

## 査 読

# ハミルトニアン・モンテカルロ法におけるリープフロッグ 積分による非対称 SV モデルのベイズ推定への影響

戸 塚 英 臣  
三 井 秀 俊

## 要 約

本論文は、ハミルトニアン・モンテカルロ法で用いられるリープフロッグ積分による SV モデルの推定結果への影響について検証したものである。ハミルトニアン・モンテカルロ法の採択確率は、リープフロッグ積分で用いられるステップサイズとステップ数の 2 つのパラメータに依存すると言われている。そこで、この 2 つのパラメータの値をいくつか変えて、テストデータ、日経平均株価と東証株価指数の日次収益率を用いて、非対称 SV モデルの推定を行なった。その結果、非対称 SV モデルの推定結果は、リープフロッグ積分の 2 つのパラメータに依存しないことが分かった。一方、非効率性因子は、ステップサイズに依存しないが、ステップ数には依存することが明らかとなった。同時に、日経平均株価と東証株価指数の日次収益率を用いて非対称 SV モデルの実証分析を行なった。ボラティリティに対するショックの持続性を表すパラメータは 1 に近い値となること、また、収益率とボラティリティの間には負との相関があることが示され、先行研究と整合性のある結果となった。

## I. はじめに

近年、ベイズ統計を基にしたマルコフ連鎖モンテカルロ (Markov Chain Monte Carlo; 以下、略して MCMC) 法の一つであるハミルトニアン・モンテカルロ (Hamiltonian Monte Carlo; 以下、略して HMC) 法に注目が集まっている<sup>1)</sup>。HMC 法は、統計モデルのパラメータの更新に物理学で開発された分子動力学法<sup>2)</sup>を用い、更新されたパラメータの採択・棄却判定にはメトロポリス・ヘイスティングス (Metropolis-Hastings; 以下、略して M-H) 法を用いている。このように HMC 法では、分子動力学法と M-H 法の 2 つの異なる手法を組み合わせているためハイブリッド・モンテカルロ (Hybrid Monte Carlo) 法とも呼ばれる。HMC 法では、MCMC 法でよく用いられる M-H 法やギブスサンプリング (Gibbs Sampling) 法とは異なり、一度に多くのパラメータをサンプリングしても採択確率が低下しないとい

<sup>1)</sup> HMC 法は、Duane *et al.* (1987) によって素粒子物理学の格子 QCD (Quantum Chromo Dynamics) 計算においてゲージ配置を効率よく生成する方法として考案された。詳しくは、Mackay (2003, Chapter 30), Neal (1994), Neal (2011) を参照。

<sup>2)</sup> 分子動力学法とは、相互作用する分子や原子の運動をニュートン力学や解析力学等の古典力学を用いて数値的に解く方法である。詳しくは、Alder and Wainwright (1956) を参照。

う特徴がある。HMC法のパラメータの更新を行なう分子動力学法では、ハミルトンの運動方程式が用いられる。ハミルトンの運動方程式は解析的に解けないため、数値積分で近似的に解く必要がある。HMC法が、MCMC法の基本条件の一つである詳細釣り合い条件 (detailed balance condition) を満足するためには、この数値積分は時間反転性と体積保存を満足する必要がある。これら2つの条件を満足する数値積分法はシンプレクティック数値積分 (symplectic integrator) 法と言われ、HMC法では、2次のシンプレクティック数値積分法であるリープフロッグ (leapfrog) 積分が用いられる。リープフロッグ積分では、一度の更新で進める時間を表すパラメータとして、ステップサイズとステップ数の2つがある。ステップサイズとステップ数は、それぞれハミルトンの運動方程式の安定性とサンプリングの効率性に影響を与えるパラメータである。本論文では、確率的ボラティリティ変動 (Stochastic Volatility; 以下、略してSV)<sup>3)</sup> モデルを用いたHMC法による実証分析を通じてリープフロッグ積分の2つのパラメータによる推定結果への影響について分析することを目的とする。

株式、株価指数、外国為替相場等のリスク資産収益率の時系列データは、ボラティリティと呼ばれる2次のモーメントの変動が注目される。このようなリスク資産収益率データの分析では、SVモデルが広く用いられている。また、株式市場には、株価収益率とボラティリティとの間の関係として、ある種の非対称 (asymmetry) な動きがあることが知られている。つまり、株価収益率が下落すると、次期にはボラティリティは上昇し、株価収益率が上昇すると、次期にはボラティリティは下落する傾向があるとしている (leverage effects)。これは、株価収益率とボラティリティとの間には負の相関があることを示唆している。本論文では、このような非対称性を取り入れたSVモデルをレバレッジ効果を考慮したSV (SV with Leverage; 以下、略してSVL) モデルと呼び、分析モデルとする。

SVLモデルでは、潜在変数 (latent variable) を含んでいること等からモデルのパラメータを最尤推定することが困難であり、最尤法に代わる推定方法が必要になる。この問題に対処するため、多くの先行研究ではMCMC法を用いたベイズ推定を行なっている。SVLモデルでは、モデルを記述するパラメータだけでなく潜在変数であるボラティリティも同時に事後分布からサンプリングする必要がある。そのためボラティリティは、観測個数と同じ個数になり、効率的にサンプリングすることが重要となる。リスク資産収益率に関してMCMCを用いたSVLモデルのベイズ推定による実証研究として、Yu (2005)、Omori *et al.* (2007)、大森・渡部 (2008)、石原・大森 (2008)、Omori and Watanabe (2008)、Takahashi *et al.* (2009)、Nakajima and Omori (2010)、中島・大森 (2011) 等がある。

上記のSVLモデルを利用した先行研究では、MCMC法として、M-H法やギブスサンプリング法が利用されている。しかしながら、これらのMCMC法は、多くの確率変数を一度に推定すると棄却率が小さくなる等の問題点があるため、Takaishi (2008, 2009, 2013) では、SVモデルの推定に関してHybrid Monte Carlo法を用いたベイズ推定を提案している。Nugroho and Morimoto (2015) は、HMC法を改良したRiemann manifold Hamiltonian Monte Carlo法<sup>4)</sup>を用いてSVLモデルによりTOPIX, S&P 500 (Standard & Poor's 500 Stock Index) に関して実証分析を行なっている。また、戸塚・三井 (2020) は、HMC法を用いて米ドル・円為替レート等の外国為替相場の日次収益率データに対し、SVLモデルを使用してベイズ推定を行なっている。しかし、これらの研究では、SVLモデルの推定結果へのリープフロッグ積分の2つのパラメータに対する影響について、十分な議論は行なわれていない。

3) SVモデルとその発展に関して詳しくは、Ghysels *et al.* (1996)、Shephard [ed.] (2005)、渡部 (2005) を参照。

4) 詳しくは、Girolami and Calderhead (2011) を参照。

本論文では、テストデータ、日経平均株価と東証株価指数 (Tokyo Stock Price Index; 以下、略して TOPIX) の日次収益率を用いてリープフロッグ積分のステップサイズとステップ数の値が推定結果に与える影響について検証を行なった。2つのパラメータの値を変えて推定したSVLモデルのパラメータの事後平均と95%信用区間は、2つのパラメータに依存せず、ほぼ同じ値であることが示された。また、SVLモデルのパラメータの採択確率も2つのパラメータに依存せず、SVLモデルのデータの当てはまりに依存する可能性が示唆された。一方、非効率性因子 (inefficiency factor) はステップサイズには依存しないが、ステップ数が小さいと非効率性因子が大きく、ステップ数が大きくなると非効率性因子が一定値に近づく傾向が明らかとなった。

本論文の以下の構成は次の通りである。第II節では、ハミルトニアン・モンテカルロ法とリープフロッグ積分について概観する。第III節では、SVLモデルについて解説する。第IV節では、HMC法におけるリープフロッグ積分のパラメータ依存性を検証する方法とデータについて説明する。第V節では、HMC法を用いた実証分析の結果とリープフロッグ積分のパラメータ依存性の分析結果を述べる。第VI節では、結論と今後の課題について言及する。

## II. HMC 法

### 1 ハミルトン力学

HMC法では、パラメータの更新に物理学で開発された分子動力学法を用いている。分子動力学法とは、原子や分子の運動をハミルトン力学に基づく運動方程式を数値積分することで再現するシミュレーション方法のことである。ここでは、HMC法の説明に必要なハミルトン力学について簡単に述べる。ハミルトン力学では、系の状態は一般化された座標と運動量  $(q_j, p_j)$ ,  $(j=1, \dots, d)$  が張る位相空間の一点に相当し、系の時間発展は位相空間の軌跡と与えられる。この系の時間発展を表す軌跡の方程式が、以下のハミルトンの運動方程式、

$$\frac{dq_j}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad (1)$$

$$\frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (2)$$

となる。ここで  $\tau$  は時間を表す。また、 $H$  はハミルトニアンと呼ばれ、系のエネルギーを表し、

$$H(q, p) = \sum_{j=1}^d \frac{p_j^2}{2m_j} + U(q) \equiv K(p) + U(q) \quad (3)$$

と定義される。 $K(p)$  と  $U(q)$  は、系の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーをそれぞれ表す。また、 $m_j$  は質点の質量である。

### 2 ベイズ推定とHMC法

統計モデルのパラメータを  $\theta = \{\theta_j\}_{j=1}^d$ 、データを  $y = \{y_i\}_{i=1}^n$  とすると、ベイズ推定法における事後分布  $f(\theta|y)$  は、

$$f(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)f(\theta)}{\int f(y|\theta)f(\theta)d\theta} \quad (4)$$

