

ヤコビ解析におけるクォーク分解

慶應大学名誉教授 河 添 健

概 要

著者は長年、ヤコビ解析における実ハーディ空間の構築とそのアトム分解を研究してきた。この稿ではアトムをさらに分解するクォーク分解を紹介する。応用として膨張作用素の実ハーディ空間での有界性が得られる。詳細は [13] にまとめる。

1 ヤコビ解析

最初に $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 上のヤコビハイパー群に関する基礎知識をまとめる。詳しくは参考文献[2], [3], [10] を参照されたい。以下では $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, $(\alpha, \beta) \neq (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $\rho = \alpha + \beta + 1$ とする。 \mathbb{R}_+ 上の重み関数を

$$\Delta(x) = \Delta_{\alpha, \beta}(x) = (\sinh x)^{2\alpha+1} (\cosh x)^{2\beta+1}$$

とし、 \mathbb{R}_+ 上の関数 f の L^p -ノルム、 $p \geq 1$, を

$$\|f\|_{L^p(\Delta)} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \Delta(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

とする。また $\|f\|_\infty = \text{ess. sup}_{x \geq 0} |f(x)|$ とする。 $L^p(\Delta)$ を有限 L^p -ノルムをもつ \mathbb{R}_+ 上の関数の全体とし、 $C_c^\infty(\Delta)$ をコンパクトな台をもつ滑らかな \mathbb{R} 上の偶関数の全体とする。ここで $\phi_\lambda(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, を第一種ヤコビ関数、すなわち微分作用素 $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\Delta'(x)}{\Delta(x)} \frac{d}{dx}$ の固有値 $-(\lambda^2 + \rho^2)$ をもつ固有関数で、初期条件 $\phi_\lambda^{\alpha, \beta}(0) = 1$, $\frac{d}{dx} \phi_\lambda^{\alpha, \beta}(0) = 0$ を満たす関数とする。この ϕ_λ を用いて、 $f \in L^1(\Delta)$ のヤコビ変換を

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \phi_\lambda(x) \Delta(x) dx$$

と定義する。 $\phi_\lambda(x)$ は λ に関して偶関数なので、 $\hat{f}(\lambda)$ も \mathbb{R} 上の偶関数となる。 $f \in C_c^\infty(\Delta)$ に対して逆変換公式は

$$f(x) = \int_0^\infty \hat{f}(\lambda) \phi_\lambda(x) |C(\lambda)|^{-2} d\lambda$$

となる。ここで $C(\lambda)$ はハリッシュ・チャンドラの C -関数とよばれる有理型の関数である。古典的なフーリエ変換と同様に、ヤコビ変換においても $L^2(\Delta)$ 上でプランシェレルの定理、 $C_c^\infty(\Delta)$ 上でペリー・

ウィーナー型の定理が成立する. ヤコビ関数 ϕ_λ はいわゆる積公式を満たし

$$\phi_\lambda(x)\phi_\lambda(y) = \int_0^\infty \phi_\lambda(z)K(x, y, z)\Delta(z)dz$$

と書ける. ここで核関数は正値であり, この核関数を用いて一般化した移動を

$$T_x f(y) = \int_0^\infty f(z)K(x, y, z)dz$$

と定義する. この移動を用いて $f, g \in L^1(\Delta)$ の畳み込みを

$$f * g(x) = \int_0^\infty f(y)T_x g(y)\Delta(y)dy$$

とする. 容易に $\widehat{f * g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda) \cdot \hat{g}(\lambda)$ である. 以上の話では群構造は必要無いが, この畳み込み $*$ を有することで, $(\mathbb{R}_+, \Delta, *)$ をヤコビハイパー群とよぶ.

$\Delta(s)\phi_\lambda(s)$ は λ の関数として, コンパクトな台 $[0, s]$ をもつ関数のフーリエ変換として次のように与えられる.

$$\Delta(s)\phi_\lambda(s) = c \int_0^s \cos(\lambda x)A(x, s)dx. \quad (1)$$

この $A(x, s)$ を用いて, $f \in L^1(\Delta)$ のアーベル変換を

$$\mathcal{A}(f)(x) = \int_x^\infty f(s)A(x, s)ds$$

で定義する. アーベル変換 \mathcal{A} は $L^1(\Delta)$ を $L^1(\mathbb{R})$ に, $C_c^\infty(\Delta)$ を $C_c^\infty(\mathbb{R})$ に写す. また (1) より, $f \in L^1(\Delta)$ のヤコビ変換 \hat{f} は $\mathcal{A}(f)$ のフーリエ変換と一致する. このことから

$$\mathcal{A}(f * g) = \mathcal{A}(f) \otimes \mathcal{A}(g) \quad (2)$$

である. 右辺の \otimes はユークリッド空間の畳み込みである. このようにアーベル変換 \mathcal{A} はヤコビハイパー群上の諸対象をユークリッド空間上の諸対象に写す. アーベル変換 \mathcal{A} は $(\mathbb{R}_+, \Delta, *)$ における分数積分作用素を用いて

$$\mathcal{A} = 2^{3\alpha + \frac{3}{2}} W_{\alpha - \beta}^1 \circ W_{\beta + \frac{1}{2}}^2 \quad (3)$$

