内 部 可 換 考

（不思議なこともあるもんだ）

髙　　橋　　眞　　映
（山形大学名誉教授、数学・ゲーム工房広報部長）

本論は次の 13 節と参考文献からなっています。また数学的な部分は極力簡明に書き、どなたでもその雰囲気が感じ取れるようにしました。

I. 松岡勝男さんとの出会い

松岡勝男さんが今年 3 月末日で日本大学をご退職された事、誠に慶賀に堪えません。本当にご苦労様でした。

さて松岡さんとはいつ知り合ったのか、政治家ではないけど全く記憶にありません。しかし昔から年賀状のやり取りをしています。何時だったか定かではありませんが、年賀状に家族写真が載っていて、可愛いお嬢さん（達）が写っていました。

所で、ある日突然自宅に電話が掛かって来て、誰かと思いきや、「松岡ですが ……」と云う。何事か

と思えば、来年長期アメリカ出張をするので、非常勤をお願いできないかと云う。その様な訳で、日大で、経済数学 I（23 年度）と微分積分 I（23 年度）を担当した事がありました。流石は日大で、その非常勤講師室の立派だった事にびっくりした思い出があります。

松岡さんは、新潟大の斉藤吉助さんの後をついで RIMS 共同研究の代表者として活躍されていますが、いつの間にか彼に引っ張り出され、講演や座長、懇親会での挨拶をさせられました。これだけ松岡さんとは関係があるのに、何時何処で出会い、どうして親しくなったのか全く定かではありません。松岡さんのご専門は、Morrey-Orlicz spaces, Campanato spaces, Riesz potential operators,Calderon-Zygmund operators 等々に関する実解析学的ご研究で、僕の専門はどちらかと云えば関数解析的研究なので、両者に全くの共通部分はありません。不思議な話ですね。ただ云える事は、彼の友人知人と僕の友人知人の共通部分を取ると、意外と多いことです。実際、安西一夫、曽布川拓也、Lech Maligranda, 小森（古谷）康雄、中井英一、澤野嘉宏、斉藤吉助、高橋泰嗣の各氏等々です。然しながら曽布川拓也さんなども、昔僕が佐藤亮太郎先生に集中講義に呼ばれて岡山大に行ったとき、その懇親会に参加して頂いたのですが、それ以前どのようにして知り合ったのか、これも全く定かではありません。

II. 松岡勝男さんからのメール

今年の 3 月 6 日に松岡さんから突然メールを頂きました。そこには「…… 私事で恐縮ですが、いよいよこの 3 月 31 日をもちまして日本大学経済学部を退職（70 歳）することになりました。在職中はいろいろなことでお骨折り頂いたこと、大変感謝しております。誠に有難うございました。 ……原文」と書いてありました。実は僕は彼が慶応大ご出身である事は知っていましたが、年齢までは知りませんでした。このメールを見て僕は、13 年前山形大学を 65 歳で定年退職した事を思い出し、懐かしさと同時に松岡さんは僕より 8 歳くらい若いのかと初めて知りました。

そのあと彼のメールは「…… 私の退職に際しまして、学部の「研究紀要」において、退職記念号を発行して頂けることになりました。そこでお願いですが、是非この退職記念号に、論文・研究ノートなど何でも構いませんので、ご寄稿をして頂けないでしょうか。…… 原文」と続きました。これを見て僕は、大学の紀要に個人の退職記念号を載せるとは日大も粋な計らいをするものだとびっくりすると同時に、松岡さんの日大への貢献度の大きさを思い知らされました。しかし松岡さんは今だに論文を書かれ、外国の Journal に掲載されておられる豪のものですから、そのパワーから見て、さもありなんと思いました。

III. 依頼原稿とそのタイトル

松岡さんの折角のお願いに、僕は直ぐ了承のメールを送り、安請け合いをしてしまいました。前にも僕が定年の年、大阪教育大の藤井正俊さんに「日本数理科学協会に何か一文を寄せないか」 とお願い