と表される。ここで、 $f(y|\theta)$  は尤度関数、 $f(\theta)$  はパラメータ  $\theta$  の事前分布である。また、(4) 式の

分母は、規格化因子であり、周辺尤度とも呼ばれる。本論文では、事前分布が事後分布に与える影響を小さくするため、事前分布に無情報事前分布を用いる。なお、無情報事前分布とは、事前にパラメータに関する情報がない場合や、事前分布を設定する根拠がない場合などに用いられる分布のことである。

(4) 式の事後分布とは独立な標準正規分布  $f(p)$  と、パラメータ  $\theta$  の共役運動量と呼ばれる  $p = \{p_j\}_{j=1}^d$  を導入する。この共役運動量の標準正規分布、

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{p^2}{2}\right) \quad (5)$$

と (4) 式の事後分布との同時分布  $f(\theta, p|y)$  は、

$$f(\theta, p|y) = f(\theta|y)f(p) \quad (6)$$

で与えられる。HMC 法ではこの同時分布から乱数を発生させる。(6) 式より、

$$\begin{aligned} f(\theta, p|y) &\propto \exp\left(-\frac{p^2}{2} + \log f(y|\theta)\right) \\ &= \exp[-H(\theta, p)] \end{aligned} \quad (7)$$

となる。ここで、

$$H(\theta, p) = \frac{1}{2}p^2 - \log f(y|\theta) \quad (8)$$

をハミルトニアンとして定義する。HMC 法では、パラメータ  $\theta$  と共役運動量  $p$  は (1), (2) 式に従うと考える。ただし、ここでの  $\tau$  は仮想的に導入された時間を表すものとする。

HMC 法による乱数列  $\theta^{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) の発生は以下のステップによって実行される。以下の 1. から 6. までの試行をモンテカルロ・ステップと呼ぶことにする。

1. パラメータ  $\theta_i^{(k)}$  の共役運動量  $p_i^{(k)}$  を標準正規分布  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(p_i^{(k)})^2}{2}\right]$  に従う乱数として発生させる。  
なお、共役運動量  $p_i^{(k)}$  をランダムに発生させることが、マルコフ連鎖であることを示している。
2. 初期時刻  $\tau = 0$  でのハミルトニアン  $H_{init} = H(\theta^{(k)}, p^{(k)})$  を計算する。
3. 3項で説明するリープフロッグ積分を用いて、(1), (2) 式の微分方程式を数値的に解くことにより、初期状態  $(\theta_i^{(k)}(\tau = 0), p_i^{(k)}(\tau = 0)) = (\theta_i^{(k)}, p_i^{(k)})$  から終状態  $(\theta_i^{(k)}(\tau = \tau_{fin}), p_i^{(k)}(\tau = \tau_{fin}))$  まで時間発展させる。
4. 終状態のハミルトニアン  $H_{fin} = H(\theta^{(k)}(\tau = \tau_{fin}), p^{(k)}(\tau = \tau_{fin}))$  を計算する。
5. 新しい乱数の候補を次の確率  $P$  で選択する。

$$P = \min [1, \exp(-H_{fin} + H_{init})]. \quad (9)$$

6. 上記のステップを繰り返す。

### 3 リープフロッグ積分

(1), (2) 式のハミルトンの運動方程式は解析的に解けないため、差分化して数値的に解く必要がある。HMC 法が詳細釣り合い条件を満足するためには、(1), (2) 式のハミルトンの運動方程式の

数値積分法が時間反転性と体積保存を満たす必要がある。それらの条件を満足する数値積分としてリープフロッグ積分が用いられる。リープフロッグ積分では、パラメータ  $\theta$  と共役運動量  $p$  をずらして時間発展させる。つまり、パラメータ  $\theta$  と共役運動量  $p$  は、ステップサイズ  $\epsilon$  の半分ずれた時間で定義される。リープフロッグ積分で差分化された (1), (2) 式は、

$$p_j^{(k)}\left(\tau + \frac{\epsilon}{2}\right) = p_j^{(k)}(\tau) - \left(\frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\partial H(\theta, p)}{\partial \theta_j} \Big|_{\theta=\theta(\tau)}, \quad (10)$$

$$\theta_j^{(k)}(\tau + \epsilon) = \theta_j^{(k)}(\tau) + \epsilon p_j^{(k)}\left(\tau + \frac{\epsilon}{2}\right), \quad (11)$$

$$p_j^{(k)}(\tau + \epsilon) = p_j^{(k)}\left(\tau + \frac{\epsilon}{2}\right) - \left(\frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\partial H(\theta, p)}{\partial \theta_j} \Big|_{\theta=\theta(\tau+\epsilon)} \quad (12)$$

となる。1回のモンテカルロ・ステップで進む仮想的な時間  $\tau_{fin}$  とリープフロッグ積分のステップサイズ  $\epsilon$  から、リープフロッグ積分を繰り返すステップ数  $N$  は  $\tau_{fin} = \epsilon N$  を満足する。

リープフロッグ積分によるSVLモデルの推定結果への影響を調べるために、ステップサイズとステップ数を変えて検証を行なう。検証に用いたステップサイズとステップ数の組み合わせは次の通りである。ステップサイズの影響を調べるために、ステップサイズとステップ数を (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000) と変えて推定を行なう。次に、ステップ数の影響を調べるために、ステップサイズを 0.02 に固定し、ステップ数を 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000 と変えて推定を行なう。ステップサイズは、(10) – (12) 式の微分を差分で近似する際の計算精度に影響を与える。したがって、ステップサイズの影響を調べるためには、ステップサイズとステップ数の積を一定として、ステップサイズとステップ数を同時に変化させる必要がある。次に、ステップ数は、(8) 式で与えられるハミルトニアンで時間発展するパラメータ  $\theta$  の仮想的な時間の間隔を表す。したがって、ステップ数の影響は、ステップサイズを一定の下でステップ数を変化させることで、推定されるパラメータ  $\theta$  の時間間隔依存性を調べることである。

### III. SVL モデル

ファイナンスの時系列分析で通常利用されるSVモデルは、収益率  $y_t$  とボラティリティ  $\sigma_t = \exp(h_t/2)$  の過程を  $h_t = \ln \sigma_t^2$  として<sup>5)</sup> 以下のように記述される。

$$y_t = \exp(h_t/2) u_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (13)$$

$$h_{t+1} = \mu + \varphi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad t = 0, \dots, n-1, \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d. \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}\right). \quad (15)$$

ここで、 $u_t$  は平均0、分散1、 $\eta_t$  は平均0、分散  $\sigma_\eta^2$  の正規分布に従う誤差項である。i.i.d. は、過去と独立で同一な分布 (independent and identically distributed) を表す。 $h_t$  はボラティリティの変動を示す潜在変数となる。 $\mu$  はボラティリティの平均を表し、 $\varphi$  はボラティリティのショックの持続性を表すパラメータである。定常性の条件より、 $|\varphi| < 1$  と仮定する。(14) 式は、潜在変数  $h_t$  が1次の自己回

<sup>5)</sup> ボラティリティ  $\sigma_t$  が負にならないようにするためである。

帰過程に従うことを示している。非対称な動きをモデルに与えるには (13) 式と (14) 式で  $u_t$  と  $\eta_t$  に対して相関関係を考えれば良い。  $u_t$  と  $\eta_t$  とが、相関関係  $\rho$  を持つとして SVL モデルを構築すると、

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim i.i.d. \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right) \quad (16)$$

となる。(13), (14), (16) 式からなるモデルは SVL モデルとなる。SVL モデル (13), (14), (16) 式の未知パラメータ  $(\varphi, \sigma_\eta, \rho, \mu)$  をまとめて  $\theta$  で表すと、SVL モデルの尤度関数  $f(y|\theta)$  は次のように表される。

$$\begin{aligned} f(y|\theta) &= \int \cdots \int \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi \exp(h_t)}} \exp \left[ -\frac{y_t^2}{2 \exp(h_t)} \right] \\ &\quad \times \prod_{t=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2} \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[ -\frac{\{h_{t+1} - \mu - \varphi(h_t - \mu) - \rho\sigma_\eta y_t \exp(-h_t/2)\}^2}{2\sigma_\eta^2 (1-\rho^2)} \right] \\ &\quad \times \frac{\sqrt{1-\varphi^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}} \exp \left[ -\frac{(1-\varphi^2)(h_1 - \mu)^2}{2\sigma_\eta^2} \right] dh_1 \dots dh_n. \end{aligned} \quad (17)$$

この積分は解析的に解けないため、SVL モデルのパラメータは最尤推定することが難しい。そこでボラティリティの対数値である  $h_t$  を潜在変数として、他の未知パラメータと同様に HMC 法でサンプリングをして、モデルのパラメータと潜在変数を推定するために HMC 法による MCMC アルゴリズムを以下のステップで行なう。

1.  $\theta, h$  の初期値を設定する。  
モデルのパラメータと潜在変数の事前分布には無情報事前分布を仮定する。
2.  $h|\theta, y$  からサンプリングする。  
HMC 法を用いて潜在変数  $h$  をサンプリングする。
3.  $\theta|h, y$  からサンプリングする。  
HMC 法を用いてモデルパラメータ  $\theta$  をサンプリングする。
4. 2に戻る。