と書ける. ここで

$$W_\mu^\sigma(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_x^\infty f(s)(\cosh \sigma s - \cosh \sigma x)^{\mu-1} d \cosh \sigma s \quad (4)$$

である. $\mu \in \mathbb{C}$ に解析接続でき, $\mu < 0$ のときは, 分数微分作用素である. 積分核 $A(x, s)$ の具体形は

$$\begin{aligned} A(x, s) &= c(\sinh 2s)(\cosh s)^{\beta - \frac{1}{2}}(\cosh s - \cosh x)^{\alpha - \frac{1}{2}} \\ &\quad \times F\left(\frac{1}{2} + \beta, \frac{1}{2} - \beta, \alpha + \frac{1}{2}; \frac{\cosh s - \cosh x}{2 \cosh s}\right) \\ &= e^{\rho s}(\tanh s)^{\alpha + \frac{1}{2}} \tanh(s - x)^{\alpha - \frac{1}{2}} B(x, s) \end{aligned}$$

となる. ここで $B(x, s)$ は, x, s に関して滑らかで微分を含めて有界な関数である. 以下ではこのような関数を同じ記号 B で表す. アーベル逆変換は (3) より $f = \mathcal{A}^{-1}(F) = cW_{-(\beta+\frac{1}{2})}^2 \circ W_{-(\alpha-\beta)}^1(F)$ と分数微分作用素を用いて表される. この分数微分作用素をユークリッド空間上の分数微分作用素 (積分作用素で言えば, (4) の $\cosh \sigma s - \cosh \sigma x$ を $s - x$ に, $d \cosh \sigma s$ を ds に変えたもの) で表すことができ, 次の様になる. 詳しくは [8] を参照されたい. $\beta + \frac{1}{2} = m + \mu$, $\alpha - \beta = m' + \mu'$ と整数部分を m, m' , 残りの部分を $0 \leq \mu, \mu' < 1$ とし, 集合 Γ_0, Γ_1 を

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \{k + \mu + \mu' \mid 1_{m+m'} \leq k \leq m + m'\} \\ \Gamma_1 &= \{k, k + \mu, k + \mu' \mid 1_{m+m'} \leq k \leq m + m'\}\end{aligned}$$

と定める. ここで $\ell = 0$ のとき, $1_\ell = 0$ で, その他のときは $1_\ell = 1$ である. また $\mu = \mu' = 0$ のときは $\Gamma_1 = \emptyset$ である. このとき関数 $A_\gamma(x)$, $\gamma \in \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, と $A_\gamma(x, s)$, $\gamma \in \Gamma_1$, が存在し, $x \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{e^{\rho x}}{\Delta(x)} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma_0} A_\gamma(x) W_{-\gamma}^{\mathbb{R}}(F)(x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\gamma \in \Gamma_1} A_\gamma(x) \int_x^\infty W_{-\gamma}^{\mathbb{R}}(F)(s) A_\gamma(x, s) ds \right)\end{aligned}\tag{5}$$

となる. ただし $A_\gamma(x) = O((\tanh x)^\gamma)$ であり, またある $0 < \xi_\gamma < 1$ が存在して

$$A_\gamma(x, s) = \frac{\tanh(s-x) (\tanh x)^{\xi_\gamma}}{(s-x)^{1+\xi_\gamma} \tanh s} B(x, s)$$

と書ける. このとき

$$\int_x^\infty A_\gamma(x, s) ds \leq c_0 \quad \text{for all } x > 0, \quad \int_0^s A_\gamma(x, s) dx \leq c_0 \quad \text{for all } s > 0\tag{6}$$

となることに注意する.

2 実ハーディ空間

前節の (5), (6) に注意すれば, $F = \mathcal{A}(f)$ としたとき

$$\|f\|_{L^1(\Delta)} \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} c \|e^{\rho x} W_{-\gamma}^{\mathbb{R}}(F)\|_{L_{w_\gamma}^1(\mathbb{R}_+)}$$

である. ただし $w_\gamma(x) = |\tanh x|^\gamma$ であり, $L_{w_\gamma}^1(\mathbb{R}_+)$ は \mathbb{R}_+ 上の w_γ 重み付き L^1 空間である. 逆も示すことができ, 次の定理を得る.

定理 2.1. $f \in L^1(\Delta)$ のアーベル変換を $F = \mathcal{A}(f)$ とすれば

$$\|f\|_{L^1(\Delta)} \sim \sum_{\gamma \in \Gamma} \|e^{\rho x} W_{-\gamma}^{\mathbb{R}}(F)\|_{L_{w_\gamma}^1(\mathbb{R}_+)} \sim \|e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F)\|_{L_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R}_+)}.$$

この定理に現れる γ_α は $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ の最大値であり, 以下ではその整数部分を n , 残りの部分を $0 \leq$

$\delta < 1$ とする.

$$\gamma_\alpha = \max \Gamma = (\beta + \frac{1}{2}) + (\alpha - \beta) = \alpha + \frac{1}{2} = n + \delta.$$