され安請け合いしたものの、何を書けば良いか苦労したものです。苦労の挙げ句、美意識を主題にした「美人考」と云うタイトルが目に浮かび、その後は割とスラスラ書けた記憶があります [16]。

今度の場合も構想が仲々出て来ず苦労しました。しかし 4 月の末、日本大学経済学部研究事務課の山口様から正式に原稿依頼のメールを頂き、段々そのモードに入って来ました。僕の場合は「依頼原稿」に該当し、論文、研究ノート、研究資料、 書評の全ての形式を含むそうです。それで、この 4 月、5 月に経験した内部可換代数を巡る不思議な出来事が面白く、これだと感じました。それでタイトルも「内部可換考」として、書き始める事にしました。

IV. ABC 予想で内部可換代数を感じる

僕の記録によると、2017 年 12 月 16 日の朝日新聞の一面に「数学の超難問 ABC 予想（証明）」と見出しを書き、京大・望月教授論文掲載へと踊り書きがありました。そして次のように書かれていました：

望月さんは 19 歳で名門プリンストン大学を卒業し、 32 歳で世界トップレベルの数理研で教授に就任。代数と幾何を融合した新理論「宇宙際タイヒミュラー理論」を 10 年近くかけて一人で構築し、ABC 予想の証明に挑んだ。

所で ABC 予想は 1985 年に D. マッサーと J. オステルレにより提示された整数論の未解決問題で、整数論の様々な問題の根幹に関わる重要な予想と位置づけられています。しかし残念ながらその日、朝日新聞以外は報道されませんでした。

さて時は流れ昨年の 4 月、NHK で ABC 予想に関する詳しい番組が報道されました。専門外の僕には難解な話でしたが、大要は「数学はこれまで違うものを同じと見なす発想で発展して来たが、望月教授は、その逆の同じものを違うものと見なす発想をし、その両者を組み合わ、宇宙際タイヒミューラー理論を作り上げた」と云うものでした。当時、実生活とは無縁の数学の深淵的な世界を NHK が番組に取り上げる見識の高さには敬意を表したものです。

所で良く知られた相加相乗平均不等式やその一般化である Young の不等式は、足し算と掛け算をうまく分離したものでそれ故応用範囲が広いのですが、 ABC 予想もこの足し算と掛け算をうまく分離した予想不等式故、応用範囲が広いようです。然しながら、ABC 予想の難しさは、この場合掛け算と足し算が深く入り組んでいて、その分離が難しいと云うものだそうです。実際平方関数は掛け算は保存するのに足し算は全く保存しないからであると云う様な説明がその番組でありました。

これは大変難解な話なのですが、このとき僕は、「そうか、平方写像は代数構造と深く関係するのではないか」と感じました。バランスセラピー大学発行のカレンダーの 2 日目は「大切なことは、何があるかではなく、何を感じるかである」と書いてあります。正しく僕はこのとき後述の内部可換代数を感じたのでした。

V. 平方写像が導く代数構造

今 A を (可換) 体 K 上の代数とします。つまり、A は積と呼ばれる 2 項演算を持つ K 上のベクトル空間で、ベクトル和が積によって分配されます。積が結合律を満たす、つまり $(xy)z = x(yz)$ $(x, y, z \in A)$ が満たされるとき、A は結合的代数と言い、代数の世界では結合的代数がもっとも一般的で、多くの理論を有しています。他に単位的代数、可換代数、反可換代数、zeropotent 代数等が個人的には良く目に付きます。

所で我々の世界では、不変、保存、同時、可換（交換可能）などの概念は経験上大切な事を知っています。例えば男の子がある朝、鏡を見ると女の子に変わっていたらびっくりしますが、またこの様な事が度々あれば生活上不便です。僕はこれらの概念を総称して「愛」と呼んでいます。数学の世界では特にこの概念が重要で、それ故僕は講義や講演などで良く「数学は愛である」と標榜したものです（笑い）。

