ヤコビ解析におけるクォーク分解

慶應大学名誉教授　河　　添　　　　　健

概　要

著者は長年，ヤコビ解析における実ハーディ空間の構築とそのアトム分解を研究してきた．この稿ではアトムをさらに分解するクォーク分解を紹介する．応用として膨張作用素の実ハーディ空間での有界性が得られる．詳細は［13］にまとめる．

1　ヤコビ解析

最初に $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ 上のヤコビハイパー群に関する基礎知識をまとめる．詳しくは参考文献[2], [3], [10] を参照されたい．以下では $\alpha \geq \beta \geq -1/2$，$(\alpha,\beta) \neq (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，$\rho = \alpha+\beta+1$ とする．$\mathbb{R}_+$ 上の重み関数を

$$\Delta(x) = \Delta_{\alpha,\beta}(x) = (\sinh x)^{2\alpha+1}(\cosh x)^{2\beta+1}$$

とし，$\mathbb{R}_+$ 上の関数 f の L^p- ノルム，$p \geq 1$, を

$$\|f\|_{L^p(\Delta)} = \Big(\int_0^\infty |f(x)|^p \Delta(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

とする．また $\|f\|_\infty = \text{ess.}\sup_{x\geq 0}|f(x)|$ とする．$L^p(\Delta)$を有限 L^p- ノルムをもつ $\mathbb{R}_+$ 上の関数の全体とし，$C_c^\infty(\Delta)$ をコンパクトな台をもつ滑らかな $\mathbb{R}$ 上の偶関数の全体とする．ここで $\phi_\lambda(x)$，$\lambda \in \mathbb{R}$，を第一種ヤコビ関数，すなわち微分作用素 $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\Delta'(x)}{\Delta(x)}\frac{d}{dx}$ の固有値 $-(\lambda^2+\rho^2)$ をもつ固有関数で，初期条件 $\phi_\lambda^{\alpha,\beta}(0)=1$，$\frac{d}{dx}\phi_\lambda^{\alpha,\beta}(0)=0$ を満たす関数とする．この ϕ_λ を用いて，$f \in L^1(\Delta)$ のヤコビ変換を

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\phi_\lambda(x)\Delta(x)dx$$

と定義する．$\phi_\lambda(x)$は λ に関して偶関数なので，$\hat{f}(\lambda)$ も $\mathbb{R}$ 上の偶関数となる．$f \in C_c^\infty(\Delta)$ に対して逆変換公式は

$$f(x) = \int_0^\infty \hat{f}(\lambda)\phi_\lambda(x)|C(\lambda)|^{-2}d\lambda$$

となる．ここで $C(\lambda)$はハリッシュ - チャンドラの C- 関数とよばれる有理型の関数である．古典的なフーリエ変換と同様に，ヤコビ変換においても $L^2(\Delta)$上でプランシェレルの定理，$C_c^\infty(\Delta)$ 上でペリー・

ウィーナー型の定理が成立する．ヤコビ関数 ϕ_λ はいわゆる積公式を満たし

$$\phi_\lambda(x)\phi_\lambda(y) = \int_0^\infty \phi_\lambda(z)K(x,y,z)\Delta(z)dz$$

と書ける．ここで核関数は正値であり，この核関数を用いて一般化した移動を

$$T_x f(y) = \int_0^\infty f(z)K(x,y,z)dz$$

と定義する．この移動を用いて $f, g \in L^1(\Delta)$ の畳み込みを

$$f * g(x) = \int_0^\infty f(y)T_x g(y)\Delta(y)dy$$

とする．容易に $\widehat{f*g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)\cdot\hat{g}(\lambda)$ である．以上の話では群構造は必要無いが，この畳み込み $*$ を有することで，$(\mathbb{R}_+, \Delta, *)$ をヤコビハイパー群とよぶ．