次に実ハーディ空間 $H^1(\Delta)$ を定義する. ユークリッド空間における実ハーディ空間に関しては, いろいろな導入方法があり, それらは同値となる. ここでは動径最大関数を用いる方法をヤコビハイパー群に拡張することにより, $H^1(\Delta)$ を定義する. 詳しくは [7], [8] を参照されたい. $g \in C_c^\infty(\Delta)$ でもって $[-1, 1]$ に台をもち, $g(x) = O(x^{2M})$, $M \geq 2$, $\int_0^\infty g(x)\Delta(x)dx = 1$, $\int_0^\infty g(x)x\Delta(x)dx \leq \frac{1}{4}$ をみたすものを固定する. ここで $t > 0$ に対して g の膨張 g_t を

$$g_t(x) = \frac{1}{t\Delta(x)}g\left(\frac{x}{t}\right)\Delta\left(\frac{x}{t}\right) \quad (7)$$

と定義する. 明らかに g_t の台は $[-t, t]$ であり, $\|g_t\|_{L^1(\Delta)} = \|g\|_{L^1(\Delta)}$ である. ユークリッド空間のときと同様に, g_t は $L^p(\Delta)$, $1 \leq p \leq \infty$, との畳み込みにおいて, 1 の近似を与える. 以下の議論では次の性質が重要となる.

補題 2.2. $\lambda \in \mathbb{R}$, $t > 0$ に対して, $|\hat{g}_t(\lambda + i\rho)| \rightarrow 1$ if $|t\lambda| \rightarrow 0$ となる. また $|\hat{g}_t(\lambda + i\rho)| \geq \frac{1}{2}$ if $|t\lambda| \leq 2$ である.

補題 2.3. $G^t = \mathcal{A}(g_t)$ とすれば, $n \in \mathbb{N}$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left| \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^n (e^{\rho x} G^t) \sim (\lambda) \right| \sim ct^n (1 + |t\lambda|)^{-(2M + \gamma_\alpha)}.$$

(7) で定めた膨張を用いて, 動径最大作用素 M_g を

$$M_g f(x) = \sup_{t>0} |f * g_t(x)|$$

で定義する. 容易に M_g は最大定理を満たす. すなわち $1 < p \leq \infty$ に対して, M_g は $L^p(\Delta)$ 有界であり, $p = 1$ のときは, 弱 L^1 評価を満たす. ユークリッド空間のときと同様に, この M_g を用いて $H^1(\Delta)$ を次のように定義する.

定義 2.4. $M_g f \in L^1(\Delta)$ となる $f \in L^1_{\text{loc}}(\Delta)$ の全体を $H^1(\Delta)$ とし, そのノルムを $\|f\|_{H^1(\Delta)} = \|M_g f\|_{L^1(\Delta)}$ とする.

ユークリッド空間の場合と同様に M_g は最大定理の逆も満たすので

$$H^1(\Delta) \subset L^1(\Delta)$$

である. ここで $H^1(\Delta)$ にアーベル変換 \mathcal{A} を作用させることにより, $H^1(\Delta)$ をユークリッド空間の実ハーディ空間と関連付ける. (5) を $f * g_t$ に適用し, (2) を用いる. $F = \mathcal{A}(f)$, $G^t = \mathcal{A}(g_t)$ とすれば

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \sup_{t>0} |f * g_t(x)| \Delta(x) dx &\leq c \sum_\gamma \int_0^\infty e^{\rho x} \sup_{t>0} |W_{-\gamma}^{\mathbb{R}}(F) \otimes G^t(x)| w_\gamma(x) dx \\
 &\leq c \int_0^\infty e^{\rho x} \sup_{t>0} |W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F) \otimes G^t(x)| w_{\gamma_\alpha}(x) dx \\
 &= c \int_0^\infty \sup_{t>0} |(e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F)) \otimes (e^{\rho x} G^t)(x)| w_{\gamma_\alpha}(x) dx
 \end{aligned}$$

となる. よって

$$\|f\|_{H^1(\Delta)} \leq c \int_0^\infty \sup_{t>0} |(e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F)) \otimes (e^{\rho x} G^t)(x)| w_{\gamma_\alpha}(x) dx$$

を得る. 定理 2.1 の証明と同様に, 逆の評価を得ることができ, 最終的に

$$\|f\|_{H^1(\Delta)} \sim \int_0^\infty \sup_{t>0} |(e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F)) \otimes (e^{\rho x} G^t)(x)| w_{\gamma_\alpha}(x) dx$$

となる. ここで補題 2.3 に注目する. この補題は $e^{\rho x} G^t$ のフーリエ変換が, ユークリッド空間における膨張関数のフーリエ変換と同じ性質を満たすことを示している. もしある関数が Ψ が存在して, $e^{\rho x} G^t = \Psi_t$ (右辺はユークリッド空間における膨張) と書くことができれば

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{H^1(\Delta)} &= \|M_g f\|_{L^1(\Delta)} \\
 &\sim \int_0^\infty \sup_{t>0} |e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F) \otimes e^{\rho x} G^t(x)| w_{\gamma_\alpha}(x) dx \\
 &\sim \int_0^\infty \sup_{t>0} |e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F) \otimes \Psi_t(x)| w_{\gamma_\alpha}(x) dx \\
 &= \|M_\Psi^{\mathbb{R}}(e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F))\|_{L_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R}_+)}
 \end{aligned}$$

となる. ただし $M_\Psi^{\mathbb{R}}$ はユークリッド空間の動径最大作用素である. 実際は Ψ は存在しないが, $e^x G^t(x)$ は, [4], 1 章 D で定義されたノルム $\|\cdot\|_{(1)}$ を有限とする. このことからユークリッド空間における実ハーディ空間の構成を, フーリエ変換をとった形の議論で行えば上述の計算は正当化される. [4], 2 章, [7], 定理 8.6 を参照されたい. 以上により次の定理を得る.