さて前節の平方写像とその代数構造の保存性を考えましょう。代数 A からそれ自身への平方写像 f が和を保存したら、つまり

$$f(x + y) = f(x) + f(y)\ (x, y \in A)$$

が成り立つならば、それは何でしょうか？これは簡単な計算で反可換代数です。つまり、$xy = -yx$ $(x, y \in A)$ が満たされます。上の条件は先に和を取って平方しても、平方してから和を取っても変わらない事を主張していますから、これは平方と和が可換であると云っています。

それでは平方写像 f が積を保存したら、つまり

$$f(xy) = f(x)f(y)\ (x, y \in A)$$

が成り立つならば、それは何でしょうか？実は調べてみてもその様な代数は見当たらないのです。これ程自明な概念から導出される代数なのに、全く不思議としか言いようがありません。上の条件は平方と積が可換であると云っています。

他に平方写像 f が A の代数構造を決定するものとして、全射、零写像などがあります。f が全射つまり $f(A) = A$ が満たされるとき、A は square-rootable であると言います。また f が零写像つまり $f(A) = \{0\}$ が満たされるとき、A は zeropotent であると言います。Zeropotent 代数の代表的なものが 良く知られた Lie 代数です。

さて僕の専門は関数解析学ですが、専門でもない代数に何故僕が興味を持ったか、次の 6 節と 7 節で話しましょう。

VI. 米沢時代

1987 年の 3 月だったと思いますが、実解析学分野の大御所だった渡利千波先生が、僕を山形大学工学部助教授に迎えたいと茨城大学理学部に訪ねてこられました。僕は、それまでの足掛け 18 年の長い

助手時代に終始符を打ち、その年の 10 月 1 日に米沢に転任しました。渡利先生には複素解析学担当を言われていたので、赴任までの 6 ヶ月間、虚数単位が、ある関数として目に見えるような事を考えました。またその関数に基づき「虚数踊り」も考案しました。本質的にものを作る工学部の学生さん達が、通常「嘘の数」と思われる虚数を実際目の当たりにする事で、安心して複素解析学を学べるようにと考えたからです。

赴任後、複素数は平面上の実結合的代数構造として何者かと言う事を考え、2 次元実結合的代数の分類を素人ながらやってみました。これは 8 個に分類され、その分類をもとに、「高校から習う複素数は微積分が行える唯一の数で、それ故これは天恵である」等と講義に反映したものでした。

さて 2 次元実結合的代数の分類が終わったので、3 次元実結合的代数の分類に取り掛かったのですが、これが僕には難解で、クロス積のようなもので、少し分類が出来ただけで、僕の力量ではとても手に負えませんでした。それで、一旦そのままにして、本来の僕の数学に戻り、2010 年の定年退職を迎えました。

VII. 非常勤時代

単身赴任だった米沢時代に幕を下ろした僕は、家族の待つ船橋に戻りました。その後、それまでの人間関係のお陰で色々な大学に非常勤で勤めることが出来ました。そのうちの一つが塚田真さんに招かれた東邦大学でした。東邦大では、代数学がご専門の小林羑治さんがおられました。小林さんは始め僕の囲碁の師匠だったのですが、何時のまにか数学の師匠に代わっていました。それで例の 3 次元実結合的代数の分類問題の話をし、興味を持って頂きました。

東邦大では代数系がご専門の白柳潔さんもおられました。白柳さんは、東海大から 2010 年東邦大に転任されたようです。その点、常勤非常勤を別にすれば、東邦大では僕と同期と云うわけです。