$\Delta(s)\phi_\lambda(s)$ は λ の関数として，コンパクトな台 $[0,\ s]$ をもつ関数のフーリエ変換として次のように与えられる．

$$\Delta(s)\phi_\lambda(s) = c\int_0^s \cos(\lambda x)A(x,s)dx. \tag{1}$$

この $A(x,s)$ を用いて，$f \in L^1(\Delta)$ のアーベル変換を

$$\mathcal{A}(f)(x) = \int_x^\infty f(s)A(x,s)ds$$

で定義する．アーベル変換 $\mathcal{A}$ は $L^1(\Delta)$ を $L^1(\mathbb{R})$ に，$C_c^\infty(\Delta)$ を $C_c^\infty(\mathbb{R})$ に写す．また (1) より，$f \in L^1(\Delta)$ のヤコビ変換 $\hat{f}$ は $\mathcal{A}(f)$ のフーリエ変換と一致する．このことから

$$\mathcal{A}(f*g) = \mathcal{A}(f) \circledast \mathcal{A}(g) \tag{2}$$

である．右辺の $\circledast$ はユークリッド空間の畳み込みである．このようにアーベル変換 $\mathcal{A}$ はヤコビハイパー群上の諸対象をユークリッド空間上の諸対象に写す．アーベル変換 $\mathcal{A}$ は $(\mathbb{R}_+, \Delta, *)$ における分数積分作用素を用いて

$$\mathcal{A} = 2^{3\alpha+\frac{3}{2}} W^1_{\alpha-\beta} \circ W^2_{\beta+\frac{1}{2}} \tag{3}$$

と書ける．ここで

$$W^\sigma_\mu(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_x^\infty f(s)(\cosh\sigma s - \cosh\sigma x)^{\mu-1} d\cosh\sigma s \tag{4}$$

である．$\mu \in \mathbb{C}$ に解析接続でき，$\mu < 0$ のときは，分数微分作用素である．積分核 $A(x,s)$ の具体形は

$$\begin{aligned} A(x,s) &= c(\sinh 2s)(\cosh s)^{\beta-\frac{1}{2}}(\cosh s - \cosh x)^{\alpha-\frac{1}{2}} \\ &\qquad \times F\Big(\tfrac{1}{2}+\beta, \tfrac{1}{2}-\beta, \alpha+\tfrac{1}{2}; \frac{\cosh s - \cosh x}{2\cosh s}\Big) \\ &= e^{\rho s}(\tanh s)^{\alpha+\frac{1}{2}} \tanh(s-x)^{\alpha-\frac{1}{2}} B(x,s) \end{aligned}$$

となる．ここで $B(x,s)$ は，x，s に関して滑らかで微分を含めて有界な関数である．以下ではこのような関数を同じ記号 B で表す．アーベル逆変換は（3）より $f = \mathcal{A}^{-1}(F) = cW^2_{-(\beta+\frac{1}{2})} \circ W^1_{-(\alpha-\beta)}(F)$ と分数微分作用素を用いて表される．この分数微分作用素をユークリッド空間上の分数微分作用素（積分作用素で言えば，(4)の $\cosh\sigma s - \cosh\sigma x$ を $s-x$ に，$d\cosh\sigma s$ を ds に変えたもの）で表すことができ，次の様になる．詳しくは［8］を参照されたい．$\beta+\frac{1}{2} = m+\mu$，$\alpha-\beta = m'+\mu'$ と整数部分を m, m'，残りの部分を $0 \leq \mu, \mu' < 1$ とし，集合 Γ_0, Γ_1 を

$$\Gamma_0 = \{k+\mu+\mu' \mid 1_{m+m'} \leq k \leq m+m'\}$$
$$\Gamma_1 = \{k, k+\mu, k+\mu' \mid 1_{m+m'} \leq k \leq m+m'\}$$

と定める．ここで $\ell = 0$ のとき，$1_\ell = 0$ で，その他のときは $1_\ell = 1$ である．また $\mu = \mu' = 0$ のときは $\Gamma_1 = \emptyset$ である．このとき関数 $A_\gamma(x)$，$\gamma \in \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$，と $A_\gamma(x, s)$, $\gamma \in \Gamma_1$，が存在し，$x \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$f(x) = \frac{e^{\rho x}}{\Delta(x)}\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma_0} A_\gamma(x) W^{\mathbb{R}}_{-\gamma}(F)(x) + \sum_{\gamma\in\Gamma_1} A_\gamma(x)\int_x^\infty W^{\mathbb{R}}_{-\gamma}(F)(s) A_\gamma(x,s)ds\Big) \tag{5}$$

