数域半径不等式について

松　岡　勝　男[*]
瀬　尾　祐　貴[†]

概　要

幾何平均に関するノルム不等式は多くの研究者によって研究されています．そこで，本稿では，幾何平均に関する数域半径不等式について考察します。作用素ノルムはユニタリ不変ですが，数域半径はそうではなく，ユニタリ相似です．この違いを可逆な正作用素の幾何平均に関する数域半径不等式を考察することで明らかにします.

1　はじめに

「研究紀要」のこの号が，著者の一人松岡の退職記念号ということで，まず，共著者の瀬尾が，二人の出会いについて触れておきます．2009 年，スウェーデンの Luleå での国際数学研究集会 “Inequalities and Homogenization Theory”, AIHT 2009 conference で初めて，松岡先生とお会いしました．到着したのが真夜中でしたが，辺りは昼間のように明るく，しかし，そこに町の人は誰もいず，不思議な感覚を味わいました．その誰もいない通りを松岡先生とともに逍遥できたことはとても懐かしい記憶です．北極圏の中に入るという経験も初めてでした．海外での研究会ということで，心細かったのですが，その圧倒的な明るさと元気さとで，私自身も快適に研究会を過ごすことができました．本当にお世話になりました．その後，京都大学数理解析研究所 (RIMS) では，分野横断的な数学の研究会を主催され，何度かそこで発表をさせていただきました．自分の研究分野に専念するあまり他の先生方の研究やその研究目的を聞く機会がなかったのですが，この RIMS 研究集会に参加し，発表をする中で，少し横の広がりの中で，自分の位置を知ることができたのはとても良かったと思っています．教科横断というキーワードは数学教育の中で，これからますます重視される活動ですが，その具体的な実施をされていたと今は思っています.

さて，2019 年に，“The fifteenth workshop on numerical ranges and numerical radii”， WONRA という国際数学研究集会が東洋大学で開催されました．この研究集会はヒルベルト空間上の作用素の数

[*] 日本大学　経済学部
[†] 大阪教育大学　理数情報教育系　数学教育部門

域と数域半径の研究に特化した国際会議です．そこにおいて，瀬尾 [6] は，可逆な正作用素の幾何平均に関する数域半径不等式を導きました．本稿では，その中ででてきた 2 つの数域半径の差異をカントロヴィッチ定数を用いて評価できることを紹介します．このカントロヴィッチ定数は，算術調和平均の不等式の逆に出てくる定数ですが，これが幾何平均とも関連するのは，大変興味深いところです．

2　数域と数域半径

H を内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ をもつ複素ヒルベルト空間，$B(H)$ を H 上の（有界線形）作用素の全体とします．さて、作用素 A の数域と数域半径を，それぞれ

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1, x \in H\}$$

そして

$$w(A) = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1, x \in H\}$$

で定義します．これらの概念は，作用素の研究において有用であるばかりか，摂動理論，一般化固有値問題，数値解析，システム理論，ダイレーション理論等の他分野への応用においても極めて有用です．ここでは，とくに，数域半径に関する不等式について考えます．そのために，まず簡単に，ここで使う数学用語の復習をします．

作用素 A は，$\langle Ax, x\rangle \geq 0$ for all $x \in H$ を満たすとき，正作用素といい，$A \geq 0$ とかきます．また，A が可逆な正作用素のときは，$A > 0$ とかきます．自己共役な作用素 A と B に対して, $A - B$ が正作用素のとき，つまり，$\langle Ax, x\rangle \geq \langle Bx, x\rangle$ for all $x \in H$ が成り立つとき，$A \geq B$ とかきます．作用素 $A \in B(H)$ に対して, 作用素ノルム $\|A\|$ とスペクトル半径 $r(A)$ は，それぞれ,

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1, x \in H\}$$

そして

$$r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \text{ is spectrum in } A\}$$

と定義されます．このとき，次のことが知られています：

(2.1) $$r(A) \leq w(A) \leq \|A\| \qquad \text{for all } A \in B(H)$$

そして

(2.2) A が自己共役作用素ならば，$r(A) = w(A) = \|A\|$.

