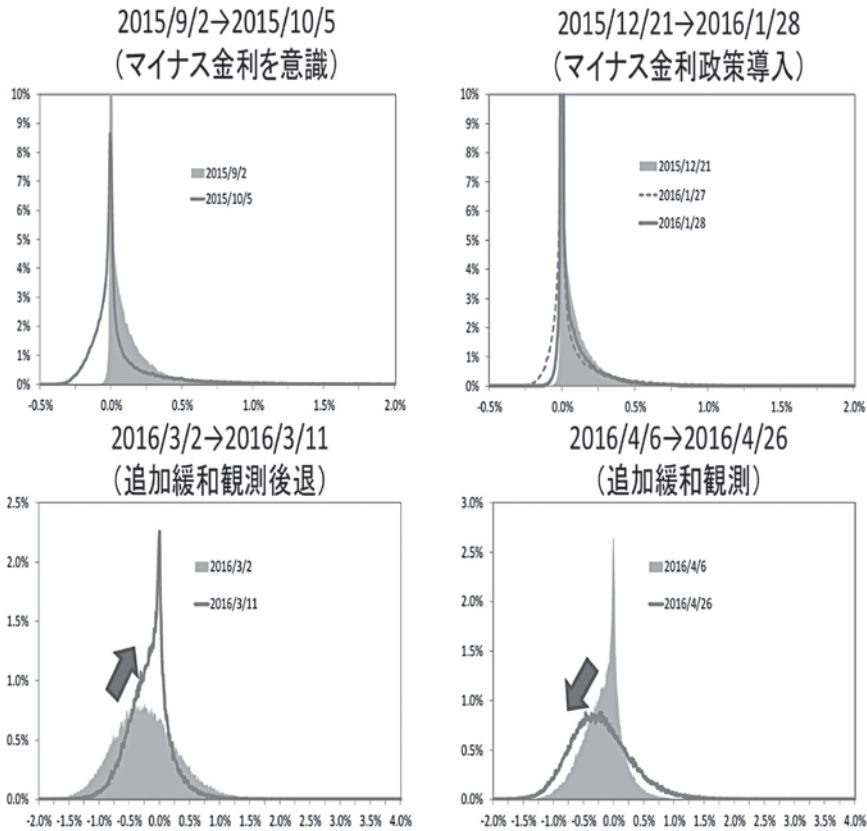
(2) 10年金利（1年後）



9月) から、分布の75%点、90%点がマイナスの値を取るなど、市場参加者にマイナス金利政策が徐々に意識されていたことが確認される。

マイナス金利政策の導入後は、追加緩和（マイナス金利の深掘り）が次の焦点となった。①2016年3月には、マイナス金利が銀行収益を圧迫すると批判が高まり、深掘り予想が一旦後退したが、②2016年4月後半には、日銀の成長基盤融資にマイナス金利を適用するとの観測から、追加緩和期待が

図 12 インプライド分布の変化：1 年金利（1 年後）



高まった。また、③ 2016 年 7 月にも、英国の EU 離脱に対する国民投票（同年 6 月 23 日）の結果を受けて、追加緩和期待が高まったことが確認される。

さらに、2016 年 9 月のイールドカーブ・コントロール政策の導入直後は、インプライド分布が閉じている。マイナス金利政策導入後の、先行きの金利に対する見方が分かれていた時期と比較すると、金利見通しが収斂している様子が確認される。この収斂は、マイナス金利政策導入以前の「ゼロ金利制約の壁」が働いていた時期と比較しても強い。

図 11（2）の 10 年金利のインプライド分布（1 年後）をみると、マイナス金利政策導入後に広がった分布が、イールドカーブ・コントロール導入後は閉じており、先行きの長期金利に対する見方が収斂したことが確認される。図 12 で、これらのイベント前後におけるインプライド分布の形状変化をみると、追加緩和期待が高まる時点では、分布が左方（マイナス方向）にシフトしていることが見てとれる。

