数楽落語『崇徳院』

－内なる他者との対話－
松岡勝男先生の御退職を祝して

瀬をはやみ　岩にせかるる　滝川の
割れても末に逢わんとぞ思ふ
崇徳院

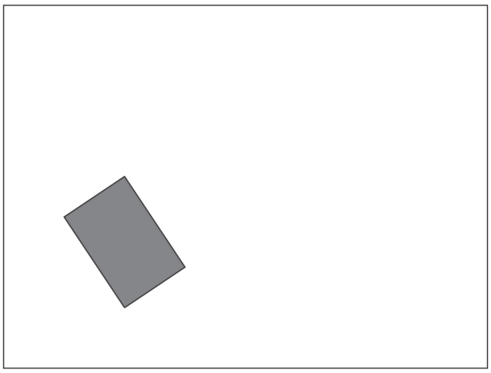
大阪教育大学　名誉教授　藤　井　正　俊

最近，スポーツの世界では『楽しむ』ことが殊の外強調されているようであるが，数学の世界でもこれに倣い，『数楽』という造語を創ってみては如何でしょうか．しかし，これはそんなに創造的なものではなく，音楽は始めから『楽しむもの』であったはずである．音楽が始めは『音学』であったというようなことは聞いたことがありません．

さて，昔からよく言われていたのは，「数学は実験科目」．要するに，数学は適宜目標を設定して試行錯誤する学問である．この小論では，ケーキの分割の問題を通して『数楽』に迫ってみたい．

Part I 『崇徳院』

問題．下の図のようなケーキがある．中の小さい部分にはチョコレートが塗られている．これをナイフでまっすぐに切って，ケーキ自体もチョコレートの部分も２等分したい．どのように切ればよいか．



落語版—　ある商家の出入りの職人・熊五郎が主人公である．一仕事済ませて，一服している熊五郎にご隠居が，

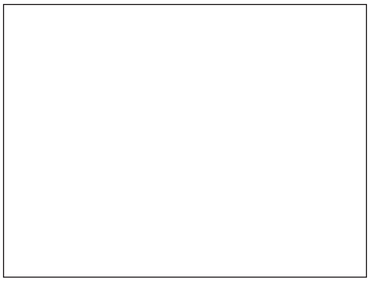
『ところで，家に孫が2人おってなあ．ケーキが大好きなんじゃ．四角いケーキを買ってきて分けてやろうと思うのだが，ちょっと困ってるんだ．上は大きい方を欲しがるだろうが，下も負けてはいない．結局均等に分けてやらにゃ収まらない．

孫の手前，奇麗にパサッとまっすぐに切り分けてやらねばならない．さて，どのように切ればよいやら？』

熊さん，『どんな形のケーキなんです？』ご隠居，一通り説明した後，『チョコが乗っているのが厄介なんだよ』『それだったら，そこを私が頂きましょうか？』と熊さん．結局，『家に帰って，かかあに聞いてみます』ということで,家に帰ってきた．この問題がきちっと片付いたら,家にも同じケーキを買ってやると隠居が言ってるというのを聞くと，カミさんは乗り気になった．『すぐに，という訳にはいかないだろうから，簡単な場合からやってみたらどう？』『簡単な場合というと？』

『中のチョコの細工がない場合，長方形1つだけだとしたら．』

ヒント（単純化）中の小さい方は考えない．長方形1つだけの場合をまず考える．



簡単な場合だが，出来たような気になったので，熊さんそそくさと戻ってきた：

『ご隠居，均等に分けるの面白いですね．いっぱい有りますよ．』

『どの位ある？』『いっぱいですよ．』

『そうじゃなくて，それらをまとめて，一括りでこんな直線って言えないかい？』

『ううーん！それじゃ，真ん中を通ってる，というのはどうです？』

『うん！　・・・　だがなあ，後でややこしくなるといけないので聞くが,「真ん中」てのは正確にはどこなんだい？』

『「真ん中」てのは，顔で言えば鼻，体全体で言えばお臍に当たるところです．』

『それじゃ，長四角ではどこなんだい？』

熊さん，懐から紙を取り出して，それを折り始めた．そして，『ここですよ』と言って，その折り目を指差した．

ヒントの解答　長方形の重心 G（対角線の交点）を通る直線によって分けられた2つの部分の面積は等しくなる．（また，長方形の面積を二等分する直線は必ず重心 G を通る．）