僕は米沢時代、ベクトル解析も担当していて、ベクトルの外積が頭に残っていました。それで、外積代数を一般化した zeropotent 代数なるものを考え、その 3 次元版の分類問題を小林さんや塚田さんと一緒に研究していました。この zeropotent 代数は最初僕が「suqare-zero algebra」と云っていたのですが、小林師匠が「zeropotent algebra」の方が良いと云う事でそう決まった経緯があります。然しながら後で分かったのですが、インターネットで調べると「zeropotent」の定義が先にあり、表現は違いますが、我々の定義と同値である事が分かりました。しかし論文にはならず、定義だけで終わったようです。我々の最初の zeropotent 論文 [6] を審査した referee さん（後述）はこの事を知らなかったようです。不思議な事もあるものでした。

所であるとき、東邦大理学部長主催の非常勤講師と話し合う会（いわゆる飲み会）で何故か白柳さんと零除算や zeropotent algebra の話で盛り上がり、それで白柳さんともお付き合いができました。

上記の 2 つの分類問題は、小林、塚田、白柳のお三方と僕とで、セミナーをやりました。両方共小林さんの卓越した数学的アイデアで論文が仕上がりました。前者 [7] は別称「温故知新論文」と言い、

2021 年に Asian-European J. Math. に掲載されましたが、この雑誌で最近 3 年間でもっとも多く読まれた論文第一位に挙げられています。実際アクセス数 9,000 回を超え、3 桁台の第二位論文を大きく引き離しています。後者は、計 3 編の論文（[6], [9], [10]）に纏められましたが、何れも Communication in Math. と云う雑誌にすんなりと掲載されました。その最初の論文 [6] は、それを査読した referee さん（前述）から

「Comments to the Author: This is a very enjoyable paper to read. I recommend publication.」と言う最大限の評価をしてもらいました。僕の長い研究生活でこんな賛辞をもらった事はありません。この賛辞をもらったとき共著者皆さんと感動を分け合い、拙宅で女房の手料理とともに皆で祝杯を上げました。これぞ至福のときでした。

VIII. 自由の身

長宗雄さんのお招きで神奈川大学でも非常勤をしていましたが、神大を最後に 75 歳で非常勤時代に幕を下ろしました。丁度この年の春には例の新型コロナウイルスが日本でも感染爆発し、各大学はオンライン授業に入りました。コンピュータに全く弱い僕は、あと一年でも非常勤時代が続いたらと思うとゾッとし、これは天の配剤かと喜んだものです。

さて所謂自由の身となってからは、もう講義の心配もないので、毎日が研究の連続でした。記録によると北大の井上純治先生から、「Generalized group algebras on LCA groups（2020/2/27)」と題するプレプリントが届き、その後随分勉強させられました（笑い）。井上先生主導の論文は内容もどんどん良くなり、表題も変えました。やっとこの 5 月、3 年 3 ヶ月掛かって論文が完成したので、論文優先権を得るため直ぐ様 Cornell Archive に載せることにしました。しかしコンピュータに弱い僕は論外ですが、井上先生が頑張ってもその手続は難しく、結局かってコーネル大学に赴任された事のある白柳さんの協力で、無事そこに載せる事が出来ました（[4])。しかし情報社会とは凄いもので、一週間後 Segal 環の大御所である H. G. Feichtinger がそれを見て、井上先生に「…… I find very interesting of course. ……」と云うメールを送ったそうです。井上先生はびっくりされたそうですが、僕も井上先生から知らされて、びっくりしました。これもこの歳になっての至福のときでした。

実はこの論文と同時進行していた井上先生主導の「一般化 Poisson 和公式」に関する論文が先に J. Korean Math. Soc. に昨年掲載され喜んでいます（[3])。井上先生は既に「幸齢者」（cf. [18]）で、歳をとって研究をやっていく大変さを仰っていました。しかし先生は同時にその楽しさも仰っていました。「幸齢者」でまだ数学を研究されておられる先生は、僕の知る限り、僕の人生の師匠である數田公三先生しか思い浮かびません。これは素晴らしい事で本当に尊敬します。