定理 2.5. $f \in H^1(\Delta)$ に対して $F = \mathcal{A}(f)$ とすれば

$$\|f\|_{H^1(\Delta)} \sim \|M_\Psi^{\mathbb{R}}(e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F))\|_{L_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R}_+)}.$$

以上は膨張を (7) とした議論であるが, 新たな膨張として

$$g_{[t]}(x) = \mathcal{A}^{-1}(e^{-\rho x}(e^{\rho x} \mathcal{A}(g))_t)$$

と定義する. 右辺の膨張はユークリッド空間の膨張である. この膨張を用いて最大作用素 M_g^\dagger を

$$M_g^\dagger f(x) = \sup_{t>0} |f * g_{[t]}(x)|$$

と定義する. そして実ハーディ空間 $H_1^1(\Delta)$ を, $f \in L_{\text{loc}}^1(\Delta)$ で $M_g^\dagger f \in L^1(\Delta)$ となるもの全体とし, そのノルムを $\|f\|_{H_1^1(\Delta)} = \|M_g^\dagger f\|_{L^1(\Delta)}$ とする. このとき $e^{\rho x} \mathcal{A}(g_{[t]}) = (e^{\rho x} \mathcal{A}(g))_t$, となるので $\psi(g) = e^{\rho x} \mathcal{A}(g)$ と置けば

$$e^{\rho x} W_{-\gamma}^{\mathbb{R}}(\mathcal{A}(f * g_t)) = (e^{\rho x} W_{-\gamma}^{\mathbb{R}}(F)) \otimes (e^{\rho x} \mathcal{A}(g))_t = (e^{\rho x} W_{-\gamma}^{\mathbb{R}}(F)) \otimes \psi_t$$

となる. よって先の議論を繰り返せば $\|f\|_{H_+^1(\Delta)} \sim \|M_\psi(e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F))\|_{L_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R}_+)}$ である.

定理 2.6. $H^1(\Delta) = H_+^1(\Delta)$ であり, $\|\cdot\|_{H^1(\Delta)} \sim \|\cdot\|_{H_+^1(\Delta)}$ となる.

以上により $H^1(\Delta)$ は, $e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F)$ の最大関数の $L_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R}_+)$ -有界性で特徴付けられた. ユークリッド空間の実ハーディ空間は, 最大関数が L^1 関数となることで特徴付けられるので, $f \in H^1(\Delta)$ となる必要十分条件は $e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F) \in H_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R}_+)$ としたいのだが, 半空間 \mathbb{R}_+ 上の実ハーディ空間の定義には注意を要する. 通常は \mathbb{R}_+ 上の関数 G で, $G = G_0|_{\mathbb{R}_+}$, $G_0 \in H_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R})$, となるもの全体とし, そのノルムを G_0 の $H_{w_{\gamma_\alpha}}^1$ -ノルムの下限で定める. 我々の設定では, $F = \mathcal{A}(f)$ は偶関数なので, $-\mathbb{R}_+$ の部分は一意に定まっている. この部分を評価すると (8) の $L_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R}_+)$ を $L_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R})$ に置き換えることができる. 最終的に次の定理が得られる.

定理 2.7. $f \in L^1(\Delta)$ で, $M_\Psi^{\mathbb{R}}(e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F))$ が $L_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R})$ に属するもの, すなわち $e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F)$ が $H_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R})$ に属するもの全体と $H^1(\Delta)$ は一致する.

$$\|f\|_{H^1(\Delta)} \sim \|M_\Psi^{\mathbb{R}}(e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F))\|_{L_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R})} \sim \|e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F)\|_{H_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R})}. \quad (9)$$

3 アトムとクォーク

前節ではヤコビハイパー群 $(\mathbb{R}_+, \Delta, *)$ 上の実ハーディ空間 $H^1(\Delta)$ を $e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F)$ が $H_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R})$ に属することで定義した. ここで

$$\begin{aligned} e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F)(x) &\sim \sum_{\ell=0}^n c_\ell W_{-(\ell+\mu)}^{\mathbb{R}}(e^{\rho x} F)(x) \\ &\quad + \sum_{\ell=0}^n d_\ell \int_x^\infty W_{-\ell}^{\mathbb{R}}(e^{\rho x} F)(s) V_\ell(x, s) ds, \end{aligned}$$

ただし $V_\ell(x, s) = \frac{1 - e^{-\rho(s-x)}}{(s-x)^{\mu+1}}$, と書けることに注意する. よって $e^{\rho x} W_{-\gamma_\alpha}^{\mathbb{R}}(F)$ が $H_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R})$ に属する