次に、2 年後、3 年後といった、より将来の時間軸におけるインプライド分布の変化を対象に、インプライド分布の期間構造（投資家の先行きの金利見通し）を分析する。

V - 2. マイナス金利政策の導入

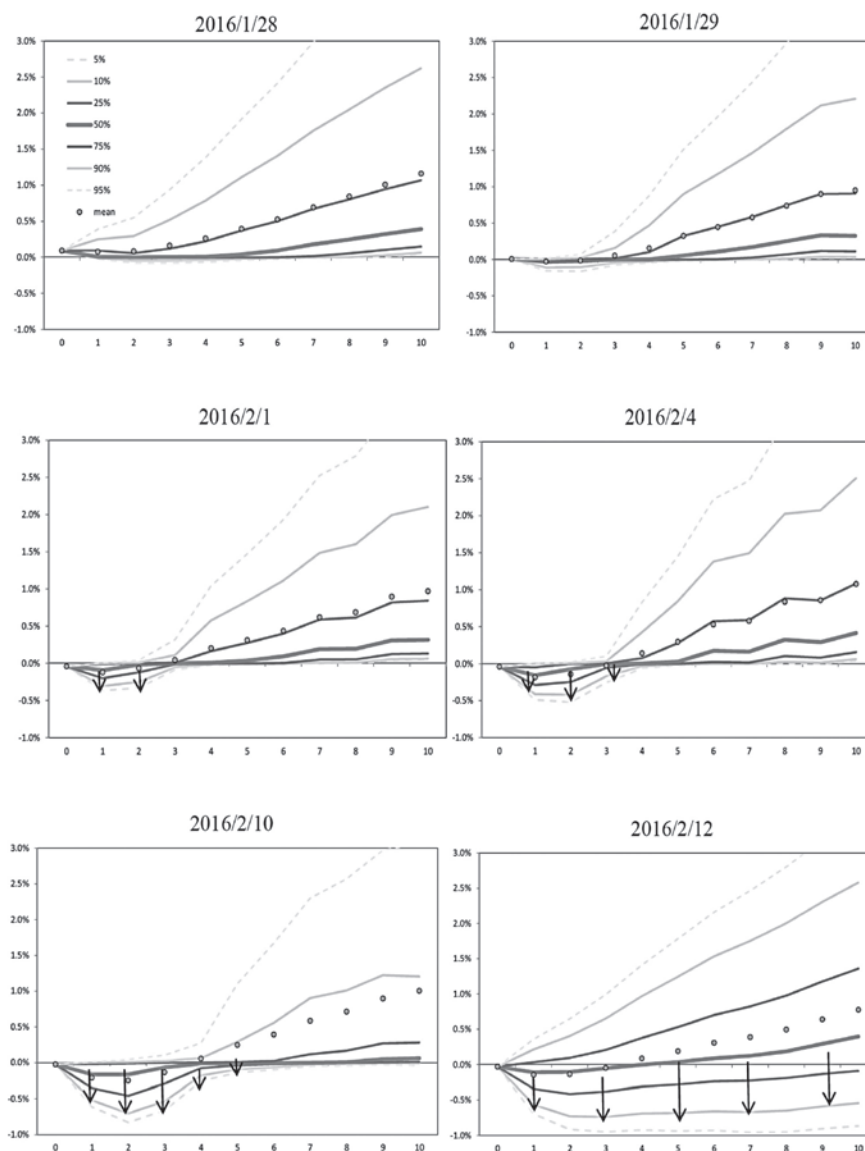
図 13 は、マイナス金利政策の導入後（2016 年 1 月下旬～2 月中旬）における、投資家の金利見通しの変化を示したものである。1 年金利の 1～10 年後までのインプライド分布を、ファンチャート形式（分