さて，正の実数 $a, b > 0$ に対して，その加重幾何平均は，$\alpha \in [0,1]$ に対して，$a^{1-\alpha}b^{\alpha}$ で定義されます．A と B が可逆な正作用素のとき，その非可換版は，単純に考えれば，$A^{1-\alpha}B^{\alpha}$ になりますが，これは

自己共役作用素ですらないし，幾何平均としてもつべき性質も満たしていません．そこで，久保-安藤 [3] は，その非可換版としての α-幾何平均を

$$A \sharp_\alpha B = A^{\frac{1}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right)^\alpha A^{\frac{1}{2}} \qquad \text{for all } \alpha \in [0,1]$$

と定義しました．これは勿論可逆な正作用素になり，また，幾何平均として持つべきさまざまな性質をすべて満たすことが知られています．さらに，その次数を一般的な実数に拡張したものも、同じ形式で次のようにかくことにします：

$$A \natural_\beta B = A^{\frac{1}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right)^\beta A^{\frac{1}{2}} \qquad \text{for all } \beta \notin [0,1].$$

このように非可換版がいくつかある場合，それらの関係を調べることは作用素論的には重要です．実際，次のノルム不等式が成り立ちます ([4])：

$$\|A \sharp_\alpha B\| \le \left\|A^{1-\alpha} B^\alpha\right\| \qquad \text{for all } \alpha \in [0,1]. \tag{2.3}$$

では、数域半径についてはどうでしょうか．これについても、次の不等式が知られています：

$$w(A \sharp_\alpha B) \le w(A^{1-\alpha} B^\alpha) \qquad \text{for all } \alpha \in [0,1]. \tag{2.4}$$

実際，作用素論のこれまでの結果を用いると，

$$\begin{aligned} w(A \sharp_\alpha B) = \|A \sharp_\alpha B\| &= \left\|A^{1/2}(A^{-1/2} B A^{-1/2})^\alpha A^{1/2}\right\| \\ &\le \left\|A^{\frac{1-\alpha}{2}} B^\alpha A^{\frac{1-\alpha}{2}}\right\| \quad \text{by } 0 < \alpha \le 1 \\ &= r(A^{\frac{1-\alpha}{2}} B^\alpha A^{\frac{1-\alpha}{2}}) \quad \text{by (2.2)} \\ &= r(A^{1-\alpha} B^\alpha) \quad \text{by } r(XY) = r(YX) \\ &\le w(A^{1-\alpha} B^\alpha) \quad \text{by (2.1)} \end{aligned}$$

が成り立ちます．

この結果を眺めると，数域半径不等式 (2.4) は，ノルム不等式 (2.3) の改良になっていることが分かります．実際，(2.4) から (2.1) を用いれば、すぐに (2.3) を得ることができます．

ところで，[2] においては，幾何平均の指数が $[0,1]$ 以外の場合が考察され，そのとき次の結果が得られました：

$$\|A \natural_\beta B\| \le \left\|A^{1-\beta} B^\beta\right\| \qquad \text{for all } \beta \in [-1, -\tfrac{1}{2}]. \tag{2.5}$$

これより，上の考察を眺めてみれば，次の数域半径不等式が成り立つのではないかと予想できます：

$$w(A \natural_\beta B) \le w(A^{1-\beta} B^\beta) \qquad \text{for all } \beta \in [-1, -\tfrac{1}{2}]. \tag{2.6}$$

大変素直な類推ですが一般的には成り立ちません．作用素ノルムはユニタリ不変ですが、数域半径はそうではなく、ユニタリ相似でしかありません．実際，$\beta=-\frac{1}{2}$ のときに，(2.6) に対する次の反例があります:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad \text{そして} \qquad B=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$$