本論文では、HMC 法によるベイズ推定を用いて、SVL モデルのパラメータの推定を行なう。

#### IV. 検証方法

##### 1 検証データ

リープフロッグ積分による計算結果のパラメータ  $(\epsilon, N)$  の依存性を検証するために、SVL モデル

により作成したテストデータ、日経平均株価、TOPIXの3つのデータを用いる。テストデータは、SVLモデル(13)、(14)、(16)式を用いて作成した。テストデータを作成する際に用いたパラメータは、 $(\varphi, \sigma_p, \rho, \mu) = (0.90, 0.50, -0.60, -0.20)$ であり、作成したデータ数は日経平均株価とTOPIXの日次収益率の観測個数と同一の1,221とした。日次収益率の算出<sup>6)</sup>には、日経NEEDS-FinancialQuestから取得した日経平均株価とTOPIXの終値を用いた<sup>7)</sup>。日経平均株価とTOPIXのデータの期間は2015年1月5日から2019年12月30日までである。日経平均株価とTOPIXの日次収益率のサンプル期間は2015年1月6日から2019年12月30日までであり、観測個数は1,221である。表1にテストデータ、日経平均株価、TOPIXの日次収益率の要約統計量<sup>8)</sup>を示す。

表1 テストデータと株価指数の日次収益率の要約統計量

2015年1月6日-2019年12月31日 観測個数1,221

	平均	標準偏差	歪度	超過尖度	最大値	最小値
テストデータ	0.0481 (0.0333)	1.1637	0.7814 (0.0701)	17.1804 (0.1402)	12.8962	-7.6985
日経平均株価	0.0251 (0.0351)	1.2257	-0.3414 (0.0701)	6.1453 (0.1402)	7.4262	-8.2529
TOPIX	0.0169 (0.0334)	1.1665	-0.3498 (0.0701)	6.6610 (0.1402)	7.7153	-7.5324

(注) 括弧内の数値は標準誤差を表す。観測個数を  $N$ 、標準偏差を  $\hat{s}$  とすると、平均、歪度、超過尖度の標準誤差はそれぞれ、 $\hat{s}/\sqrt{N}$ 、 $\sqrt{6/N}$ 、 $\sqrt{24/N}$  である。

## 2 計算条件と収束判定

HMC法によるベイズ推定においては、稼働検査期間 (burn-in period) として最初の10,000個を捨てた後、100,000個の確率標本を発生させ、MCMCの標本の独立性を保証するため標本の抽出は5つおきに合計20,000個を用いた。また、同時に走らせるMCMCの数(チェーン数)は3とした。なお、本論文における数値計算は全てC言語を用いている。

HMC法の妥当性を調べるために、サンプリングによって得られた値が、ある事後分布に収束しているか判断する必要がある。この収束診断の方法はいくつかあるが、本論文では発生させた確率標本の時系列プロットの目視による判定と、Gelman-Rubin (以下、略してG-R) 統計量を併用して判定を行なう。なお、G-R統計量が1に近い場合、連鎖が定常状態に収束していると判断できる<sup>9)</sup>。

6)  $S_t$  を  $t$  時点の日経平均株価とすると、 $t$  時点の日経平均株価の日次収益率  $y_t$  は、 $y_t = (\ln S_t - \ln S_{t-1}) \times 100$  であり、また、 $I_t$  を  $t$  時点の TOPIX の水準とすると、 $t$  時点の TOPIX の日次収益率  $y_t$  は、 $y_t = (\ln I_t - \ln I_{t-1}) \times 100$  となる。

7) 本論文では、リスク資産価格のボラティリティの時間変動に関して焦点を当てており、配当がボラティリティの変動に与える影響は非常に小さいと考えたため、配当調整した日経平均株価と TOPIX のデータは使用していない。

8) ここで、日経平均株価と TOPIX の平均の値は各々正の値を示しているが、標準誤差の値から、これらは統計的に有意な値ではないと考えられる。有意水準 1%、5%、10% のいずれにおいても帰無仮説「 $H_0$ : 平均  $\mu=0$ 」は棄却できず、各々の株価指数の平均を 0 と推測して問題はないと思われる。したがって、(13)、(16) 式において  $u_t$  の平均を 0 と仮定して分析を行なうことは適当である。

9) 詳しくは、Gelman and Rubin (1992)、Gelman (1996) を参照。

## V. 検証結果

## 1 収束判定

図1 - 図6にテストデータ, 日経平均株価とTOPIXの収益率を用いたSVLモデルの標本経路をそれぞれ示す. 標本経路は, 稼働検査期間を除いて抽出した20,000個の3つのMCMCの内の1つをプロットしたものである. 図1 - 図3は, ステップサイズ $\epsilon$ を変えた場合のSVLモデルのパラメータ( $\varphi, \sigma_n, \mu, \rho$ )の標本経路である. なお, ステップサイズとステップ数は, (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000)である. これらの図から, ステップサイズを変えてもSVLモデルのすべてのパラメータの標本経路は状態空間を万遍なく十分に訪れていることが分かる. 図4 - 図6は, ステップ数 $N$ を変えた場合のSVLモデルのパラメータ( $\varphi, \sigma_n, \mu, \rho$ )の標本経路である. なお, ステップ数は, 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000であり, すべての計算でステップサイズは0.02である. これらの図より, ステップ数を変えてもSVLモデルのすべてのパラメータの標本経路は状態空間を万遍なく十分に訪れていることは明らかである.

図1 テストデータを用いたSVLモデルの標本経路; ステップサイズ依存性. パラメータ $\varphi$  (一段), パラメータ $\sigma_n$  (二段), パラメータ $\rho$  (三段), パラメータ $\mu$  (四段).

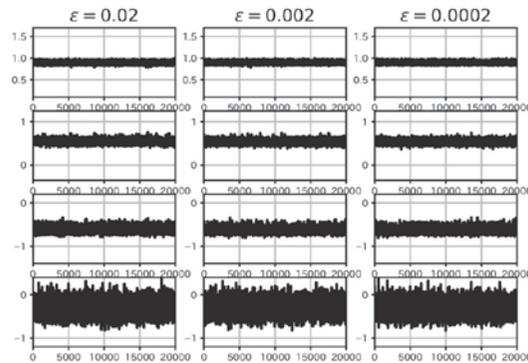


図2 日経平均株価を用いたSVLモデルの標本経路; ステップサイズ依存性. パラメータ $\varphi$  (一段), パラメータ $\sigma_n$  (二段), パラメータ $\rho$  (三段), パラメータ $\mu$  (四段).

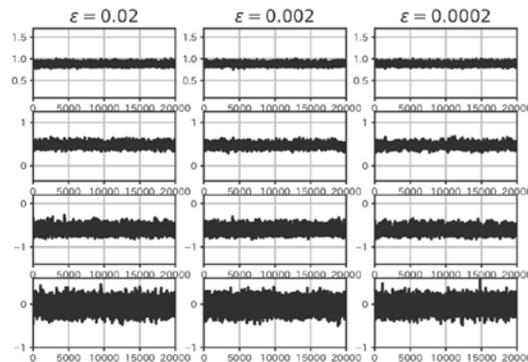


図3 TOPIXを用いたSVLモデルの標本経路;ステップサイズ依存性. パラメータ $\varphi$  (一段), パラメータ $\sigma_n$  (二段), パラメータ $\rho$  (三段), パラメータ $\mu$  (四段).

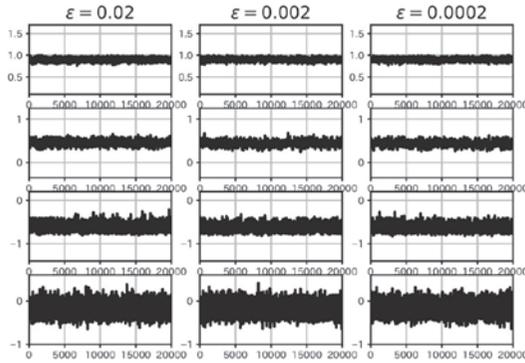


図4 テストデータを用いたSVLモデルの標本経路;ステップ数依存性. パラメータ $\varphi$  (一段), パラメータ $\sigma_n$  (二段), パラメータ $\rho$  (三段), パラメータ $\mu$  (四段).

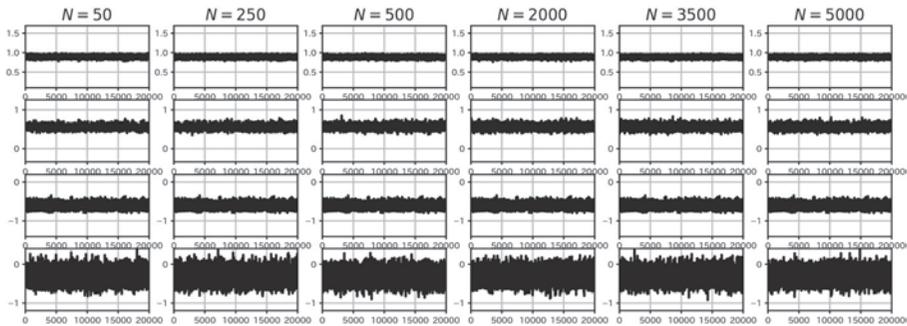
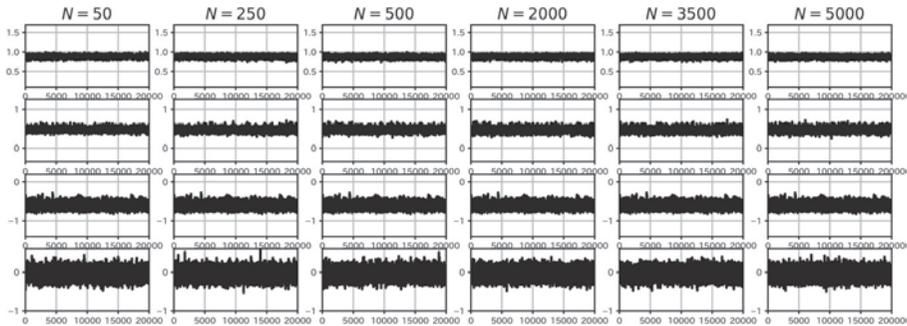


図5 日経平均株価を用いたSVLモデルの標本経路;ステップ数依存性. パラメータ $\varphi$  (一段), パラメータ $\sigma_n$  (二段), パラメータ $\rho$  (三段), パラメータ $\mu$  (四段).