ここで，落語『崇徳院』の前半の概要を記しておきたいと思う：

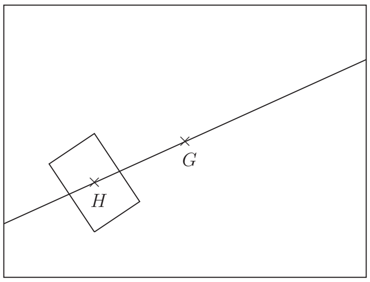
20 日ほど前，若旦那が「高津さん」へ参詣し，茶店で休んでいると，「歳は十七八の，水のたれるような」美しい娘が店に入って来る．娘を見た若旦那は，娘に一目ぼれをしてしまう．娘は茶店を出るために立ち上がる際，膝にかけていた茶帛紗を落とし，気づかず歩き出してしまう．若旦那が急いで拾い，追いかけて届けると，娘は料紙（あるいは短冊）に

「瀬をはやみ岩にせかるる滝川の」

と，歌の上の句だけ書いて若旦那に手渡し，去って行く．若旦那は，歌の下の句「われても末にあはむとぞ思ふ」を思い出して，娘の「今日のところはお別れいたしますが，いずれのちにお目にかかれますように」という意志を読み取ったが，娘がどこの誰なのかわからないので，会うことがかなわずに困っている．熊五郎はこの事情を，親旦那に報告する．親旦那は「３日間の期限を与えるから，その娘を何としても捜し出せ．褒美に蔵付きの借家を５軒ゆずり渡し，借金を帳消しにして，それと別に礼金を支払うから」と熊五郎に懇願する．

さて，こちらの熊さん，孫の誕生日までの３日間，ふらふらになりながら考え続けた．譫言のように，「重心，重心」と言い続けていたが，それが功を奏した．「重心と重心」と口をついて出た言葉に，カミさんが気付き，それに誘われるように熊さんも気が付いた．二人で「重心と重心を」と言って，抱き合った．

問題の解答　H，G を，それぞれ小さい長方形と大きい長方形の重心（対角線の交点）とする．H，G を結ぶ直線が求める解答である．



落語の方では，娘の方でも人を出して若旦那を探していたが，ある床屋で，お互いの探し人が見付かった．めでたい筈がつかみ合いになる．はずみで床屋の鏡が床に落ちて割れてしまい，店主が「折角お互いの探し人が見付かったというのに，この損をどうしてくれる」と怒る．熊五郎曰く，「割れても末（＝月末）に買わんとぞ思う」

こちらの落ちは，「割れても末に合わんとぞ思う」．

Part II 『３年目』

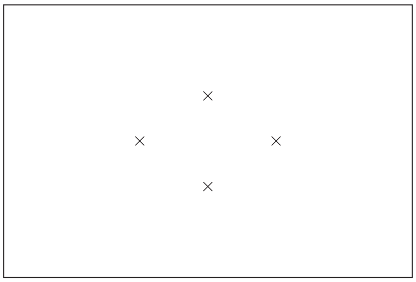
それから少しして，ご隠居は３人目の孫を授かりました．ケーキの２等分の話から３年目，３人目の

孫の3歳の誕生日が近づいてきました．昔の話なので，数えの3歳なので，今日的には2歳の誕生日です．落語的には，熊さんは「孫さんの3回忌」というようなボケを挿むのかもしれません．（これで，何とか『3年目』との繋ぎが付くかと．）それはさておき，ケーキの分配で，同じ問題が生じました．実は，その子も上の2人に負けずよく食べるんです．だから最近は何でも3等分しなけりゃならない訳です．ケーキを買ってお祝いするのは結構なことだが，当然その3等分という問題にぶつかるのだが，これをどうするかが分からず，ご隠居は大変な困りようです．3等分は，2等分のような訳にはいきません．こちらの落ちは，『崇徳院』的には，