位点< 5%, 10%, 25%, 50%, 75%, 90%, 95% >) で示している。

マイナス金利政策導入前日（2016年1月28日）には、マイナス金利は若干意識されていた程度だったが、導入当日（1月29日）～翌営業日（2月1日）にかけて、先行き2～3年後まではマイナス金利が継続する予想が形成されたことが確認される。ただしこの時点では、3～4年以降はゼロ金利制約が引き続き存在していたことが窺われる。その後、2月入り後は（2月4日～2月10日）、ゼロ金利制約の壁は中期においても徐々に弱まっていったことが確認される。

次に、図14は、追加緩和期待が高まった2時点（2016年4月27日、2016年7月11日）における、マイナス金利の深掘りに関する市場の見方を確認している。中心的な見方である25%～75%分位点の

図13 マイナス金利政策導入後の金利見通しの変化：1年金利



先行きの金利見通しは、概ね▲0.5%以上に止まっており、当時市場で意識されていたマイナス金利の下限(▲0.5%～▲2.0%)までは達しないとみられていたことが確認できる。

V-3. イールドカーブ・コントロール政策の導入

図15は、イールドカーブ・コントロール政策導入前後(導入前:2016年9月16日,導入後:同年10月17日)における、市場の金利見通しの変化を確認している。同政策が導入された後では、将来にわたって全体的に分布の幅が閉じており、特に、先行き1~2年の分布が閉じている。すなわち、同政

図14 追加緩和観測:1年金利

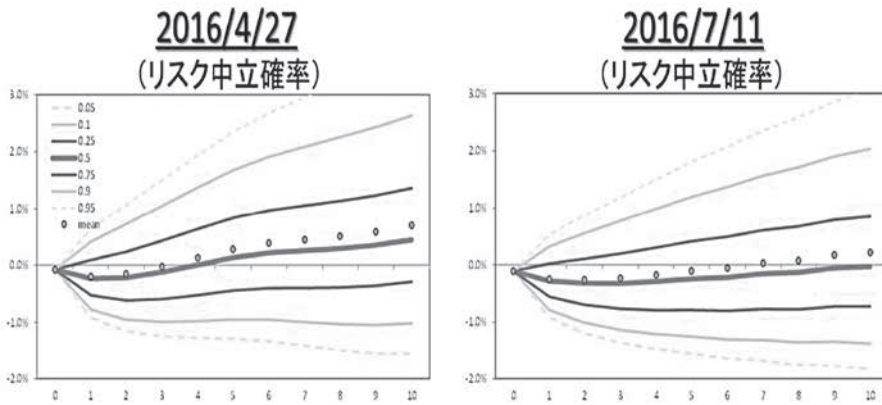
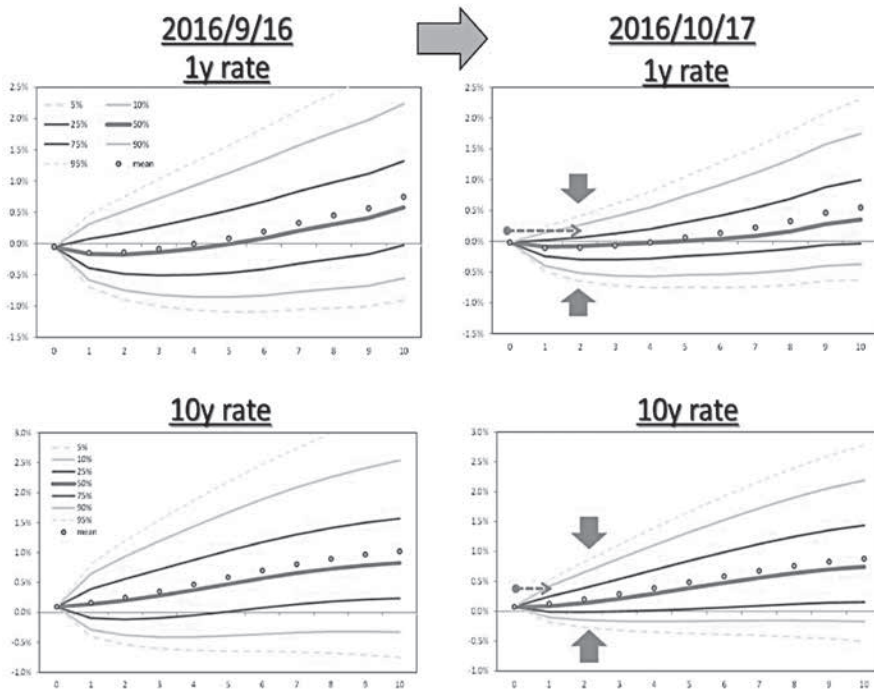