次に、表2～表3にテストデータ、日経平均株価とTOPIXの日次収益率を用いたSVLモデルのG-R統計量を示す。Gelman (1996)は、G-R統計量が1.1以下の場合、連鎖が定常状態に収束していると判断できるとしている。本論文では、これより厳しい条件としてG-R統計量が1.05以下となっているときに、各パラメータが安定状態に収束していると判断する。表2と表3は、ステップサイズ $\epsilon$ とス

図6 TOPIX を用いた SVL モデルの標本経路；ステップ数依存性. パラメータ  $\varphi$  (一段), パラメータ  $\sigma_\eta$  (二段), パラメータ  $\rho$  (三段), パラメータ  $\mu$  (四段).

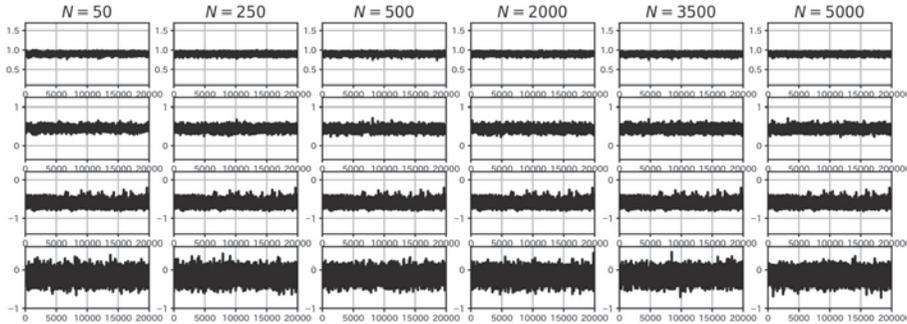


表2 SVL モデルのパラメータの Gelman-Rubin 統計量；ステップサイズ依存性

( $\epsilon, N$ ) = (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000)

ステップサイズ		0.02	0.002	0.0002
テストデータ	$\varphi$	1.0006	1.0001	1.0006
	$\sigma_\eta$	1.0017	1.0009	1.0017
	$\rho$	1.0007	1.0006	1.0011
	$\mu$	1.0000	1.0002	1.0001
日経平均株価	$\varphi$	1.0003	1.0005	1.0003
	$\sigma_\eta$	1.0005	1.0017	1.0003
	$\rho$	1.0002	1.0004	1.0007
	$\mu$	1.0000	1.0000	1.0000
TOPIX	$\varphi$	1.0014	1.0003	1.0002
	$\sigma_\eta$	1.0026	1.0005	1.0003
	$\rho$	1.0002	1.0006	1.0001
	$\mu$	1.0003	1.0001	1.0000

表3 SVL モデルのパラメータの Gelman-Rubin 統計量；ステップ数依存性

$\epsilon = 0.02$  (固定),  $N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$

ステップ数		50	250	500	2,000	3,500	5,000
テストデータ	$\varphi$	1.0006	1.0000	1.0003	1.0003	1.0002	1.0000
	$\sigma_\eta$	1.0017	1.0001	1.0010	1.0011	1.0005	1.0003
	$\rho$	1.0007	1.0018	1.0016	1.0005	1.0003	1.0004
	$\mu$	1.0000	1.0001	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
日経平均株価	$\varphi$	1.0003	1.0002	1.0010	1.0001	1.0006	1.0014
	$\sigma_\eta$	1.0005	1.0005	1.0023	1.0001	1.0008	1.0028
	$\rho$	1.0002	1.0005	1.0010	1.0000	1.0005	1.0009
	$\mu$	1.0000	1.0000	1.0002	1.0000	1.0001	1.0001
TOPIX	$\varphi$	1.0014	1.0004	1.0004	1.0005	1.0005	1.0001
	$\sigma_\eta$	1.0026	1.0003	1.0008	1.0011	1.0007	1.0000
	$\rho$	1.0002	1.0006	1.0002	1.0001	1.0004	1.0001
	$\mu$	1.0003	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

ステップ数  $N$  を変えた場合の SVL モデルのパラメータ ( $\varphi, \sigma_\eta, \rho, \mu$ ) それぞれの G-R 統計量である。ステップサイズとステップ数を変えても SVL モデルのパラメータの G-R 統計量は 1.05 以下となる。したがって、図 1 - 図 6 の標本経路は適切に安定しており、さらに、表 2 - 表 3 に示した G-R 統計量はいずれも 1.05 以下であることから、HMC 法による計算結果はすべて収束していると考えられる。

## 2 SVL モデルの実証結果

ここでは、テストデータ、日経平均株価、TOPIX の日次収益率を用いた SVL モデルの HMC 法によるパラメータ推定の結果について述べる。

### 2.1 テストデータを用いた HMC 法による SVL モデルの推定結果の精度

テストデータを用いた HMC 法による SVL モデルの推定結果の精度について検証を行なう。表 4 と表 5 は、ステップサイズとステップ数を変えた場合の SVL モデルのパラメータの推定結果である。

これらの表から  $\varphi$  の事後平均は 0.8933 から 0.8971,  $\sigma_\eta$  の事後平均は 0.5408 から 0.5537,  $\rho$  の事後平均は -0.6422 から -0.6107,  $\mu$  の事後平均は -0.3091 から -0.2976 の値であり、ステップサイズとステップ数を変えても、SVL モデルのパラメータは事後平均から大きく外れる値がないことが分かる。したがって、SVL モデルのパラメータの推定結果もステップサイズとステップ数には大きく依存しないと言える。テストデータを生成する際に用いた値と比べると、 $\varphi, \mu, \rho$  は小さく、 $\sigma_\eta$  が大きい結果となっている。ただし、それぞれのパラメータの 95% 信用区間は、テストデータを生成する際に用いたパラメータ値を含んでいる。

ステップサイズとステップ数を変えた場合の事後平均と 95% 信用区間の変化を視覚的に理解するために、図 7 にテストデータを用いた SVL モデルの推定結果を示す。グラフは、上段がステップサイズ依存性、下段がステップ数依存性であり、グラフ中の黒丸は事後平均を、エラーバーは 95% 信用区間を示している。図 7 より、SVL モデルのパラメータ ( $\sigma_\eta, \varphi, \rho, \mu$ ) はステップサイズとステップ数にほとんど依存していないことが分かる。

表 4 テストデータを用いた SVL モデルの推定結果；ステップサイズ依存性

( $\epsilon, N$ ) = (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000)

1 行目：事後平均および事後標準偏差, 2 行目：95% 信用区間, 3 行目：非効率因子および標準偏差.

ステップサイズ	$\varphi$	$\sigma_\eta$	$\rho$	$\mu$
0.02	0.8971 (0.0239)	0.5408 (0.0478)	-0.6422 (0.0570)	-0.2976 (0.1334)
	[0.8504, 0.9433]	[0.4507, 0.6368]	[-0.7225, -0.4988]	[-0.5569, -0.0288]
	11.67 (3.70)	25.35 (9.48)	12.77 (1.71)	3.88 (0.65)
0.002	0.8968 (0.0243)	0.5421 (0.0497)	-0.6205 (0.0582)	-0.2981 (0.1336)
	[0.8494, 0.9441]	[0.4504, 0.6445]	[-0.7246, -0.4967]	[-0.5570, -0.0301]
	7.72 (4.47)	21.00 (4.47)	10.91 (3.47)	4.18 (0.91)
0.0002	0.8970 (0.0238)	0.5411 (0.0476)	-0.6217 (0.0574)	-0.2978 (0.1331)
	[0.8506, 0.9432]	[0.4510, 0.6364]	[-0.7238, -0.4977]	[-0.5566, -0.0301]
	11.67 (7.24)	24.70 (12.58)	16.97 (4.13)	4.49 (0.65)

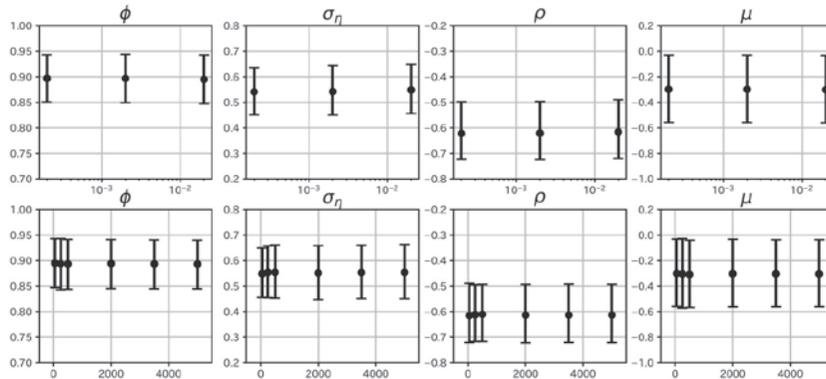
表5 テストデータを用いた SVL モデルの推定結果；ステップ数依存性

 $\epsilon = 0.02$  (固定),  $N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$ 

1 行目：事後平均および事後標準偏差, 2 行目：95%信用区間, 3 行目：非効率因子および標準偏差.