僕はこの他に正数空間や実数空間上の連続な 2 項演算の分配律を茨城大の岡裕和さん、日大の丹羽典朗さん、新潟大の三浦毅さん達と共同研究をしていて、その一つが、今年 Publ. Math. Derecen に掲載されました（[8])。これはこの分配律シリーズの最初の論文 [11]（これは可愛がって頂いた故古田孝

之先生に捧げました）を encouragement して頂いた富山淳先生の 90 歳誕生日を記念して捧げました（論文が出来た当時は先生は丁度 90 歳になられましたが、Journal 掲載にちょっと手間取りました。）

これらの研究活動の最中に、4 節で述べたように、ABC 予想に関する NHK 番組を見て、内部可換代数を感じたと云うわけです。次節以降でその後の様子を書きましょう。

IX. 内部可換代数とそのネーミング

いま A を体 K 上の代数とします。A からそれ自身への平方写像 f を考え、これが積を保存するとします。従って $f(xy) = f(x)f(y)\ (x, y \in A)$ ですが、これは勿論 $(xy)^2 = x^2y^2\ (x, y \in A)$ の事です。もし A が可換且つ結合的ならば、平方写像は積を保存します。実際、

$$(xy)^2 = (xy)(xy) = x(y(xy)) = x((xy)y) = (x(xy))y = (x^2y)y = x^2y^2\ (x, y \in A)$$

だからです（可換性を 1 回、結合性を 4 回使っている）。

それでは平方写像が積を保存する代数は結合的可換代数しかないのかと云う疑問が湧きますが、「いやそんな事はない」と直感します。それで先ずネーミングですが、等式 $(xy)(xy) = (xx)(yy)$ の両辺の内部を交換しても変わらない事から、僕は始めその様な代数を「endo-commutative algebra」と名付けました。「endo-」は「内」を表すギリシャ語の接頭辞なので、訳せば内部可換代数です。

所で急性ウイルス性胃腸炎を罹った同居の娘が夜中に痛み出し、それで東船橋病院に運びました。娘が点滴を打ってもらい、そのままベットで寝ている間、僕は別のベッドの中で内部可換代数の事を考え、そのネーミングに疑問を抱きました。とい云うのも、等式 $(xy)(xy) = (xx)(yy)$ の両辺の外部を交換しても、全ての $x, y \in A$ について成り立つことには変わりないという事に気がついたからです。病院から帰って、この事を白柳さんに相談しました。彼から「 $(xy)(xy)$ を基盤として、この内部を交換すれば、$(xx)(yy)$ となり、全ての x, y についてこの両方が等しい事と平方写像が積を保存する事は同値であり、また外部を交換すれば、$(yy)(xx)$ となり、全ての x, y についてこの両方が等しい事と平方写像が積と逆積に関して準同型である事は同値である。それ故内部可換と外部可換は別物である」と云う意味の事を教えて頂き、それで一応安心しました。それ故今後は「exo-commutative algebras」の研究もしなければならないようです（笑い）。

しかしインターネットで調べて見ますと、pre-commutative や pseudo-commutative は既に違う意味で使われていました。他に「Groupoid G の全ての元 x, y, u, v に対して、$(xy)(uv) = (xu)(yv)$ が成り立つとき G は medial と云う」とあります。この伝で行きますと、endo-commutative は「weakly medial 」とか「diagonally medial」が考えられますが、結局相談の上、最初のネーミングに戻ることにしました。