ことは, すべての $\gamma \in \Gamma$ に対して, $W_{-\gamma}^{\mathbb{R}}(e^{\rho x} F)$ が $H_{w_{\gamma_\alpha}}^1(\mathbb{R})$ に属することと同値である. ここでトリーベル・リゾルキン空間 $\dot{F}_{p,q}^{s,w}$ を導入する ([1], [5] を参照). $H_w^p(\mathbb{R}) = \dot{F}_{p,2}^{0,w}(\mathbb{R})$ であり, $F \in \dot{F}_{p,q}^{s+\gamma,w}$ に対して, $\|W_{-\gamma}^{\mathbb{R}}(F)\|_{p,q}^{s,w} \sim \|F\|_{p,q}^{s+\gamma,w}$ である. このことから

命題 3.1. $f \in H^1(\Delta)$ となる必要十分条件は, $F = \mathcal{A}(f)$ が

$$e^{\rho x} F(x) \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \dot{F}_{1,2}^{\gamma,w,\gamma}(\mathbb{R})$$

となることであり, $\|f\|_{H^1(\Delta)} \sim \sum_{\gamma \in \Gamma} \|e^{\rho x} F\|_{\dot{F}_{1,2}^{\gamma,w,\gamma}(\mathbb{R})}$ である.

ここでトリーベル・リゾルキン空間 $\dot{F}_{p,q}^{s,w}$ のアトム分解を用いる. [5], 定理 4.1, [1], 定理 5.8 を参照されたい. アトムの定義は後述するとして, $F \in \dot{F}_{p,q}^{s,w}(\mathbb{R})$ は

$$F = \sum_Q \lambda_Q A_Q$$

と有界閉区間 Q に台をもつ s -滑らかアトム A_Q の和に分解され

$$\|F\|_{\dot{F}_{p,q}^{s,w}} = \left\| \left(\sum_Q (|Q|^{-s} |\lambda_Q| \tilde{\chi}_Q)^q \right)^{1/q} \right\|_{L_w^p} < \infty \quad (10)$$

となる. ただし, $\tilde{\chi}_Q = |Q|^{-\frac{1}{2}} \chi_Q$ は L^2 -ノルムで正規化された Q の特性関数である.

ここで s -滑らかアトム A_Q は有界閉区間 Q に台をもち, 次の性質を満たす.

$$\begin{aligned} (i) \quad & \text{supp} A_Q \subset Q, \\ (ii) \quad & \int A_Q(x) dx = 0, \\ (iii) \quad & \left\| \frac{d^k A_Q}{dx^k} \right\|_\infty \leq |Q|^{-\frac{1}{2}-k}, \quad 0 \leq k \leq [s+1]_+. \end{aligned} \quad (11)$$

これらの事実を用いると, 先の命題 3.1 は次のように書き換えられる.

命題 3.2. $f \in H^1(\Delta)$ とすれば, $e^{\rho x} F(x)$ は, すべての $\gamma \in \Gamma$ に対して $\dot{F}_{1,2}^{\gamma,w\gamma}(\mathbb{R})$ に属し, γ_α -滑らかアトム分解 $e^{\rho x} F(x) = \sum_Q \lambda_Q A_Q(x)$ をもち

$$\|f\|_{H_0^1(\Delta)} \sim \sum_{\gamma \in \Gamma} \|e^{\rho x} F\|_{\dot{F}_{1,2}^{\gamma,w\gamma}(\mathbb{R})} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \left\| \left(\sum_{|Q|} (|Q|^{-\gamma} |\lambda_Q| \tilde{\chi}_Q)^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_{w_\gamma}^1}$$

である. 逆に数列 $\{\lambda_Q\}$ が上述の右辺を有限とし, その和を $c_{\{\lambda_Q\}}$ とすれば, $f = \mathcal{A}^{-1}(e^{-\rho x} \sum_Q \lambda_Q A_Q|_{\mathbb{R}_+})$ は $H^1(\Delta)$ に属し, $\|f\|_{H^1(\Delta)} \leq c_{\{\lambda_Q\}}$ である.

ここでヤコビハイパー群上のアトムを次のように導入する.

定義 3.3. $Q \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$ とし, A_Q を γ_α -滑らかアトムとする. このとき

$$a_Q = \mathcal{A}^{-1}(e^{-\rho x} A_Q)$$

をヤコビアトムとよぶ.

命題 3.2 は次のように書き換えられる.

定理 3.4. $f \in H^1(\Delta)$ とすれば, $f = \sum_Q \lambda_Q a_Q$ とヤコビアトムの和に分解され

$$\|f\|_{H^1(\Delta)} \sim \sum_{\gamma \in \Gamma} \left\| \left(\sum_{|Q|} (|Q|^{-\gamma} |\lambda_Q| \tilde{\chi}_Q)^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_{w_\gamma}^1}$$

である. 逆に数列 $\{\lambda_Q\}$ が上述の右辺を有限とし, その和を $c_{\{\lambda_Q\}}$ とすれば, $f = \sum_Q \lambda_Q a_Q$ は $H^1(\Delta)$ に属し, $\|f\|_{H_0^1(\Delta)} \leq c_{\{\lambda_Q\}}$ である.