ステップ数	$\phi$	$\sigma_n$	$\rho$	$\mu$
50	0.8949 (0.0244)	0.5484 (0.0495)	-0.6156 (0.0585)	-0.3016 (0.1340)
	[0.8473, 0.9428]	[0.4561, 0.6489]	[-0.7206, -0.4894]	[-0.5597, -0.0323]
	11.67 (3.70)	25.35 (9.48)	12.77 (1.71)	3.88 (0.65)
250	0.8939 (0.0256)	0.5537 (0.0519)	-0.6119 (0.0569)	-0.3050 (0.1380)
	[0.8426, 0.9431]	[0.4552, 0.6579]	[-0.7167, -0.4946]	[-0.5729, -0.0278]
	9.49 (2.66)	21.59 (2.84)	13.81 (1.02)	3.16 (0.54)
500	0.8935 (0.0248)	0.5535 (0.0527)	-0.6107 (0.0571)	-0.3091 (0.1338)
	[0.8439, 0.9412]	[0.4534, 0.6612]	[-0.7165, -0.4933]	[-0.5678, -0.0412]
	14.27 (4.84)	30.91 (14.32)	12.47 (3.56)	5.46 (2.48)
2,000	0.8942 (0.0244)	0.5511 (0.0540)	-0.6141 (0.0582)	-0.3034 (0.1340)
	[0.8453, 0.9409]	[0.4477, 0.6587]	[-0.7218, -0.4934]	[-0.5624, -0.0338]
	5.97 (3.09)	13.14 (6.71)	9.55 (4.61)	4.56 (0.78)
3,500	0.8936 (0.0243)	0.5527 (0.0532)	-0.6138 (0.0581)	-0.3040 (0.1333)
	[0.8449, 0.9402]	[0.4515, 0.6602]	[-0.7204, -0.4924]	[-0.5617, -0.0379]
	6.79 (0.68)	15.01 (4.09)	10.44 (1.03)	3.32 (0.96)
5,000	0.8933 (0.0243)	0.5533 (0.0539)	-0.6136 (0.0582)	-0.3049 (0.1336)
	[0.8447, 0.9397]	[0.4510, 0.6632]	[-0.7209, -0.4931]	[-0.5616, -0.0373]
	6.59 (2.61)	15.22 (6.66)	8.06 (3.76)	4.38 (0.35)

図7 テストデータを用いた SVL モデルの推定結果. ステップサイズ依存性 (上段), ステップ数依存性 (下段).



## 2.2 日経平均株価を用いた SVL モデルの実証結果

日経平均株価の日次収益率を用いた HMC 法による SVL モデルの推定結果について検証する. 表 6 と表 7 は, SVL モデルの推定結果を示している. これらの表から,  $\phi$  の事後平均は 0.8792 から 0.8839,  $\sigma_n$  の事後平均は 0.4602 から 0.4742,  $\rho$  の事後平均は -0.6291 から -0.6191,  $\mu$  の事後平均は -0.0432 から -0.0374 の値となる. ステップサイズとステップ数を変えても, これらの事後平均から大きく外れる

表6 日経平均株価を用いた SVL モデルの推定結果；ステップサイズ依存性

$(\epsilon, N) = (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000)$

1 行目：事後平均および事後標準偏差，2 行目：95% 信用区間，3 行目：非効率因子および標準偏差。

ステップサイズ	$\varphi$	$\sigma_\eta$	$\rho$	$\mu$
0.02	0.8792 (0.0269)	0.4742 (0.0491)	-0.6191 (0.0648)	-0.0432 (0.1050)
	[0.8255, 0.9330]	[0.3818, 0.5760]	[-0.7320, -0.4773]	[-0.2484, 0.1659]
	22.70 (9.81)	42.03 (19.61)	12.77 (1.61)	4.23 (0.68)
0.002	0.8839 (0.0263)	0.4602 (0.0492)	-0.6289 (0.0637)	-0.0374 (0.1042)
	[0.8311, 0.9354]	[0.3668, 0.5598]	[-0.7395, -0.4887]	[-0.2401, 0.1704]
	31.64 (15.13)	67.46 (32.08)	19.20 (2.62)	5.80 (0.80)
0.0002	0.8832 (0.0265)	0.4623 (0.0498)	-0.6291 (0.0640)	-0.0381 (0.1039)
	[0.8300, 0.9349]	[0.3659, 0.5626]	[-0.7415, -0.4902]	[-0.2403, 0.1686]
	38.59 (12.77)	73.76 (23.31)	35.45 (11.84)	7.36 (1.69)

表7 日経平均株価を用いた SVL モデルの推定結果；ステップ数依存性

$\epsilon = 0.02$  (固定)， $N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$

1 行目：事後平均および事後標準偏差，2 行目：95% 信用区間，3 行目：非効率因子および標準偏差。

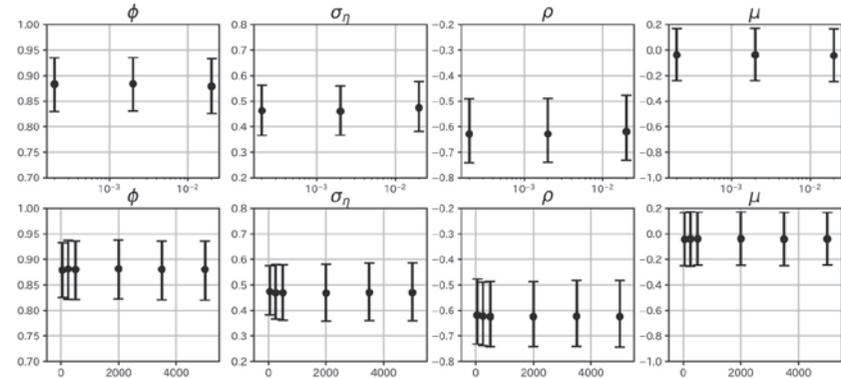
ステップ数	$\varphi$	$\sigma_\eta$	$\rho$	$\mu$
50	0.8792 (0.0269)	0.4742 (0.0491)	-0.6191 (0.0648)	-0.0432 (0.1050)
	[0.8255, 0.9330]	[0.3818, 0.5760]	[-0.7320, -0.4773]	[-0.2484, 0.1659]
	22.70 (9.81)	42.03 (19.61)	12.77 (1.61)	4.23 (0.68)
250	0.8813 (0.0290)	0.4694 (0.0543)	-0.6224 (0.0636)	-0.0399 (0.1077)
	[0.8220, 0.9374]	[0.3664, 0.5805]	[-0.7384, -0.4895]	[-0.2522, 0.1736]
	15.01 (5.13)	29.06 (9.15)	17.20 (1.60)	4.52 (1.31)
500	0.8802 (0.0288)	0.4690 (0.0554)	-0.6245 (0.0657)	-0.0391 (0.1048)
	[0.8216, 0.9360]	[0.3622, 0.5794]	[-0.7429, -0.4870]	[-0.2433, 0.1700]
	16.33 (3.02)	24.83 (5.44)	18.42 (9.23)	4.55 (1.26)
2,000	0.8817 (0.0290)	0.4675 (0.0569)	-0.6247 (0.0654)	-0.0385 (0.1052)
	[0.8229, 0.9379]	[0.3587, 0.5815]	[-0.7428, -0.4879]	[-0.2447, 0.1714]
	10.67 (2.46)	18.50 (6.77)	12.31 (5.42)	3.55 (0.21)
3,500	0.8805 (0.0287)	0.4705 (0.0566)	-0.6239 (0.0652)	-0.0420 (0.1051)
	[0.8219, 0.9357]	[0.3624, 0.5844]	[-0.7421, -0.4859]	[-0.2470, 0.1665]
	15.16 (5.24)	24.36 (7.43)	12.24 (4.70)	4.95 (1.63)
5,000	0.8804 (0.0288)	0.4699 (0.0573)	-0.6249 (0.0659)	-0.0399 (0.1043)
	[0.8210, 0.9353]	[0.3622, 0.5858]	[-0.7432, -0.4844]	[-0.2440, 0.1683]
	12.70 (5.73)	21.04 (11.37)	10.74 (3.67)	4.56 (0.19)

値がないことが分かる。このことから、SVL モデルのパラメータの推定結果はステップサイズとステップ数に大きく依存しないと言える。

ボラティリティに対するショックの持続性を表すパラメータ  $\varphi$  について検証する。表6 - 表7から SVL モデルの  $\varphi$  の事後平均の値は 0.8792 から 0.8839 であり、これらが 1 に近いことからボラティリティに対するショックが高い持続性を持つことが分かる。この結果は過去の研究と整合的な結果となっている。

日経平均株価の収益率とボラティリティとの間の関係を表すパラメータである  $\rho$  について検証する。表6と表7から SVL モデルの  $\rho$  の事後平均の値はそれぞれ  $-0.6289$  から  $-0.6191$  と負の値であり、さらに、どのステップサイズとステップ数でも 95%信用区間はおおむね  $[-0.73, -0.48]$  程度であることから、 $\rho$  が負である事後確率は 95%より大きいと言える。 $\rho$  の事後平均が負の値であることは、日経平均株価の日次収益率とボラティリティの対数値  $h$  との間には、非対称性・レバレッジ効果の存在があることを示唆している。

図8 日経平均株価を用いた SVL モデルの推定結果。ステップサイズ依存性 (上段), ステップ数依存性 (下段)。



ステップサイズとステップ数を変えた場合の事後平均と 95%信用区間の変化を視覚的に理解するために、図8に日経平均株価の収益率を用いた SVL モデルのそれぞれの推定結果を示す。図8から、SVL モデルのパラメータ ( $\sigma_\eta, \phi, \rho, \mu$ ) がステップサイズとステップ数にほとんど依存していないことが分かる。