図15 イールドカーブ・コントロール導入後の金利見通しの変化



策の導入によって、より長期のゾーンは不透明だが、少なくとも先行き1～2年については、中央銀行が金利をコントロールできるとの見方がなされたことが見て取れる。加えて、分布の中央値も、先行き数年間はあまり動いておらず、こうした見方が裏付けられる。ただし、長期金利ほど、先行きのコントロールが相対的に難しいと見られていることが窺える。

図16は、各年限の中央値を用いて、イールドカーブの先行きの見通しを示している。イールドカーブ・コントロール政策導入後の2016年10月17日では、先行き1～2年は現在のイールドの形状が維持されるという姿となっている。マイナス金利政策下において追加緩和観測の高まった時期（2016年7月11日）と比較すると、イールドカーブの水準が押し上げられており、同政策の導入後、金融機関の取

図16 先行きのイールドカーブ（インプライド分布の中央値）

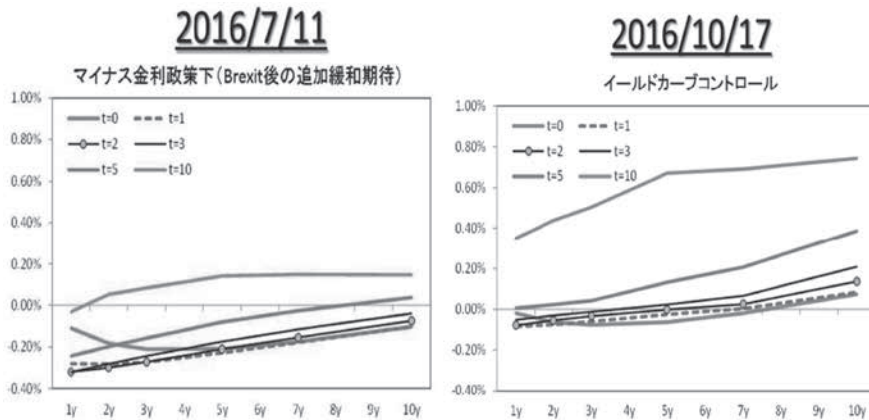
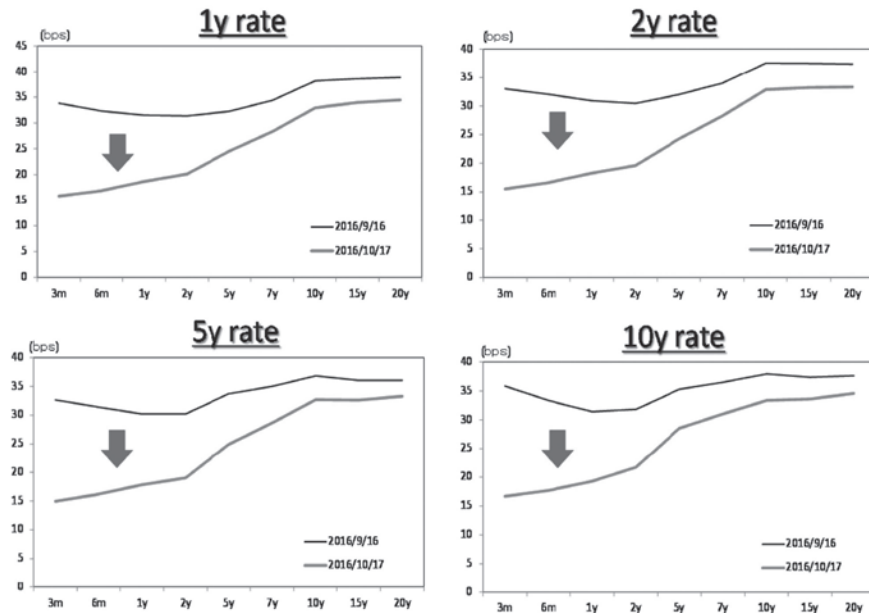