となる．ただし $A_\gamma(x) = O((\tanh x)^\gamma)$ であり，またある $0 < \xi_\gamma < 1$ が存在して

$$A_\gamma(x,s) = \frac{\tanh(s-x)}{(s-x)^{1+\xi_\gamma}}\frac{(\tanh x)^{\xi_\gamma}}{\tanh s}B(x,s)$$

と書ける．このとき

$$\int_x^\infty A_\gamma(x,s)ds \leq c_0 \ \text{ for all } x > 0, \int_0^s A_\gamma(x,s)dx \leq c_0 \ \text{ for all } s > 0 \tag{6}$$

となることに注意する．

2　実ハーディ空間

前節の（5），(6)に注意すれば，$F = \mathcal{A}(f)$ としたとき

$$\|f\|_{L^1(\Delta)} \leq \sum_{\gamma\in\Gamma} c\|e^{\rho x} W^{\mathbb{R}}_{-\gamma}(F)\|_{L^1_{w_\gamma}(\mathbb{R}_+)}$$

である．ただし $w_\gamma(x) = |\tanh x|^\gamma$ であり，$L^1_{w_\gamma}(\mathbb{R}_+)$ は $\mathbb{R}_+$ 上の w_γ- 重み付き L^1 空間である．逆も示すことができ，次の定理を得る．

定理 2.1.　$f \in L^1(\Delta)$ のアーベル変換を $F = \mathcal{A}(f)$ とすれば

$$\|f\|_{L^1(\Delta)} \sim \sum_{\gamma\in\Gamma} \|e^{\rho x} W^{\mathbb{R}}_{-\gamma}(F)\|_{L^1_{w_\gamma}(\mathbb{R}_+)} \sim \|e^{\rho x} W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F)\|_{L^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R}_+)}.$$

この定理に現れる γ_α は $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ の最大値であり，以下ではその整数部分を n，残りの部分を $0 \leq$

$\delta < 1$ とする．

$$\gamma_\alpha = \max\Gamma = (\beta + \tfrac{1}{2}) + (\alpha - \beta) = \alpha + \tfrac{1}{2} = n + \delta.$$

次に実ハーディ空間 $H^1(\Delta)$を定義する．ユークリッド空間における実ハーディ空間に関しては，いろいろな導入方法があり，それらは同値となる．ここでは動径最大関数を用いる方法をヤコビハイパー群に拡張することにより，$H^1(\Delta)$を定義する．詳しくは［7]，[8］を参照されたい．$g \in C_c^\infty(\Delta)$でもって［$-1, 1$］に台をもち，$g(x) = O(x^{2M})$，$M \geq 2$，$\int_0^\infty g(x)\Delta(x)dx = 1$，$\int_0^\infty g(x)x\Delta(x)dx \leq \frac{1}{4}$ をみたすものを固定する．ここで $t > 0$ に対して g の膨張 g_t を

$$g_t(x) = \frac{1}{t\Delta(x)} g(\frac{x}{t})\Delta(\frac{x}{t}) \tag{7}$$

と定義する．明らかに g_t の台は$[-t,\ t]$であり，$\|g_t\|_{L^1(\Delta)} = \|g\|_{L^1(\Delta)}$である．ユークリッド空間のときと同様に，$g_t$ は $L^p(\Delta)$，$1 \leq p \leq \infty$，との畳み込みにおいて，1の近似を与える．以下の議論では次の性質が重要となる．

補題 2.2.　$\lambda \in \mathbb{R}$，$t > 0$ に対して，$|\hat{g}_t(\lambda + i\rho)| \to 1 \ \mathit{if}\ |t\lambda| \to 0$となる．また$|\hat{g}_t(\lambda + i\rho)| \geq \frac{1}{2}\ \mathit{if}\ |t\lambda| \leq 2$である．