### 2.3 TOPIX を用いた SVL モデルの実証結果

TOPIX の日次収益率を用いた HMC 法による SVL モデルの推定結果について検証する。表8・表9は、SVL モデルの推定結果を示している。これらの表より、 $\phi$  の事後平均は 0.8921 から 0.8991,  $\sigma_\eta$  の

表8 TOPIX を用いた SVL モデルの推定結果；ステップサイズ依存性

( $\epsilon, N$ ) = (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000)

1行目：事後平均および事後標準偏差, 2行目：95%信用区間, 3行目：非効率因子および標準偏差。

ステップサイズ	$\phi$	$\sigma_\eta$	$\rho$	$\mu$
0.02	0.8921 (0.0260)	0.4457 (0.0494)	-0.6227 (0.0647)	-0.1739 (0.1083)
	[0.8405, 0.9458]	[0.3488, 0.5458]	[-0.7350, -0.4812]	[-0.3825, 0.0431]
	22.70 (9.81)	42.03 (19.61)	12.77 (1.61)	4.23 (0.68)
0.002	0.8971 (0.0254)	0.4318 (0.0503)	-0.6337 (0.0643)	-0.1682 (0.1093)
	[0.8463, 0.9484]	[0.3332, 0.5329]	[-0.7462, -0.4940]	[-0.3808, 0.0499]
	31.07 (5.65)	59.65 (12.23)	14.61 (0.69)	4.18 (0.42)
0.0002	0.8991 (0.0259)	0.4259 (0.0526)	-0.6387 (0.0647)	-0.1654 (0.1094)
	[0.8475, 0.9515]	[0.3237, 0.5286]	[-0.7514, -0.4965]	[-0.3768, 0.0555]
	46.61 (21.32)	83.23 (40.79)	23.64 (13.72)	5.38 (1.68)

事後平均は 0.4259 から 0.4457,  $\rho$  の事後平均は  $-0.6387$  から  $-0.6227$ ,  $\mu$  の事後平均は  $-0.1739$  から  $-0.1654$  の値であり, ステップサイズとステップ数を変えても, これらの事後平均から大きく外れる値がないことが分かる. このことから, SVL モデルのパラメータの推定結果はステップサイズとステップ数に大きく依存しないと言える.

ボラティリティに対するショックの持続性を表すパラメータ  $\varphi$  について検証する. 表 8 - 表 9 から SVL モデルの  $\varphi$  の事後平均の値は, 0.8921 から 0.8991 であり, これらが 1 に近いことからボラティリティに対するショックが高い持続性を持つことが分かる. この結果は過去の研究と整合的な結果となっている.

TOPIX の収益率とボラティリティとの間の関係を表すパラメータである  $\rho$  について検証する. 表 8 と表 9 から SVL モデルの  $\rho$  の事後平均の値はそれぞれ  $-0.6387$  から  $-0.6227$  と負の値であり, さらにどのステップサイズとステップ数でも 95% 信用区間は おおむね  $[-0.74, -0.48]$  程度であることから,  $\rho$  が負である事後確率は 95% より大きいと言える.  $\rho$  の事後平均が負の値であることは, 日経平均株価と同様に TOPIX の日次収益率とボラティリティの対数値  $h$  との間には, 非対称性・レバレッジ効果の存在があることを示唆している.

TOPIX を用いた SVL モデルの推定結果のグラフを図 9 に示す. それぞれのグラフは, 上段がステップサイズ依存性, 下段がステップ数依存性である. グラフ中の黒丸は事後平均, エラーバーは 95% 信用区間を示している. 図 9 より, SVL モデルのパラメータ ( $\sigma_n, \varphi, \rho, \mu$ ) はステップサイズとステップ数にほとんど依存していないことが分かる.

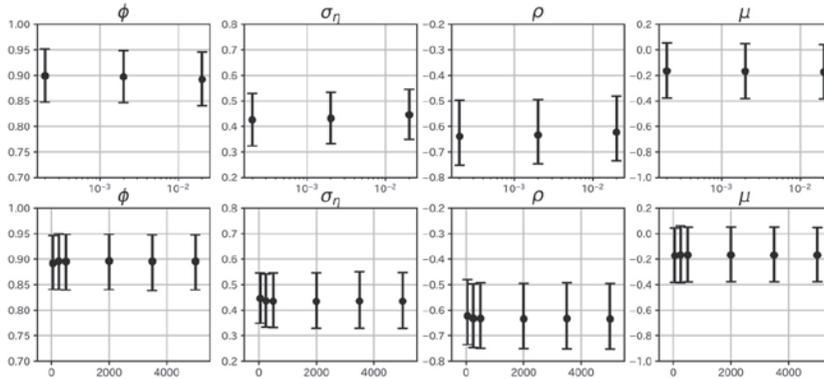
表 9 TOPIX を用いた SVL モデルの推定結果; ステップ数依存性

$\epsilon = 0.02$  (固定),  $N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$

1 行目: 事後平均および事後標準偏差, 2 行目: 95% 信用区間, 3 行目: 非効率因子および標準偏差.

ステップ数	$\varphi$	$\sigma_n$	$\rho$	$\mu$
50	0.8921 (0.0260)	0.4457 (0.0494)	- 0.6227 (0.1083)	- 0.1739 (0.0647)
	[0.8405, 0.9458]	[0.3488, 0.5458]	[- 0.7350, - 0.4812]	[- 0.3825, 0.0431]
	31.07 (5.65)	59.65 (12.23)	14.61 (0.69)	4.18 (0.42)
250	0.8959 (0.0276)	0.4362 (0.0539)	- 0.6320 (0.1119)	- 0.1681 (0.0637)
	[0.8402, 0.9498]	[0.3336, 0.5420]	[- 0.7470, - 0.4969]	[- 0.3855, 0.0584]
	26.09 (2.88)	49.12 (8.86)	14.37 (2.21)	3.97 (0.56)
500	0.8953 (0.0275)	0.4350 (0.0554)	- 0.6323 (0.1090)	- 0.1683 (0.0655)
	[0.8394, 0.9486]	[0.3319, 0.5459]	[- 0.7501, - 0.4930]	[- 0.3797, 0.0500]
	16.07 (5.66)	27.06 (12.58)	14.77 (3.43)	4.97 (1.10)
2,000	0.8962 (0.0272)	0.4344 (0.0558)	- 0.6338 (0.1088)	- 0.1678 (0.0655)
	[0.8402, 0.9487]	[0.3291, 0.5463]	[- 0.7510, - 0.4952]	[- 0.3780, 0.0509]
	14.55 (2.94)	22.28 (4.33)	10.56 (2.44)	3.38 (0.11)
3,500	0.8959 (0.0272)	0.4349 (0.0565)	- 0.6332 (0.1088)	- 0.1691 (0.0656)
	[0.8387, 0.9473]	[0.3294, 0.5505]	[- 0.7505, - 0.4944]	[- 0.3774, 0.0498]
	14.39 (1.45)	23.39 (4.60)	12.72 (2.15)	4.13 (0.28)
5,000	0.8956 (0.0271)	0.4352 (0.0562)	- 0.6343 (0.1079)	- 0.1687 (0.0657)
	[0.8398, 0.9473]	[0.3287, 0.5473]	[- 0.7527, - 0.4956]	[- 0.3780, 0.0472]
	12.87 (4.29)	24.02 (8.67)	10.28 (3.19)	3.62 (0.72)

図9 TOPIX を用いた SVL モデルの推定結果. ステップサイズ依存性(上段), ステップ数依存性(下段).



### 3 採択確率の依存性

リープフロッグ積分を用いた HMC 法での採択確率は, ステップサイズやステップ数に依存すると考えられている<sup>10)</sup>. HMC 法の特徴として, 多くのパラメータを同時にサンプリングしても採択確率は低下しない. そのため, 本論文では SVL モデルのパラメータ  $\theta$  と潜在変数  $h$  をそれぞれ同時にサンプリングしている. 表 10 - 表 11 にテストデータ, 日経平均株価, TOPIX を用いた SVL モデルのパラメータ  $\theta$  の採択確率を示す.

表 10 SVL モデルの  $\theta$  の採択確率; ステップサイズ依存性

( $\epsilon, N$ ) = (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000)

ステップサイズ	サンプルデータ	日経平均株価	TOPIX
0.02	0.9796 (0.0006)	0.9896 (0.0006)	0.9792 (0.0010)
0.002	0.9802 (0.0008)	0.9899 (0.0007)	0.9774 (0.0003)
0.0002	0.9797 (0.0010)	0.9901 (0.0008)	0.9760 (0.0006)

表 11 SVL モデルの  $\theta$  の採択確率; ステップ数依存性

$\epsilon = 0.02$  (固定),  $N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$

ステップ数	サンプルデータ	日経平均株価	TOPIX
50	0.9796 (0.0006)	0.9895 (0.0006)	0.9792 (0.0010)
250	0.9754 (0.0005)	0.9845 (0.0011)	0.9677 (0.0021)
500	0.9763 (0.0009)	0.9823 (0.0017)	0.9613 (0.0024)
2,000	0.9699 (0.0015)	0.9712 (0.0019)	0.9426 (0.0024)
3,500	0.9696 (0.0012)	0.9666 (0.0027)	0.9370 (0.0013)
5,000	0.9693 (0.0007)	0.9635 (0.0093)	0.9282 (0.0022)

<sup>10)</sup> 詳しくは, Takaishi (2000) を参照.