とおくと，

$$A\,\natural_{-\frac{1}{2}}\,B=A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B^{-1}A^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{3}&0\\0&0\end{pmatrix}\quad \text{そして}\quad A^{\frac{3}{2}}B^{-\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0\end{pmatrix}$$

となり，またこのとき，$w(A^{\frac{3}{2}}B^{-\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3})<w(A\,\natural_{-\frac{1}{2}}\,B)=\frac{\sqrt{5}}{3}$ となり，(2.6) が成り立ちません．ノルムに対して，数域半径はグーンと減少しているようです．

そこで，本稿では，その差異をカントロヴィッチ係数を用いることで明らかにします．

3　結　果

まず，証明で必要となる次の Araki-Cordes 不等式と逆 Araki-Cordes 不等式 [1, Theorem 5.9 and Theorem 5.11] について述べます: A と B を可逆な正作用素で，$0<m\le A\le M$ を満たす正の定数 $0<m<M$ があるとします．そして，$h=\frac{M}{m}$ とおきます．そのとき，

(3.1) $$K(h,p)\,\|BAB\|^p\le\|B^pA^pB^p\|\le\|BAB\|^p \qquad \text{for all } 0<p\le 1$$

そして

(3.2) $$\|BAB\|^p\le\|B^pA^pB^p\|\le K(h,p)\,\|BAB\|^p \qquad \text{for all } p\ge 1$$

が成り立ちます．ただし，$K(h,p)$ は一般化カントロヴィッチ定数で，次で定義されています：

(3.3) $$K(h,p)=\frac{h^p-h}{(p-1)(h-1)}\left(\frac{p-1}{p}\frac{h^p-1}{h^p-h}\right)^p \qquad \text{for all } p\in\mathbb{R}.$$

このとき，$p=2$ のときの

$$K(h,2)=\frac{(h+1)^2}{4h}=\frac{(M+m)^2}{4Mm}$$

を用いると，算術調和平均の不等式の逆が成り立ちます： $x_1,\dots,x_n\in[m,M]$ と $\sum_{i=1}^n\omega_i=1$ を満たす $\omega_1,\dots,\omega_n\in[0,1]$ に対して，

$$\sum_{i=1}^n\omega_ix_i\le\frac{(M+m)^2}{4Mm}\left(\sum_{i=1}^n\omega_ix_i^{-1}\right)^{-1}$$

(詳しくは，文献 [1, Definition 2.2] を参照).

さて，これらを用いることで，幾何平均に関する次の数域半径不等式を得ることができます：

Theorem 3.1 Let A and B be positive invertible operators on H such that $0 < m \le A, B \le M$ for some scalars $0 < m < M$. Put $h = \frac{M}{m}$. Then

$$w(A \natural_\alpha B) \le K(h, -\alpha)^{-1} w(A^{1-\alpha} B^\alpha) \qquad \text{for all } -1 \le \alpha < 0. \tag{3.4}$$

証明 $-1 \le \alpha < 0$ に対して，

$$\begin{aligned} w(A \natural_\alpha B) &= \left\| A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}} \right\| \\ &= \left\| A^{\frac{1}{2}} (A^{\frac{1}{2}} B^{-1} A^{\frac{1}{2}})^{-\alpha} A^{\frac{1}{2}} \right\| \\ &\le \left\| A^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} B^{-1} A^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} \right\|^{-\alpha} \qquad \text{by } -\alpha \in [0,1] \text{ and (3.1)} \\ &\le K(h^\alpha, -\frac{1}{\alpha})^{-\alpha} \left\| A^{\frac{1-\alpha}{2}} B^\alpha A^{\frac{1-\alpha}{2}} \right\| \quad \text{by } -\tfrac{1}{\alpha} \ge 1 \text{ and (3.2)} \\ &\le K(h, -\alpha)^{-1} w(A^{1-\alpha} B^\alpha) \end{aligned}$$