補題 2.3.　$G^t = \mathcal{A}(g_t)$とすれば，$n \in \mathbb{N}$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left|\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n (e^{\rho x}G^t)^\sim(\lambda)\right| \sim ct^n(1 + |t\lambda|)^{-(2M+\gamma_\alpha)}.$$

（7）で定めた膨張を用いて，動径最大作用素 M_g を

$$M_g f(x) = \sup_{t>0} |f * g_t(x)|$$

で定義する．容易に M_g は最大定理を満たす．すなわち $1 < p \leq \infty$ に対して，M_g は $L^p(\Delta)$有界であり，$p=1$ のときは，弱 L^1 評価を満たす．ユークリッド空間のときと同様に，この M_g を用いて $H^1(\Delta)$を次のように定義する．

定義 2.4.　$M_g f \in L^1(\Delta)$となる $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Delta)$の全体を $H^1(\Delta)$とし，そのノルムを$\|f\|_{H^1(\Delta)} = \|M_g f\|_{L^1(\Delta)}$とする．

ユークリッド空間の場合と同様に M_g は最大定理の逆も満たすので

$$H^1(\Delta) \subset L^1(\Delta)$$

である．ここで $H^1(\Delta)$にアーベル変換 $\mathcal{A}$ を作用させることにより，$H^1(\Delta)$をユークリッド空間の実ハーディ空間と関連付ける．(5)を $f * g_t$ に適用し，(2)を用いる．$F = \mathcal{A}(f)$，$G^t = \mathcal{A}(g_t)$ とすれば

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sup_{t>0}|f*g_t(x)|\Delta(x)dx &\le c\sum_\gamma \int_0^\infty e^{\rho x}\sup_{t>0}|W^{\mathbb{R}}_{-\gamma}(F)\circledast G^t(x)|w_\gamma(x)dx \\ &\le c\int_0^\infty e^{\rho x}\sup_{t>0}|W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F)\circledast G^t(x)|w_{\gamma_\alpha}(x)dx \\ &= c\int_0^\infty \sup_{t>0}|(e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F))\circledast(e^{\rho x}G^t)(x)|w_{\gamma_\alpha}(x)dx\end{aligned}$$

となる．よって

$$\|f\|_{H^1(\Delta)} \le c\int_0^\infty \sup_{t>0}|(e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F))\circledast(e^{\rho x}G^t)(x)|w_{\gamma_\alpha}(x)dx$$

を得る．定理 2.1 の証明と同様に，逆の評価を得ることができ，最終的に

$$\|f\|_{H^1(\Delta)} \sim \int_0^\infty \sup_{t>0}|(e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F))\circledast(e^{\rho x}G^t)(x)|w_{\gamma_\alpha}(x)dx$$

となる．ここで補題 2.3 に注目する．この補題は $e^{\rho x}G^t$ のフーリエ変換が，ユークリッド空間における膨張関数のフーリエ変換と同じ性質を満たすことを示している．もしある関数がΨが存在して，$e^{\rho x}G^t$ = Ψ_t（右辺はユークリッド空間における膨張）と書くことができれば

$$\begin{aligned}\|f\|_{H^1(\Delta)} &= \|M_g f\|_{L^1(\Delta)} \\ &\sim \int_0^\infty \sup_{t>0}|e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F)\circledast e^{\rho x}G^t(x)|w_{\gamma_\alpha}(x)dx \\ &\sim \int_0^\infty \sup_{t>0}|e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F)\circledast \Psi_t(x)|w_{\gamma_\alpha}(x)dx \\ &= \|M^{\mathbb{R}}_\Psi(e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F))\|_{L^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R}_+)}\end{aligned}$$

となる．ただし $M^{\mathbb{R}}_\Psi$ はユークリッド空間の動径最大作用素である．実際はΨは存在しないが，$e^{x}G^t(x)$は，[4]，1 章 D で定義されたノルム $\|\cdot\|_{(1)}$ を有限とする．このことからユーグリッド空間における実ハーディ空間の構成を，フーリエ変換をとった形の議論で行えば上述の計算は正当化される．[4]，2 章，[7]，定理 8.6 を参照されたい．以上により次の定理を得る．