次にヤコビハイパー群上のクォークを導入する. A_Q を Q に台をもつ γ_α -滑らかアトムとし, $a_Q = \mathcal{A}^{-1}(e^{-\rho x} A_Q)$ を付随するヤコビアトムとする. この a_Q に (5) を適用すれば

$$\begin{aligned}
 a_Q(x) &= \frac{e^{\rho x}}{\Delta(x)} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma_0} W_{-\gamma}^{\mathbb{R}}(e^{-\rho x} A_Q)(x) A_\gamma(x) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\gamma \in \Gamma_1} A_\gamma(x) \int_x^\infty W_{-\gamma}^{\mathbb{R}}(e^{-\rho x} A_Q)(s) A_\gamma(x, s) ds \right) \\
 &= \frac{1}{\Delta(x)} \left(M_{Q,\gamma}(x) A_\gamma(x) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\gamma \in \Gamma_1} A_\gamma(x) e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-\rho s} M_{Q,\gamma}(s) A_Q(s) A_\gamma(x, s) ds \right) \\
 &= \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{\gamma \in \Gamma} q_{Q,\gamma}(x)
 \end{aligned} \tag{12}$$

となる. ここで $M_{Q,\gamma}(x) = e^{\rho x} W_{-\gamma}^{\mathbb{R}}(e^{-\rho x} A_Q)(x)$ とし, $q_{Q,\gamma}$ を

$$q_{Q,\gamma}(x) = A_\gamma(x) \begin{cases} M_{Q,\gamma}(x), & \text{if } \gamma \in \Gamma_0, \\ e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-\rho s} M_{Q,\gamma}(s) A_\gamma(x, s) ds, & \text{if } \gamma \in \Gamma_1 \end{cases} \tag{13}$$

と置いている.

定義 3.5. $q_{Q,\gamma}$ をヤコビアトム a_Q に付随するヤコビクォークとよぶ. (12) を a_Q のヤコビクォーク分解とよぶ. さらに $M_{Q,\gamma}$ を $q_{Q,\gamma}$ の核とよぶ.

このとき次の定理が成立する. 以下では

$$\begin{aligned}
 c_{Q,\gamma} &= \sum_{\gamma' \in \Gamma, \gamma' \leq \gamma} |Q|^{-\frac{1}{2}-\gamma'} |Q|_{w_{\gamma'}}, \\
 d_{Q,\gamma} &= |Q|^{-\frac{1}{2}} (1 + |Q|^{-\gamma})
 \end{aligned}$$

とする. ここで $|Q|_{w_\gamma} = \int_0^\infty \chi_Q(x) w_\gamma(x) dx$ である.

定理 3.6. $Q = [-b, b]$ あるいは $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ とする. このとき $\gamma > 0$ に対して

(1) γ が自然数であれば, $M_{Q,\gamma}$ は Q に台をもつ $\dot{F}_{1,2}^{0,w_\gamma}(\mathbb{R})$ のアトム $(1 + |Q|^{-\gamma})$ 倍であり, $|M_{Q,\gamma}(x)| \leq cd_{Q,\gamma}$ を満たす.

(2) γ が自然数でないとき, $\gamma = m + \mu$, ただし m は γ の整数部分, $0 < \mu < 1$ を残りの部分とすれば, $M_{Q,\gamma}$ は $Q_* = (-\infty, x_Q + |Q|)$ に台をもつ. $\dot{F}_{1,2}^{0,w_\gamma}(\mathbb{R})$ のモレキュル ([11], [12] を参照) の $(1 + |Q|^{-\gamma})$ 倍であり, 次の不等式を満たす.

$$|M_{Q,\gamma}(x)| \leq cd_{Q,\gamma} \left(1 + \frac{|x_Q - x|}{|Q|} \right)^{-(1+\mu)}. \tag{14}$$

系 3.7. ヤコビクォーク $q_{Q,\gamma}$ は, モーメント条件を除き, 定理 3.6 の $M_{Q,\gamma}$ の性質を満たす.

以上のようにヤコビアトムがヤコビクォークの和に分解され, 各ヤコビクォークの核がモレキュールとなる. 奇異な構造だが, 入れ子式になっている.

つぎにヤコビアトム, ヤコビモレキュールを一般化する. ヤコビクォーク $q_{Q,\gamma}$ を擬ヤコビクォーク $u_{Q,\gamma,\rho'}$, ヤコビアトム a_Q を擬ヤコビアトム $b_Q = \Delta^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma} u_{Q,\gamma,\rho'}$ の形に一般化する.

最初に $q_{Q,\gamma}$ を一般化するためにその核 $M_{Q,\gamma}$ を一般化する. 以下では $0 \leq \gamma \leq n+1$ とする. $\gamma \in \Gamma$ である必要はない. $Q = [-b, b]$ あるいは $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ とし, U_Q は

$$\left\| \frac{d^k U_Q}{dx^k} \right\|_\infty \leq |Q|^{-\frac{1}{2}-k}, \quad 0 \leq k \leq n+1$$

を満たすとする. $\rho' > 0$ とし, $0 \leq \gamma \leq n+1$ 対して

$$U_{Q,\gamma,\rho'}(x) = e^{\rho'x} W_{-\gamma}^{\mathbb{R}}(e^{-\rho'x} U_Q)(x) \quad (15)$$

と定義する. γ が自然数であれば, $U_{Q,\gamma,\rho'}$ は Q に台をもつが, 一般には Q_* に台をもつ. $\|U_{Q,\gamma,\rho'}\|_\infty \leq cd_{Q,\gamma}$ である. このようにして核 $M_{Q,\gamma}$ を $U_{Q,\gamma,\rho'}$ と一般化した, U_Q にはモーメント条件を課していないこと, また ρ を ρ' と変数化したことが特徴である. $V_{Q,\gamma}(x)$ を

$$V_{Q,\gamma}(x) = v_{Q,\gamma}(x) |\tanh x|^\gamma,$$

ただし $v_{Q,\gamma}$ は有界で滑らかな関数とする. ここで

$$d_Q = \max_{\gamma} d_{Q,\gamma} = \max_{\gamma} \sup_{x \geq 0} |v_{Q,\gamma}(x)|$$

と置く. また $V_{Q,\gamma}(x, s)$ を (6) を満たす関数とする.