「われても末に食わんとぞ思ふ」

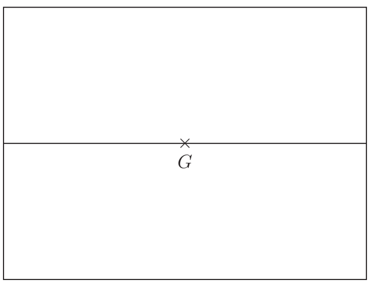
つまり，うまく3等分できて，3人でうまいうまいと言って食べてしまった，万事目出度しという結末になります．

3歳の誕生日を前にして，ご隠居は注文するケーキの品定めに出かけた．そこで目に留まったケーキには菱形を形成する4つの× 印が描かれていた：



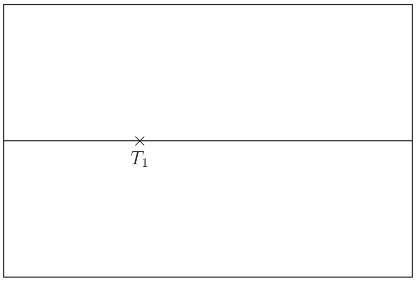
さて，2年前と同様，ご隠居は熊さんにこの問題を持ちかけた．今度はフルーツケーキなので，普通に3等分の問題である．熊さんは考えた．状況は複雑になっているが，それでも，2等分の時に使った技術は使えるかもしれない．

Step 1. 2等分のときの長方形の重心の位置（の意味）を見直すことから始めよう．正確には，もっと戻って，長方形の紙を2つに折って，長方形の面積を2等分することをもう一度やってみよう，と．

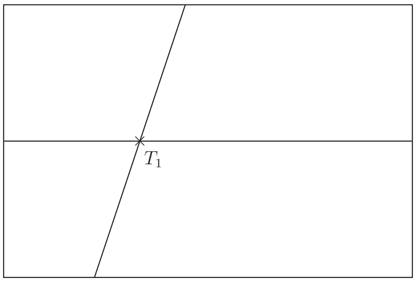


この図の中で，重心 G の位置をどう捉えるかであるが，今描いた面積を2等分する（辺に平行な）

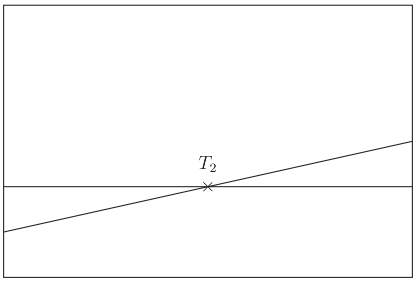
線分の中点である，と見ることが要点である．従って，Step 1 での成果は，次の図の点 T_1 が 3 等分の基本との認識である．



T_1 が 3 等分の基本という意味は，T_1 を通る直線は与えられた長方形の面積を 1 : 2 に分けるということである．



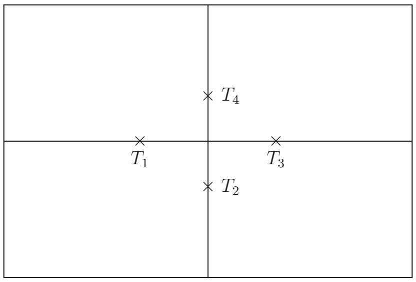
Step 2. 2 等分と 3 等分の決定的な違いに気付けるか！ Step 1 では，面積を 2 等分してから，（その線分上に） 3 等分点を取った．この操作の順番を入れ替えても正解, つまり, 面積を 3 等分してから（その線分の）中点 T_2 も T_1 と同様に基本となる点である．T_2 を通る直線も与えられた長方形の面積を 1 : 2 に分ける．



この段階で得られた結果を定理としてまとめておこう：

定理1． 長方形 $ABCD$ において，上図のように AB よりに T_1，BC よりに T_2 を取る．
(1) T_1 を通り，AD および BC と交わる直線は長方形 $ABCD$ の面積を1：2に分ける．
(2) T_2 を通り，AB および CD と交わる直線は長方形 $ABCD$ の面積を1：2に分ける．