が成り立ちます．ここで，一般化カントロヴィッチ定数に関して，$K(h^\alpha, \frac{-1}{\alpha})^{\frac{1}{-1}} = K(h^{-1}, \frac{\alpha}{-1})^{-\frac{1}{\alpha}}$ が成り立つので，

$$K(h^\alpha, -\frac{1}{\alpha})^{-\alpha} = K(h^{-1}, -\alpha)^{-1} = K(h, -\alpha)^{-1}$$

がわかります． □

注意 この定数に関して，$\alpha = 0$ のとき，$w(A \natural_\alpha B) = w(A) = w(A^{1-\alpha} B^\alpha)$ で，$K(h, -\alpha)^{-1} = 1$ であり，同様に，$\alpha = 1$ のとき，$w(A \natural_\alpha B) = w(B) = w(A^{1-\alpha} B^\alpha)$ で，$K(h, -\alpha)^{-1} = 1$ になります．

補足 (2.4) の証明について，もう少し補足をしておきます．ポイントは，

$$\|A \sharp_\alpha B\| \le \left\| A^{\frac{1-\alpha}{2}} B^\alpha A^{\frac{1-\alpha}{2}} \right\| \tag{3.5}$$

の不等式です．この証明の概略を述べます ([5])．まず，Ando-Hiai 不等式により

$$\left\| (A^p \sharp_\alpha B^p)^{1/p} \right\| \le \left\| (A^q \sharp_\alpha B^q)^{1/q} \right\| \qquad \text{for all } 0 < q < p$$

がわかり，Lie-Trotter formula により，右辺において

$$(A^q \sharp_\alpha B^q)^{1/q} \mapsto e^{(1-\alpha)\log A + \alpha \log B} \qquad \text{as } q \to 0$$

となるので，$q \to 0$, $p = 1$ とすると，

$$\|A \sharp_\alpha B\| \le \left\| e^{(1-\alpha)\log A + \alpha \log B} \right\|$$

が成り立ちます．また，Araki-Cordes 不等式 (3.1) により

$$\left\| e^{p\frac{1-\alpha}{2}\log A} e^{p\alpha \log B} e^{p\frac{1-\alpha}{2}\log A} \right\|^{1/p} \le \left\| e^{\frac{1-\alpha}{2}\log A} e^{\alpha \log B} e^{\frac{1-\alpha}{2}\log A} \right\| \qquad \text{for } 0 < p < 1$$

となり，再び Lie-Trotter formula を用いて

$$\left\| e^{(1-\alpha)\log A + \alpha \log B} \right\| \le \left\| A^{\frac{1-\alpha}{2}} B^{\alpha} A^{\frac{1-\alpha}{2}} \right\|$$

が成り立ちます．これで、(3.5) がわかりました．

最後に，$\alpha \notin [-1, 1]$ のときに，２つの幾何平均の数域半径 $w(A \natural_\alpha B)$ と $w(A^{1-\alpha}B^{\alpha})$ の評価について，同じように調べることができますが，それは別稿に譲りたいと思います．

謝辞． 本研究は JSPS 科研費 JP20K03663 (松岡勝男)，JP23K03249 (瀬尾祐貴) の助成を受けたものです．

参考文献

[1] M. Fujii, J. Mićić Hot, J. Pečarić and Y. Seo, *Recent Developments of Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Monographs in Inequalities 4, Element, Zagreb, 2012.

[2] M. Kian and Y. Seo, *Norm inequalities related to the matrix geometric mean of negative power*, Sci. Math. Japon., (in Editione Electronica) e-2018, Whole Number 31, 2018-7.

[3] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann. **246** (1980), 205–224.

[4] R. Nakamoto and Y. Seo, *A complement of the Ando-Hiai inequality and norm inequalities for the geometric mean*, Nihonkai Math. J., **18** (2007), 43–50.

[5] Y. Seo, *Norm inequalities for the chaotically geometric mean and its reverse*, Journal of Mathematical Inequalities, **1** (2007), 39–43.

[6] Y. Seo, *Numerical radius inequalities related to the geometric means of negative power*, Operators and Matrices, **13** (2019), 489–493.