一般的にリープフロッグ積分のステップサイズとステップ数の2つのパラメータを大きくすると採択率は下がると言われている。しかし、表10 - 表11から、今回用いたリープフロッグ積分のパラメータの範囲では、採択率はリープフロッグ積分のパラメータには、ほぼ依存していないことが分かる。表11の採択率のステップ数による依存性を見ると、ステップ数が大きくなると日経平均株価の採択率が2~3%程度低下しているが、テストデータとTOPIXではそのような傾向は見られない。

日経平均株価とTOPIXにおけるSVLモデルの採択率の違いは特徴的である。比較のために表12 - 表13にテストデータ、日経平均株価、TOPIXを用いたSVモデルのパラメータの採択率を示す。

表12 SVモデルの $\theta$ の採択率；ステップサイズ依存性

$(\epsilon, N) = (0.02, 100), (0.002, 1,000), (0.0002, 10,000)$

ステップサイズ	サンプルデータ	日経平均株価	TOPIX
0.02	0.9620 (0.0036)	0.9096 (0.0058)	0.7357 (0.0085)
0.002	0.9594 (0.0025)	0.8976 (0.0059)	0.7101 (0.0044)
0.0002	0.9490 (0.0036)	0.8991 (0.0136)	0.7115 (0.0085)

表13 SVモデルの $\theta$ の採択率；ステップ数依存性

$\epsilon = 0.02$  (固定),  $N = 50, 250, 500, 2,000, 3,500, 5,000$

ステップ数	サンプルデータ	日経平均株価	TOPIX
50	0.9620 (0.0036)	0.9096 (0.0058)	0.7357 (0.0085)
250	0.9476 (0.0025)	0.9042 (0.0038)	0.7160 (0.0039)
500	0.9480 (0.0005)	0.9086 (0.0064)	0.7050 (0.0059)
2,000	0.9447 (0.0015)	0.8845 (0.0058)	0.6982 (0.0126)
3,500	0.9407 (0.0004)	0.8792 (0.0058)	0.6927 (0.0030)
5,000	0.9442 (0.0015)	0.8754 (0.0121)	0.7036 (0.0119)

SVモデルとSVLモデルの採択率を比較すると、SVモデルの場合では、日経平均株価とTOPIXの採択率は87%以上と69%以上であるが、SVLモデルの場合では、日経平均株価とTOPIXの採択率は96%以上と92%以上であることが分かる。これらの結果から、採択率は、リープフロッグ積分のステップサイズとステップ数にはあまり依存せず、モデルに依存することが示される。そこで、モデルのデータへの当てはまりを検証するために、周辺尤度を用いる。周辺尤度を $\widehat{ML}(y)$ とすると、

$$\widehat{ML}(y) = \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{f(y|\theta^j)} \right]^{-1} \quad (18)$$

で与えられる<sup>11)</sup>。ここで、 $\theta^j (j=1, \dots, n)$  はサンプリングされた確率標本である。表14にSVモデルとSVLモデルの推定された対数周辺尤度の平均値と標準偏差を示す。表14より、日経平均株価とTOPIXの両方でSVLモデルの対数周辺尤度はSVモデルよりも大きく、SVLモデルの方が当てはまり

<sup>11)</sup> 詳しくは、Newton and Raftery (1994) を参照。

が優れているモデルであると考えられる。このことから、採択確率はモデルのあてはまりと関係していると考えられる。

表 14 SVモデルとSVLモデルの周辺尤度

	日経平均株価	TOPIX
SVモデル	- 2450.5 (11.7)	- 2140.0 (26.1)
SVLモデル	- 2126.7 (15.6)	- 1943.5 (24.2)

#### 4 非効率性因子の依存性

非効率性因子とは無相関の標本から計算する標本平均と同じ分散を得るために何倍のサンプル数が必要であるかを表す効率性の尺度である。図10 - 図13に、テストデータ、日経平均株価、TOPIXを用いたSVモデルとSVLモデルの非効率性因子のステップサイズによる依存性とステップ数による依存性を示す。グラフ中の黒丸は3つのチェーンの平均値であり、エラーバーには標準偏差を用いた。

最初に、ステップサイズによる依存性について検証する。図10と図11から、テストデータ、日経平均株価、TOPIXを用いたSVモデルとSVLモデルの非効率性因子に明確なステップサイズによる依存性は見られない。次に、ステップ数による依存性について検証する。図12から、SVモデルのパラメータ $\phi$ と $\sigma_\eta$ の非効率性因子は、ステップ数が250までは大きく、ステップ数が500で最も小さくなり、ステップ数がそれ以上大きくなっても大きな変化がないことが分かる。また、図13から、SVLモデルの場合は、 $\phi$ と $\sigma_\eta$ の非効率性因子は、ステップ数が4000で最も小さくなり、それ以上では大きな変化がないことが分かる。このことから、非効率性因子を小さくするためには、ある程度大きなステップ数が必要だと結論づけられる。

図 10 SVモデルの非効率因子のステップサイズ依存性。テストデータ（上段）、日経平均株価（中段）、TOPIX（下段）。

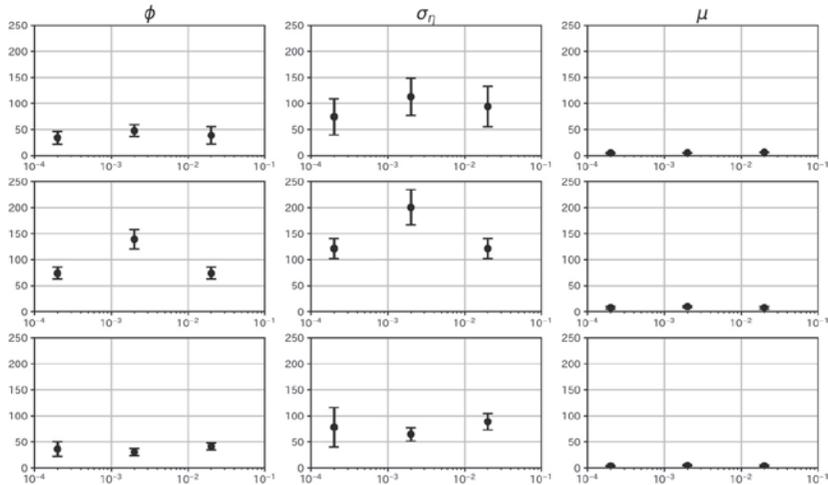


図 11 SVLモデルの非効率因子のステップサイズ依存性. テストデータ (上段), 日経平均株価 (中段), TOPIX (下段).

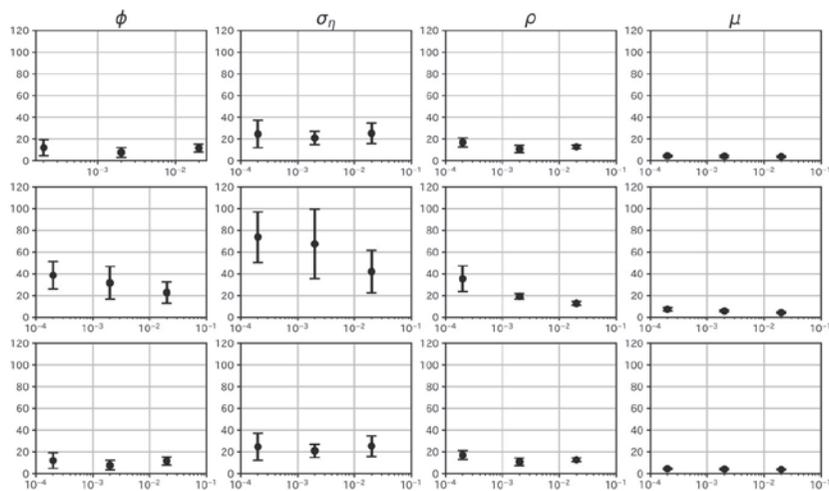


図 12 SVモデルの非効率因子のステップ数依存性. テストデータ (上段), 日経平均株価 (中段), TOPIX (下段).

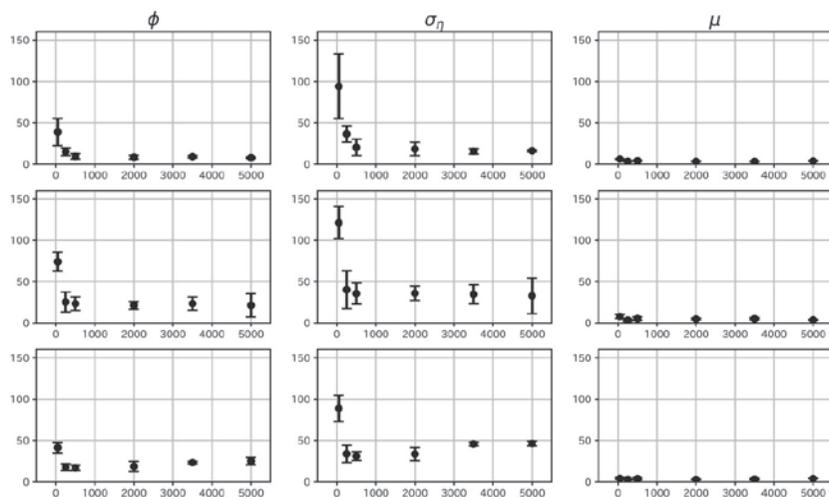
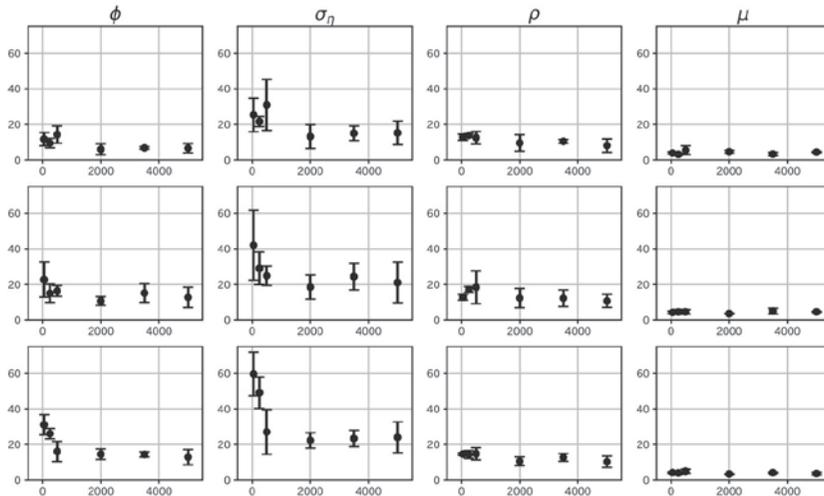


図13 SVLモデルの非効率因子のステップ数依存性. テストデータ(上段), 日経平均株価(中段), TOPIX(下段).