Step 3. Step 1，2と同様に，T_3，T_4 を取ることができ，定理1と同じ結果が得られる．なお，T_3，T_4 の取り方として，縦に2等分線を引き，それを3等分してもよいことに注意しておきたい．



Step 4. T_1，T_2，T_3，T_4 を通らない直線であっても，$\dfrac{1}{3}$ の面積を切り取ることはできる．あとの計算のために，次の補題を用意する．

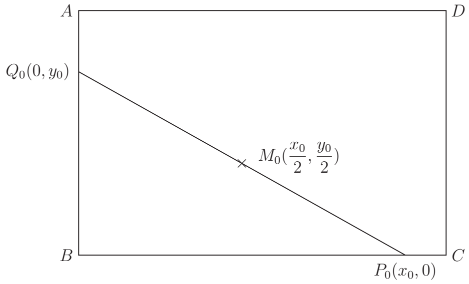
補題2． x 軸と x_0 で，y 軸と y_0 で交わる直線の方程式は

$$x_0y + y_0x = x_0y_0$$

で表せる．従って，x 軸と y 軸とこの直線で囲まれた直角三角形の面積は，$\dfrac{1}{2}x_0y_0$ である．

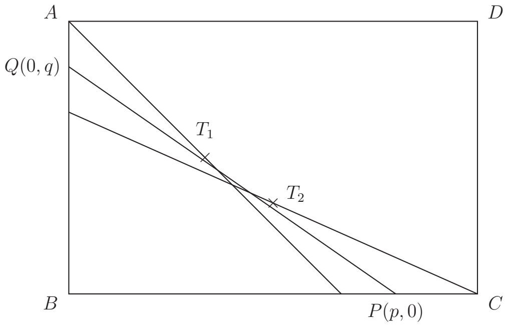
ここで，長方形の面積を S とすると，下図の直角三角形 Q_0BP_0 の面積が長方形の面積 S の $\dfrac{1}{3}$ となることは，$\dfrac{1}{3}S = \dfrac{1}{2}x_0y_0$ と書き換えられる．これを少し変形すると，次が得られる：

$$\frac{1}{6}S = \frac{x_0}{2}\frac{y_0}{2}.$$



Step 4 で得られたことは次のようにまとめられる：

補題 3． 上図と同様に，Q（0，q）が AB 上を A から B に，P（p，0）が BC 上を C から B に $\dfrac{1}{3}S=\dfrac{1}{2}pq$ を満たして動くとき，PQ の中点 $M\left(\dfrac{p}{2},\dfrac{q}{2}\right)$ は，$xy=\dfrac{1}{6}S$ のグラフ上を T_1 から T_2 まで移動する．



さて，与えられた長方形 $ABCD$ の縦，横の長さをそれぞれ a，$b>0$ とするとき，補題 3 を xy 座標を使って表すと次のようになる：

頂点を $A(0,\ b)$，$B(0,\ 0)$，$C(a,\ 0)$，$D(a,\ b)$ とするとき，基本の 4 点は，

$$T_1\left(\frac{a}{3},\frac{b}{2}\right),\ T_2\left(\frac{a}{2},\frac{b}{3}\right),\ T_3\left(\frac{2a}{3},\frac{b}{2}\right),\ T_4\left(\frac{a}{2},\frac{2b}{3}\right)$$