X. 自明体上の 2 次元内部可換代数と献呈論文

僕は先ず全ての 2 次元内部可換代数を分類してやろうと考えました。その頃白柳さんとこの様な話をメールでやり取りし、そのうち塚田さんも入ってもらいました。やっているうち、基礎体 K が自明の場合と非自明の場合では分類の手法に違いが出る事が分かり、先ず自明体上の 2 次元内部可換代数の分類を始めました。その様な代数は全部で $2^4 = 256$ 個ありますが、これを代数同型で分類する訳です。単純な考えでは、この中から 2 組取る数は ${}_{256}C_2$=32,640 であり、その数だけ当該代数達が代数同型かそうでないかを調査すればよい訳ですが、実際には不可能で、美意識も何もありません。そこでかって小林さんが用いた手法 [5] を思い出し、それに基づく事にしました。その結果綺麗な定理が出来ました。それは「代数同型を除いて、curled algebras は 8 個、straight algebras は 13 個の計 21 個に分類され、その内、8 個だけが、単位的、可換、結合的、zeropotent の何れでもない」というものでした。これは 9 節の疑問の一つの答えであり、直感の正しさが分かりました。ここで、2 次元代数 A が curled であるとは全ての $x \in A$ に対して、x と x^2 が線形従属である事を云い、そうでないとき straight と云います。これは小林さんが最初に考えた手法です。

所で小林さんは昨年喜寿を迎えました。それで当時皆と相談して、これを論文に纏め、小林さんの喜寿を祝う献呈論文にしようと纏まりました。最初ダメ元で Communications in Algebra に投稿したのですが、見事 reject されました。Referee さんは「分類理論の最初のステップは複素数体上の分類である。それ故何故自明体から始めるのか？」という意味の苦言を呈していましたので、どうも僕らの真意を分かってもらえないような気がしました。しかし彼は「近年 2 次元代数の分類問題が活発になされている」と云い、色々有益なアドバイスを頂きました。それで彼のアドバイスに従って論文を修正し、それを一旦 Conell Archive に載せました（[12])。そのコピーを冊子にして、1 ページ目の上段に、

　謹呈　祝喜寿　小林羑治先生

と書き、

　数学・ゲーム工房広報部長　高橋眞映

　東邦大学教授　白柳　潔

　数学・ゲーム工房研究部長　塚田　真

と署名して、昨年 12 月の末大久保にある IT 数理研究所で僕が小林さんに敬意を込めて渡しました。この研究所は東邦大ご出身の株式会社スマイルビット社長矢作浩様が借りている部屋で、そこが数学・ゲーム工房活動の場になっていて、小林さんはその工房代表です。また矢作さんは小林さんや塚田さん達のかっての東邦大での教え子でもあります。

XI. ウズベキスタンからの知らせと驚き

この 4 月 4 日に「Endo-commutative algebras」と名付けられたメールが見知らぬ人から突然届きま

した。通常見知らぬ人からのメールは、ウイルス感染を危惧して捨てるのですが、この場合メールの題名を見て安心しました。それで何事かとメールを開くと、

Good day from Uzbekistan! Dear colleagues, your research on Endo-commutative 2-dimensional algebras has inspired us to write the following paper. Please see the attachment. Yours sincerely, U. Bekbaev.

と書いてありました。メールに添付された論文は、タイトルが、A complete classification of two-dimensional endo-commutative algebras over an arbitrary field で著者は D. Asrorov, U. Bekbaev and I. Rakhimov とありました。

これは 2023 年 4 月 2 日付けで Conell Archive に掲載された論文 [1] で、前文をよむと、「我々は論文 [12] に出会い、著者達が自明体上の 2 次元内部可換代数の完全な分類を示した事を知った。しかし我々は [2] の結果に基づいて、より簡単かつ高速な方法で任意の体上でそれを実行できることが分かった」と云う意味の事が書いてありました。

ここで 2 つびっくりした事がありました。1 つは Bekbaev さんが我々の開発した内部可換代数を良く見つけ、それを認めた事です。1 つは、[1] の中で任意の体上の 2 次元内部可換 curled 代数の分類が書いてある事でした。実は我々も既にこの分類は終わっていたのですが、何処にも発表してなかったので、優先権は彼等にあると思いびっくりした事です。それで直ぐ白柳さんに相談しました。それで我々の結果を添付して、彼に「貴方方の結果と我々の結果の整合性を確認して欲しい」旨のメールを送りました。 すると 5 日ほど過ぎた後、彼から「比較の結果、それらは一致しているが、対応する正規代表元の選択のみが異なる」と云うメールが返ってきました。それで直ぐ様、彼に「両方の結果の一貫性が見られるのは非常に喜ばしい事で、 今後については共著者の白柳さんと現在協議中ですので、今しばらくお時間を頂きたい」旨のメールをお送り返しました。