図17 イールドカーブ・コントロール政策導入後のボラティリティの期間構造



(注) スワップションの ATM ボラティリティ

益環境が改善に向かったことが確認できる。

また、図17では、イールドカーブ・コントロール政策の導入後、特に先行き1～2年のインプライド分布が閉じた背景について、市場データから確認している。スワップションのATMのインプライド・ボラティリティを、オプションの満期別にみると、いずれの年限とも、短期のボラティリティが相対的に大きく低下している一方、長期のボラティリティの低下は小幅となっている。

VI. おわりに

本研究は、近年金融実務や中央銀行の間で注目を集めている「マイナス金利を考慮したフォワードレート・モデル」を紹介し、その特徴を整理した。その上で、わが国で初めて、実際の金利オプションのデータにフィットさせて、マイナス金利政策およびイールドカーブ・コントロール政策下において市場が予測する金利の将来分布を推計した。

本稿で得られた主要な結論は以下のとおり。まず、近年開発されたフォワードレート・モデル (Shifted SABR モデル, Free boundary SABR モデル) は、いずれもマイナス金利環境下で相応の当てはまりの良さがみられ、特に、Free boundary SABR モデルは、ゼロ金利制約の壁が存在した場合も高い説明力が示され、時系列分析に有効であることが確認された。

次に、Free boundary SABR モデルを用いて、マイナス金利政策とイールドカーブ・コントロール政策における市場の将来金利に対する予想分布を分析し、以下の点を確認した。

第1に、マイナス金利政策については、政策導入の半年前から、市場では既に少しずつ意識されていた。また、導入後は、市場で緩和観測 (深掘り) が意識された時には、分布にも変化がみられた。第2に、マイナス金利政策導入直後を仔細にみると、まず先行き2～3年のゾーンでゼロ金利制約が解消し、その後徐々に長期のゾーンに波及していく様子が観測された。第3に、イールドカーブ・コントロール政策導入後は、先行き1～2年程度における金利見通しが収斂することが確認され、中央銀行が先行き一定期間は、イールドカーブをコントロールする可能性があるとの期待形成が観測された。

今後の課題は以下のとおり。第1に、日本のスワップション市場は、満期やストライクや観測時期によっては、必ずしも流動性が高くない場合もある。本研究では、複数業者の値付けから平均的に算出したインデックスをデータに用いているほか、キャリブレーションにおいても、ストライク方向と満期方向を同時に行い、流動性の問題の回避に努めている。今後はこれらに加えて、West [2005] が示した、流動性の低い市場に対する SABR モデルのキャリブレーション方法を応用することが考えられる。

第2に、SABR モデルに平均回帰性のパラメータを取り入れて、平均回帰していく速度を推計し、金融政策に対する市場参加者の見方を把握することが挙げられる。キャリブレーションの公式が極めて複雑となるが、Henry-Labordère [2005] が提案した λ -SABR モデルを応用することが期待される。

[参考文献]

- 小田信之・吉羽要直, 「デリバティブ商品価格から導出可能な市場情報を利用したマーケット分析方法」, 『金融研究』第17巻第2号, 日本銀行金融研究所, 1998年, 1～34頁
白塚重典・中村恒, 「金融市場における期待形成の変化—オプション取引価格の情報変数としての有用性に関する一考察—」, 『金融研究』第17巻第4号, 日本銀行金融研究所, 1998年, 129～172頁
Antonov, A., M. Konikov, and M. Spector, "The Free Boundary SABR: Natural Extension to Negative Rates," *Risk*