## VI. 結論と今後の課題

本論文では、テストデータ、日経平均株価とTOPIXの日次収益率を用いて、HMC法で一般的に用いられる数値積分法であるリープフロッグ積分のステップサイズとステップ数のSVLモデルのパラメータの推定結果への影響について詳細に調べた。ステップサイズとステップ数の2つのパラメータの値を変えて推定したSVLモデルのパラメータの事後平均と95%信用区間は、これらの2つのパラメータに依存せず、ほぼ同じ値であることが示された。また、SVLモデルのパラメータの採択確率もステップサイズとステップ数には依存せず、SVLモデルのデータの当てはまりに依存する可能性が示唆された。一方、MCMCの効率性を表す非効率性因子はステップサイズには依存しないが、ステップ数が小さいと非効率性因子が大きく、ステップ数が大きくなると非効率性因子が一定値に近づく傾向が明らかとなった。日経平均株価とTOPIXの日次収益率を用いたHMC法によるSVLモデルの実証分析から、ボラティリティに対するショックが高い持続性を持つこと、さらに、収益率とボラティリティとの間には負の相関があることが先行研究と同様に示された。

今後の課題としては、リープフロッグ積分に代わる高次の近似に基づくシンプレクティック数値積分法<sup>12)</sup>を用いてステップサイズやステップ数による影響について調べる必要がある。また、株価指数収益率の分布は正規分布よりも裾が厚く非対称な分布に従っているため、誤差分布に $t$ 分布<sup>13)</sup>や非対称 $t$ 分布<sup>14)</sup>等を用いたSVLモデルへのリープフロッグ積分のパラメータの依存性について調べることを考え

12) 4次のシンプレクティック数値積分法については、Forest and Ruth (1990) を参照。

13)  $t$ 分布以外にも一般化誤差分布 (Generalized Error Distribution; GED) や一般化 $t$ 分布 (Generalized  $t$  Distribution) などが考えられる。

14) 例えば、Nakajima and Omori (2010)、中島・大森 (2011) では、SVLモデルの誤差項の分布として一般化双曲型非対称 $t$ 分布 (generalized hyperbolic skewed student  $t$  distribution) を適用してMCMCにより実証分析を行なっている。

れる。リープフロッグ積分のステップサイズとステップ数をそれぞれ自動的に調整する Dual Averaging 法<sup>15)</sup>や No-U-Turn アルゴリズム<sup>16)</sup>が提唱されている。さらに、これを基に更新回数を学習アルゴリズムにより決定するアルゴリズム<sup>17)</sup>も提案されている。そのため SVL モデルにおいてこれらの方法の有効性について検討する必要がある。

#### 参考文献

- [1] 石原庸博・大森裕浩 (2008), 「TOPIX 収益率のマルコフ・スイッチング非対称確率的ボラティリティ変動モデルによる分析」, MTP フォーラム・日本ファイナンス学会『現代ファイナンス』, No.24, pp.75-100.
- [2] 大森裕浩・渡部敏明 (2008), 「MCMC 法とその確率的ボラティリティ変動モデルへの応用」, 国友直人・山本拓 [編] 『21 世紀の統計科学 I 社会・経済と統計科学』, 東京大学出版会, 第 9 章, pp.223-266.
- [3] 戸塚英臣・三井秀俊 (2020), 「ハミルトニアン・モンテカルロ法を用いた Stochastic Volatility モデルのベイズ推定による外国為替相場の分析」, 日本証券経済研究所『証券経済研究』, 第 112 号, pp.59-73.
- [4] 中島上智・大森裕浩 (2011), 「一般化双曲線非対称  $t$  分布を用いた確率的ボラティリティ変動モデルの推定と株価収益率データへの応用」, 日本統計学会『日本統計学会誌』, 第 40 巻, 第 2 号, pp.61-88.
- [5] 渡部敏明 (2005), 「確率的ボラティリティ変動モデル: 分析法とモデルの発展」, 日本大学経済学部経済科学研究所『紀要』, 第 35 号, pp.111-133.
- [6] Alder, B. J. and Wainwright, T. E. (1959), "Studies in Molecular Dynamics. I. General Method," *Journal of Chemical Physics*, 31(2), pp.459-466.
- [7] Duane, S., Kennedy, A. D., Pendleton, B. J., and Roweth, D. (1997), "Hybrid Monte Carlo," *Physics Letters*, B195(2), pp.216-222.
- [8] Forest, E. and Ruth, R. D. (1990), "Fourth-Order Symplectic Integration," *Physica*, D43(1), pp.105-117.
- [9] Gelman, A. (1996), "Inference and Monitoring Convergence," in Gilks, W. R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D. J. eds., *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, pp.131-143, Chapman & Hall.
- [10] Gelman, A. and Rubin, D. B. (1992), "Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences (with discussion)," *Statistical Science*, 7(4), pp.457-511.
- [11] Ghysels, E., A. C. Harvey and E. Renault (1996), "Stochastic Volatility," in G. S. Maddala and Rao, C. R. eds., *Handbook of Statistics*, Vol.14: Statistical Methods in Finance, pp.119-191, North-Holland; 小暮厚之・森平爽一郎 [監訳] (2004), 『ファイナンス統計学ハンドブック』, pp.117-189, 朝倉書店.
- [12] Girolami, M. and Calderhead, B. (2011), "Riemann Manifold Langevin and Hamiltonian Monte Carlo Methods," *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B 73, pp. 873-889.
- [13] Hoffmani, M. D. and Gelman, A. (2014), "The No-U-Turn Sampler: Adaptively Setting Path Lengths in Hamiltonian Monte Carlo," *Journal of Machine Learning Research*, 15, pp.1593-1623.
- [14] MacKay, D. J. C. (2003), *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*, Cambridge University Press.
- [15] Nakajima, J. and Omori, Y. (2012), "Stochastic Volatility Model with Leverage and Asymmetrically Heavy Tailed Error Using GH Skew Student's  $t$ -Distribution," *Computational Statistics & Data Analysis*, 56(11), pp.3690-3704.
- [16] Neal, R. M. (2011), "MCMC Using Hamiltonian Dynamics," in Brooks, S., Gelman, A., Jones, G. L. and Meng, X. - L. eds., *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, pp.113-162, Chapman & Hall.
- [17] Nesterov, Y. (2009), "Primal-Dual Subgradient Methods for Convex Problems," *Mathematical Programming*, 120, pp.221-259.
- [18] Newton, M. A. and Raftery, A. E. (1994), "Approximate Bayesian Inference by the Weighted Likelihood Bootstrap," *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B 56, pp.3-26.
- [19] Nugroho, D. B., and Morimoto, T. (2015), "Estimation of Realized Stochastic Volatility Models Using Hamiltonian Monte Carlo-Based Methods," *Computational Statistics*, 30, pp.491-516.
- [20] Omori, Y., Chib, S., Shephard, N. and Nakajima, J. (2007), "Stochastic Volatility with Leverage: Fast Likelihood

---

15) 詳しくは, Nesterov (2009) を参照.

16) 詳しくは, Hoffman and Gelman (2014) を参照.

17) 詳しくは, Wu et al. (2019) を参照.

- Inference," *Journal of Econometrics*, 140, pp.425-449.
- [21] Omori, Y. and Watanabe, T. (2008), "Block Sampler and Posterior Mode Estimation for Asymmetric Stochastic Volatility Models," *Computational Statistics & Data Analysis*, 52, pp.2892-2910.
- [22] Shephard, N. [ed.] (2005), *Stochastic Volatility: Selected Readings*, Oxford University Press.
- [23] Takahashi, M., Omori, Y. and Watanabe, T. (2009), "Estimating Stochastic Volatility Models Using Daily Returns and Realized Volatility Simultaneously," *Computational Statistics & Data Analysis*, 53, pp.2404-2426.
- [24] Takaishi, T. (2000), "Choice of Integrator in the Hybrid Monte Carlo Algorithm," *Computer Physics Communications*, 133(1), pp.6-17.
- [25] Takaishi, T. (2008), "Financial Time Series Analysis of SV Model by Hybrid Monte Carlo," *Lecture Notes in Computer Science*, 5226, pp.929-936.
- [26] Takaishi, T. (2009), "Bayesian Inference of Stochastic Volatility Model by Hybrid Monte Carlo," *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, 18, pp.1381-1396.
- [27] Takaishi, T. (2013), "Empirical Analysis of Stochastic Volatility Model by Hybrid Monte Carlo Algorithm," *Journal of Physics: Conference Series*, 423(1), 012021.
- [28] Yu, J. (2005), "On Leverage in a Stochastic Volatility Model," *Journal of Econometrics*, 127, pp.165-178.

本論文は所定の査読制度による審査を経たものである。

採択決定日：2021年4月22日

日本大学経済学部 経済集志・研究紀要編集委員会