定義 3.8. $U_{Q,\gamma,\rho'}(x)$, $V_{Q,\gamma}(x)$, $V_{Q,\gamma}(x, s)$ を上述の関数とし

$$u_{Q,\gamma,\rho'}(x) = V_{Q,\gamma}(x) \begin{cases} U_{Q,\gamma,\rho'}(x), \text{ あるいは} \\ e^{\rho'x} \int_x^\infty e^{-\rho's} U_{Q,\gamma,\rho'}(s) V_{Q,\gamma}(x, s) ds \end{cases}$$

と定義する. この $u_{Q,\gamma,\rho'}$ を擬ヤコビクォーク, $U_{Q,\gamma,\rho'}$ をその核とよぶ.

$U_{Q,\gamma,\rho'}$ はモーメント条件を除き, $M_{Q,\gamma}$ と同じ性質をもつので, 次の命題が得られる.

命題 3.9. $U_{Q,\gamma,\rho'}$ および $u_{Q,\gamma,\rho'}$ は定理 3.6, 系 3.7 の不等式を満たす, ただし右辺の定数は $cd_{Q,\gamma}$ で置き換える.

次に擬ヤコビアトムを定義する.

定義 3.10. $u_{Q,\gamma,\rho'}$ を擬ヤコビクォークの集合とし, その全体を Γ_* とする.

$$b_Q(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma_*, \rho' > 0} \frac{1}{\Delta(x)} u_{Q,\gamma,\rho'}(x)$$

がモーメント条件 $\int_0^\infty b_Q(x) \Delta(x) dx = 0$ を満たすとき, b_Q を擬ヤコビアトムとよぶ.

明らかにアトムは擬ヤコビアトムである. 実際, $U_Q = A_Q$, $\rho' = \rho$ とすれば, $u_{Q,\gamma,\rho'} = q_{Q,\gamma}$ となり

$$a_Q(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{\Delta(x)} q_{Q,\gamma}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{\Delta(x)} u_{Q,\gamma,\rho'}(x) = b_Q(x)$$

である. この b_Q が $H^1(\Delta)$ に属することを示すために次の命題とが鍵となる.

命題 3.11. $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ とし, $\gamma = m + \mu$, m を自然数, $0 \leq \mu < 1$ を残りの部分とする. $W_{-\gamma'}^{\mathbb{R}}(e^{\rho x} \mathcal{A}(\Delta^{-1} u_{Q, \gamma, \rho'}))(x)$ は Q_* に台をもち

$$d_Q d_{Q, \gamma} |\tanh x|^{\gamma - \gamma\alpha} \tag{16}$$

で押さえられる. さらに $x_Q \geq 2|Q|$ であるとき, $x \leq x_Q - 2|Q|$ に対して

$$d_Q d_{Q, \gamma} \left(1 + \frac{|x_Q - x|}{|Q|}\right)^{-(1+\mu)} |\tanh x|^{\gamma - \gamma\alpha - 1} \tag{17}$$

となる. また十分に小さな $\epsilon > 0$ に対して

$$d_Q d_{Q, \gamma} \left(\frac{\tanh |Q|}{\tanh x}\right)^\epsilon \left(1 + \frac{|x_Q - x|}{|Q|}\right)^{-(1+\mu-\epsilon)} (\tanh x)^{\gamma - \gamma\alpha} \tag{18}$$

となる.

系 3.12. 命題 3.11 の記号のもとで, $x_Q \geq 2|Q|$ を仮定する.

(1) $|Q| > 1$ とする. もし $u_{Q, \gamma, \rho'}$ が $[1, \infty) \cap Q$ に台をもつならば, $x \leq x_Q + |Q|$ に対して, $e^{\rho x} W_{-\gamma'}^{\mathbb{R}}(\mathcal{A}(\Delta^{-1} u_{Q, \gamma, \rho'}))(x)$ は次で押さえられる.

$$d_Q d_{Q, \gamma} \left(1 + \frac{|x_Q - x|}{|Q|}\right)^{-(1+\mu)}. \tag{19}$$

(2) $|Q| < 1$ とし, $\epsilon > 0$ を十分に小さくする. もし $u_{Q, \gamma, \rho'}$ が $[|Q|, \infty) \cap Q$ に台をもつならば, $x \leq x_Q + |Q|$ に対して, $e^{\rho x} W_{-\gamma'}^{\mathbb{R}}(\mathcal{A}(\Delta^{-1} u_{Q, \gamma, \rho'}))(x)$ は次で押さえられる.

$$d_Q d_{Q, \gamma} \left(1 + \frac{|x_Q - x|}{|Q|}\right)^{-(1+\mu-\epsilon)} |Q|^{\gamma - \gamma\alpha}. \tag{20}$$

これらの結果から次の定理を示すことができる.