- Magazine*, 28(9), 2015, pp.68-73.
- Balland, P., and T. Quan, "SABR Goes Normal," *Risk magazine*, 26(6), 2013, pp.72-77.
- Black, F., "The Pricing of Commodity Contracts," *Journal of Financial Economics*, 3(1-2), 1976, pp.167-179.
- Breeden, D. T., and R. H. Litzenberger, "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices," *Journal of Business*, 51(4), 1978, pp.621-651.
- Carver, L., "Going Negative," *Risk Magazine*, 25(11), 2012, pp.22-24.
- Hagan, P. S., D. Kumar, A. S. Lesniewski, and D. E. Woodward, "Managing Smile Risk," *Wilmott Magazine*, September 2002, pp.84-108.
- Hattori, M., A. Schrimpf, and V. Sushko, "The Response of Tail Risk Perceptions to Unconventional Monetary Policy," *American Economic Journal: Macroeconomics*, 8(2), 2016, pp.111-136.
- Hull, J., A. Sokol, and A. White, "Short-Rate Joint-Measure Models," *Risk Magazine*, 27(10), 2014, pp.59-63.
- Henry-Labordère, P., "A General Asymptotic Implied Volatility for Stochastic Volatility Models," arXiv, 2005.
- Ivanova, V., and J. M. P. Gutiérrez, "Interest Rate Forecasts, State Price Densities and Risk Premium from Euribor Options," *Journal of Banking and Finance*, 48, 2014, pp.210-223.
- Kienitz, J., "Negative Rates, SABR PDE and Approximation," Quantlib, 2015.
- Lee, R., and D. Wang, "Displaced Lognormal Volatility Skews: Analysis and Applications to Stochastic Volatility Simulations," *Annals of Finance*, 8(2), 2012, pp.159-181.
- Le Floch, F., and G. J. Kennedy, "Finite Difference Techniques for Arbitrage Free SABR," SSRN, 2015.
- Liu, X., M. B. Shackleton, S. J. Taylor, and X. Xu, "Closed-Form Transformations from Risk-Neutral to Real-World Distributions," *Journal of Banking and Finance*, 31(5), 2007, pp.1501-1520.
- Ross, S., "The Recovery Theorem," *Journal of Finance*, 70(2), 2015, pp.615-648.
- Sihvonen, J., and S. Vähämaa, "Forward-Looking Monetary Policy Rules and Option-Implied Interest Rate Expectations," *Journal of Futures Markets*, 34(4), 2014, pp.346-373.
- Söderlind, P., and L. E. O. Svensson, "New Techniques to Extract Market Expectations from Financial Instruments," *Journal of Monetary Economics*, 40(2), 1997, pp.383-429.
- West, G., "Calibration of the SABR model in Illiquid Markets," *Applied Mathematical Finance*, 12(4), 2005, pp.371-385.