その後色々な事を考え、直ぐ我々の喜寿祝論文 [12] を Asian-European J. Math. に投稿しました。結果の綺麗さから自信があるのですが、さてどうなるでしょうか？

所で、双方にはアイデアや細かい推論方法に大きな違いがあるので、白柳さんと色々協議の結果、白柳さんの方から、4 月 21 日 Bekbaev さんに、幾つかの間違いを指摘してやり、最後に「$\cdots$ In any case, we are planning to submit [13] to a suitable journal, by adding [1] in the bibliography as a similar result. We would appreciate it if you could provide your opinions about this. 」と書いたメールを送りました。彼は直ぐ様、我々の間違いの指摘に同意するメールが来ましたが、最後の文面に対する返事がありませんでした。

その後いくら待っても返事が来ないので、白柳さんに「一体どうなっているのでしょうね」と聞くと「Bekbaev さんから何もないですね。それぞれわが道を行くということになるのでしょうか？」という事でした。僕は論文盗用を心配したのですが、塚田さんも白柳さんも「そんな事はない」と云う事だったので、これもまた例の Asian-European J. Math. に投稿しました。結果は綺麗で「非自明体 K 上の 2 次元内部可換 curled 代数は零代数 C_0 と 1 つの特別な代数 C_1 及び 1 つの代数系 $\{C_2(k)\}_{k\in K}$ に分

類される」と云うものです。従ってこれも自信があるのですが、さてどうでしょうか？

XII. その後

残っている問題は straight の場合です。これは大変難解で、結果の綺麗さが見えて来ません。僕は以前不等式の雑誌 J. Inequal. Appl. の編集員をしていたとき、送られてきた論文を見て、定理自体が物凄く長くしかも複雑で汚くそれ故、referee に回すことなく即座に reject した事がありました。なんでもそうだと思いますが、特に数学は美意識が重要です。藤原正彦著：日本人の誇り [15] によりますと、ヘルマン・ワイルの次男さんが「父は常々、真、善、美は同じ 1 つのものの 3 つの側面にすぎない」と言っていたそうです（cf. [17]）。

然しながら、非自明体 K 上の 2 次元内部可換 straight 代数でも階数 1 を持つ場合は綺麗に分類できる事が分かりました。実際その様な代数は 3 つの特別な代数と 1 つの代数系 $\{S(k)\}_{k\in K}$ に分類されるというもので、その応用として、可換、反可換、結合的のそれぞれの場合に完全な分類を与える事が出来ました。これは皆で相談して早々に Conell Archive に載せることにしました（[14]）。現在は階数 2 の場合について、綺麗さを求めて四苦八苦しています。

XIII. 病気と研究

僕はこの 3 月中頃、寝るとき左足首に違和感を覚えました。これが 3 日続き、結局女房に無理やり船橋駅前の高良消化器内科クリニックの主治医のところに連れて行かれました。主治医先生は即座に帯状疱疹と診断し、抗生物質を飲んで安静にするように云われました。実はその翌日は中央大学で開催されていた春の学会で、新潟大関係者に会って飲み会を予定していたのですが、やむなくキャンセルしました。その後、左足から左脇腹にかけて痛みが走り、夜も眠れませんでした。もし女房の決断がなかったら今頃はどうなっていたかと思うとゾッとします。女房とは有り難いものです。

その後 20 日間位は勉強する気も起きず、お酒を飲む気もしませんでした（笑い）。帯状疱疹は僕にとって初めての経験でしたが、どうも寝不足とコロナワクチン接種による免疫低下が原因ではないかと素人ながら思ったものです。現在は健康で、それ故研究できる事の幸せをしみじみ味わっています。