定理 3.13. b_Q を擬ヤコビアトムとする. b_Q は $H^1(\Delta)$ に属し

$$\|b_Q\|_{H^1(\Delta)} = \|e^{\rho x} W_{-\gamma\alpha}^{\mathbb{R}}(\mathcal{A}(b_Q))\|_{H_{w_{\gamma\alpha}}^1(\mathbb{R})} \leq cd_Q c_{Q, \gamma\alpha}$$

である. 実際, $e^{\rho x} W_{-\gamma\alpha}^{\mathbb{R}}(\mathcal{A}(b_Q))$ は $\dot{F}_{1,2}^{0, w_{\gamma\alpha}}(\mathbb{R})$ のモレキュールの $d_Q(1 + |Q|^{-1})^{\gamma\alpha}$ 倍であり, $\|e^{\rho x} W_{-\gamma\alpha}^{\mathbb{R}}(\mathcal{A}(b_Q))\|_{\dot{F}_{1,2}^{0, w_{\gamma\alpha}}(\mathbb{R})} \leq cd_Q c_{Q, \gamma\alpha}$ となる.

4 応用

最後に応用を1つ紹介する. ユークリッド空間の場合, 膨張作用素は実ハーディ空間 $H^1(\mathbb{R})$ 上で有界である. このことは膨張作用素が $H^1(\mathbb{R})$ -ノルムを不変にすることから明らかである. 実際, アトム a_Q の膨張が再びアトムとなることから, $f \in H^1(\mathbb{R})$ に対して, $\|f_t\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}$ である. 同様の結果がヤコビハイパー群上の $H^1(\Delta)$ と (7) の膨張作用素に対して成り立つかを考える. ユークリッド空間と同様にヤコビアトム a_Q の (7) の膨張 $(a_Q)_t$ を評価すればよいのだが, 膨張を作用させたとき, 指数関数 $e^{\rho x}$ の部分が $e^{\rho \frac{x}{t}}$ となり, ヤコビアトムでなくなり, 評価を難しくする. このとき擬ヤコビクォークま

で分解して考えると, $\rho' = \frac{\rho}{t}$ とすれば, 膨張は擬ヤコビクォークにとどまる. 定理 3.13 を使うことができ, 次の結果を得ることができる.

定理 4.1. $f \in H^1(\Delta)$ とすれば

$$\|f_t\|_{H^1(\Delta)} \leq c(\tanh t)^{-\gamma_\alpha-1}(1+t)^{\gamma_\alpha+2}\|f\|_{H_0^1(\Delta)}$$

である. $\gamma \in \Gamma$ がすべて自然数のときは, 右辺の指数 $-\gamma_\alpha-1$, $\gamma_\alpha+2$ を $-\gamma_\alpha$, γ_α で置き換えられる.

この評価はヤコビハイパー群上でハウスドルフ作用素の $H^1(\Delta)$ -有界性を得るときに必要となる.

参考文献

- [1] M. Bownik and K-P. HO, *Atomic and Molecule decompositions of anisotropic Triebel-Lizorkin spaces*. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 358, 2005, pp. 1469-1510.
- [2] M. Flensted-Jensen, *Paley-Wiener type theorems for a differential operator connected with symmetric spaces*. Ark. Mat., Vol. 10, 1972, pp. 143-162.
- [3] M. Flensted-Jensen and T. Koornwinder, *The convolution structure and Jacobi transform expansions*. Ark. Mat., Vol. 11, 1973, pp. 245-262.
- [4] G.B. Folland and E.M. Stein, *Hardy Spaces on Homogeneous Groups*. Mathematical Notes 28, Princeton University Press, New Jersey, 1982.
- [5] M. Frazier and B. Jawerth, *A discrete transform and decompositions of distribution spaces*. J. Funct. Anal., Vol. 93, 1990, pp. 34-170.
- [6] T. Kawazoe, *Atomic Hardy space on semisimple Lie groups*. Japanese J. Math., Vol. 11, 1985, pp. 293-343.
- [7] T. Kawazoe, *Real Hardy spaces on real rank 1 semisimple Lie groups*. Japanese J. Math., Vol. 31, 2005, pp. 281-343.
- [8] T. Kawazoe, *H^1 -estimates of Littlewood-Paley and Lusin functions for Jacobi analysis*. Analysis in Theory and Appli., Vol. 25, 2009, pp. 201-229.
- [9] T. Kawazoe, *Atomic decomposition of a real Hardy space for Jacobi analysis*. Analysis in Theory and Appli., Vol. 2, 2011, pp. 309-404.
- [10] T. Koornwinder, *A new proof of a Paley-Wiener type theorem for the Jacobi transform*. Ark. Mat., Vol. 13, 1975, pp. 145-159.
- [11] X. Li and L. Peng, *The molecular characterization of weighted Hardy spaces*. Science in China (Series A), vol. 44 (2), 2011, pp. 201-211.
- [12] M.H. Taibleson and G.Weiss, *The molecular characterization of certain Hardy spaces*. Asterisque, 77, 1980, pp. 67-149.
- [13] T. Kawazoe, *Revisiting the real Hardy space on the Jacobi hypergroup and its atom and quark decompositions*. preprint.