補論. 実確率のインプライド分布

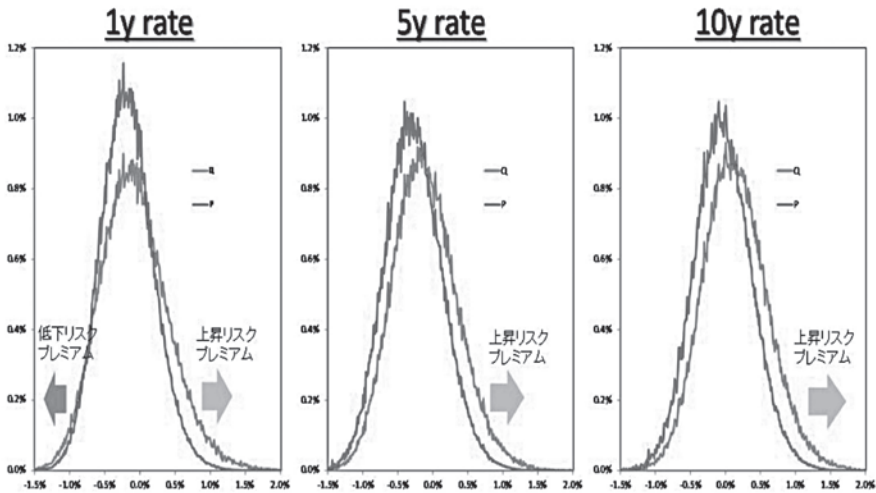
本研究で示されているインプライド分布は、リスク中立確率に基づくものであるが、これは投資家のリスクプレミアムを含んだものである。近年、Liu *et al.* [2007] や Hull, Sokol, and White [2014], Ross [2015] によって、リスク中立確率からリスクプレミアムを取り除いた、実確率のインプライド分布の推計方法が提案されている。ここでは、多くの研究に用いられている Liu *et al.* [2007] の手法を用いて、実確率のインプライド分布を計算している（図補1）。

実確率のインプライド分布は、リスク中立確率よりも左側（金利低下側）となっており、リスク中立確率にはリスクプレミアムが相応に含まれていたことが確認される。ただし、1年金利については、水準の低いところではリスク中立確率と実確率の関係が逆転しており、利下げに対応した金利低下プレミアムも若干ながら含まれていると解釈される。

次に、マイナス金利政策導入後、追加緩和観測が高まった時期においては、実確率で見ても、リスク中立確率と同様、中心的な見方は概ね▲0.5%以上に止まっていたことが確認された。

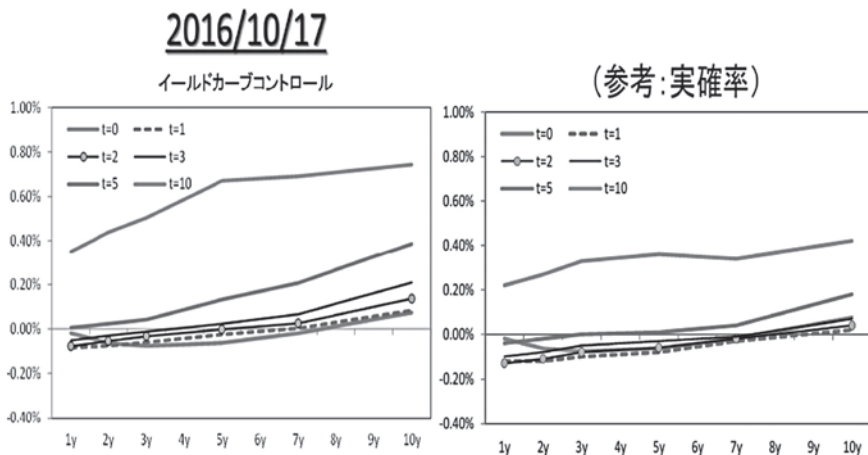
最後に、図16で示されている、イールドカーブの先行き見通しの中央値についても、実確率で確認した（図補2）。イールドカーブ・コントロール政策導入後の2016年10月17日時点においては、リスク中立確率では長期金利の水準が先行き上昇しているが、実確率で見た場合には長期まで含めて、金利水準がコントロールされる可能性があるとの見方が多くなっている。すなわち、この時点で長期金利の長期的なコントロールが難しいと思われていたのは、リスクプレミアムに要因があったことが改めて確認された。

図補1 実確率で見たインプライド分布



(注) 日本の2016/2/22の例。1年後の分布。Q = リスク中立確立、P = 実確率

図補2 実確率で見た先行きのイールドカーブ（インプライド分布の中央値）



本論文は所定の査読制度による審査を経たものである。
 採択決定日：2019年11月19日
 日本大学経済学部 経済集志・研究紀要編集委員会