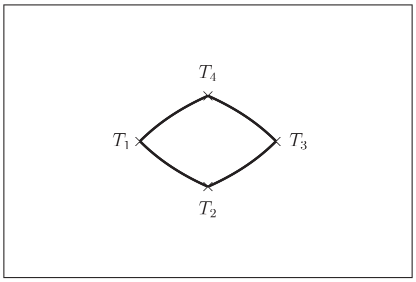
となることに注意すると，次の定理の成立がわかる：

定理 4． 反比例の関数 $xy=\dfrac{1}{6}ab$ $(\frac{a}{3}\le x\le\frac{a}{2};\frac{b}{3}\le y\le\frac{b}{2})$ の接線によって長方形 $ABCD$ から切り取られる三角形の面積は，長方形 $ABCD$ の面積の $\dfrac{1}{3}$ になる．同様のことが，

$$(a-x)y=\frac{1}{6}ab\quad\left(\frac{a}{2}\le x\le\frac{2}{3}a;\ \frac{b}{3}\le y\le\frac{b}{2}\right)$$
$$(a-x)(b-y)=\frac{1}{6}ab\quad\left(\frac{a}{2}\le x\le\frac{2}{3}a;\ \frac{b}{2}\le y\le\frac{2}{3}b\right)$$
$$x(b-y)=\frac{1}{6}ab\quad\left(\frac{a}{3}\le x\le\frac{a}{2};\ \frac{b}{2}\le y\le\frac{2}{3}b\right)$$

の接線についても成立する．

実は，熊さんはケーキの下見には行っていなかった．誕生日パーティ当日，ケーキの実物を見て驚いた．ケーキには次のような模様が描かれていた．



ご隠居は，3 人の孫がいて，云々ということを注文に当たり，店主にしゃべっていたという．そこで，店主が気を利かせたわけだ．という訳で，誕生日パーティは無事に終了，めでたく

「割れても末に食わんとぞ思ふ」

という下げの通りになった．

誕生日パーティに来ていた高校生の従妹が，習ったばかりの微分を使い，丁度 $\dfrac{1}{3}$ だけ切り取られるかを計算していた． $xy = \dfrac{1}{6}ab = k$ $\left(\frac{a}{3} \leq x \leq \frac{a}{2}\right)$ より， $y' = -\frac{k}{x^2}$ なので，点 $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$ を通る接線の方程式は，

$$y - \frac{y_0}{2} = -\frac{4k}{x_0^2}(x - \frac{x_0}{2})$$

によって与えられる．この直線は，確かに $(x_0,\ 0)$ および $(0,\ y_0)$ を通る．そして， $\frac{x_0}{2}\frac{y_0}{2} = \frac{1}{6}ab$ より，切り取られた 3 角形の部分の面積は， $\frac{1}{2}x_0 y_0 = \frac{1}{3}ab$ が成り立つことが分かる．

蛇足になるが，店主は，ケーキに描かれた曲線に接するようにナイフを入れるか，4 つの点のいずれかを通る直線で切るとちょうど $\dfrac{1}{3}$ を切り取ることができるという配慮の賜物であった．

Prat III　楽屋落ち

一席終わり，師匠が楽屋に引き揚げてきた．お茶を一口飲んでから，やおら

“Three is better than two.”

と言ったかとおもうと，黙り込んでしまった．日本では，「３人よれば，文殊の知恵」と言われているものだが，この英語版の方が汎用性があるように思われる．例えば，宮本武蔵が，「３人を同時に相手にするな」といったようなことは，この範疇に入る．もっと日常的には，手が３本あれば，と思うことは度々あるだろう．本論文で取り上げたことも，当にこの事例に当てはまると考えられる．数学的には，一般化の妙味と言えることで，３等分の登場により，「面積が一定の長方形の縦と横の長さが，反比例の典型的な例である」ことがどうしようもなく浮かび上がってくる．発展的学習の面白さがここにある（cf. [1]）．

「それじゃ，３等分はどうなるの？」

内なる他者の問いが重要であった（cf. [2]）．

師匠は，こんなことをぼんやりと思っていたのかもしれない．あるいは，内なる他者が，２等分の時の「落ち」の「合わんとぞ思う」の「合う」は分けられた２つの部分が合同であることの暗示を意識の上に乗せたのかもしれない．火鉢の前に座っている師匠を見ていると，その周りの空気の温かさが感覚された．どこか松岡先生の醸し出すそれに似ていた．

参考文献

[1] 片桐重男　数学的な考え方の具体化と指導　明治図書　2004.
[2] 藤井正俊　内なる他者との対話－冪差平均の場合－　数学教育研究　48（2019），29-38.