所で退職後は何かと病気になりがちと聞いています。松岡勝男さん、是非健康に留意され、後半の人生を大いに楽しんで下さい。終わり

最後に、僕より年配の方は「先生」をつけ、僕より年下の方は「さん」をつけさせて頂きました。もしご無礼がありましたら、ご勘弁願えれば幸いです。

References

[1] D. Asrorov, U. Bekbaev and I. Rakhimov, A complete classification of two-dimensional endo-commutative algebras over an arbitrary field, arXiv:2304.00491v1 [math.RA] 2 Apr 2023.

[2] U. Bekbaev, Classification of two-dimensional algebras over any basic field, Journal of Physics: Conference Series, 2023.

[3] J. Inoue and S.-E. Takahasi, Constructions of Segal algebras in $L^1(G)$ of LCA groups G in which a generalized Poisson summation formula holds, J. Korean Math. Soc., 59-2(2022), 367-377.

[4] J. Inoue and S.-E. Takahasi, Generalized group algebras and generalized measure algebras on non-discrete locally compact abelian groups, arXiv:submit/4885844[math.FA]9May2023.

[5] Y. Kobayashi, Characterization of two-dimensional commutative algebras over a field of characteristic 2, preprint, 2016.

[6] Y. Kobayashi, K. Shirayanagi, S.-E. Takahasi and M. Tsukada, Classification of three-dimensional zeropotent algebras over an algebraically closed field, Comm. Algebra, 45(12)(2018), 5037-5052.

[7] Y. Kobayashi, K. Shirayanagi, M. Tsukada and S.-E. Takahasi, A complete classification of three-dimensional algebras over $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ – 温故知新 (visiting old, learn new), Asian-Eur. J. Math., **14**(8) (2021), Article ID 2150131 (25 pages).

[8] H. Oka, T. Miura, N. Niwa and S.-E. Takahasi, Ordered continuous bands on the positive real numbers and distribution, Publ. Math. Debrecen, 102/3-4(2023), 507-524.

[9] K. Shirayanagi, S.-E. Takahasi, M. Tsukada and Y. Kobayashi, Classification of three- dimensional zeropotent algebras over the real number field, Comm. Algebra, 46(11)(2018), 4663-4681.

[10] K. Shirayanagi, Y. Kobayashi, S.-E.Takahasi, and M.Tsukada, Three-dimensional zeropotent algebras over an algebraically closed field of characteristic two, Comm. Algebra, 48(4)(2020), 1613-1625.

[11] S.-E. Takahasi, H. Takagi, M. Miura and H. Oka, Semigroup operations distributed by the ordinary multiplication or addition on the real numbers, Publ. Math. Debrecen, 91/3-4(2017), 297-307.

[12] S.-E. Takahasi, K. Shirayanagi, M. Tsukada, A classification of two-dimensional endo-commutative algebras over $\mathbb{F}_2$, arXiv:2211.04015v1 [math.RA] 8 Nov 2022.

[13] S.-E. Takahasi, K. Shirayanagi, M. Tsukada, A classification of endo-commutative curled algebras of dimension 2 over a non-trivial field, arXiv:2304.2510v1[math.RA] 25 Apr 2023.

[14] S.-E. Takahasi, K. Shirayanagi, M. Tsukada, A classification of 2-dimensional endo-commutative straight algebras of rank 1 over a non-trivial field, arXiv:submit/4901157 [math.RA]18May2023.

[15] 藤原正彦、日本人の誇り、文藝春秋、2011 年、7 月 1 日。

[16] 髙橋眞映、美人考、国際数理科学協会会報, No.70/ 2010.7.

[17] 髙橋眞映、不等式と私 (Inequalities and I)、国際数理科学協会会報, No.105/ 2018.1.

[18] 和田秀樹、80 歳の壁、幻冬舎、2023 年、2 月 15 日。