定理 2.5. $f\in H^1(\Delta)$に対して $F=\mathcal{A}(f)$ とすれば

$$\|f\|_{H^1(\Delta)} \sim \|M^{\mathbb{R}}_\Psi(e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F))\|_{L^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R}_+)}.$$

以上は膨張を（7）とした議論であるが，新たな膨張として

$$g_{[t]}(x)=\mathcal{A}^{-1}(e^{-\rho x}(e^{\rho x}\mathcal{A}(g))_t)$$

と定義する．右辺の膨張はユークリッド空間の膨張である．この膨張を用いて最大作用素 $M^\dagger_g$ を

$$M^\dagger_g f(x)=\sup_{t>0}|f*g_{[t]}(x)|$$

と定義する．そして実ハーディ空間 $H^1_\dagger(\Delta)$ を，$f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Delta)$ で $M^\dagger_g f\in L^1(\Delta)$ となるもの全体とし，そのノルムを $\|f\|_{H^1_\dagger(\Delta)}=\|M^\dagger_g f\|_{L^1(\Delta)}$ とする．このとき $e^{\rho x}\mathcal{A}(g_{[t]})=(e^{\rho x}\mathcal{A}(g))_t$, となるので ψ(g)= $e^{\rho x}\mathcal{A}(g)$と置けば

$$e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma}(\mathcal{A}(f*g_{[t]}))=(e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma}(F))\circledast(e^{\rho x}\mathcal{A}(g))_t=(e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma}(F))\circledast\psi_t$$

となる．よって先の議論を繰り返せば $\|f\|_{H^1_\dagger(\Delta)}\sim\|M_\psi(e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F))\|_{L^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R}_+)}$ である．

定理 2.6.　$H^1(\Delta)=H^1_\dagger(\Delta)$ であり，$\|\cdot\|_{H^1(\Delta)}\sim\|\cdot\|_{H^1_\dagger(\Delta)}$ となる．

以上により $H^1(\Delta)$ は，$e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F)$ の最大関数の $L^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R}_+)$-有界性で特徴付けられた．ユークリッド空間の実ハーディ空間は，最大関数が L^1 関数となることで特徴付けられるので，$f\in H^1(\Delta)$ となる必要十分条件は $e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F)\in H^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R}_+)$ としたいのだが，半空間 $\mathbb{R}_+$ 上の実ハーディ空間の定義には注意を要する．通常は $\mathbb{R}_+$ 上の関数 G で，$G=G_0|_{\mathbb{R}_+}, G_0\in H^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R})$, となるもの全体とし，そのノルムを G_0 の $H^1_{w_{\gamma_\alpha}}$-ノルムの下限で定める．我々の設定では，$F=\mathcal{A}(f)$ は偶関数なので，$-\mathbb{R}_+$ の部分は一意に定まっている．この部分を評価すると（8）の $L^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R}_+)$ を $L^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R})$ に置き換えることができる．最終的に次の定理が得られる．

定理 2.7.　$f\in L^1(\Delta)$ で，$M^{\mathbb{R}}_\Psi(e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F))$ が $L^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R})$ に属するもの，すなわち $e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F)$ が $H^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R})$ に属するもの全体と $H^1(\Delta)$ は一致する．

$$\|f\|_{H^1(\Delta)}\sim\|M^{\mathbb{R}}_\Psi(e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F))\|_{L^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R})}\sim\|e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F)\|_{H^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R})}. \tag{9}$$

3　アトムとクォーク

前節ではヤコビハイパー群 $(\mathbb{R}_+,\Delta,*)$ 上の実ハーディ空間 $H^1(\Delta)$ を $e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F)$ が $H^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R})$ に属することで定義した．ここで

$$\begin{aligned}e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F)(x)\sim&\sum_{\ell=0}^{n}c_\ell W^{\mathbb{R}}_{-(\ell+\mu)}(e^{\rho x}F)(x)\\&+\sum_{\ell=0}^{n}d_\ell\int_x^\infty W^{\mathbb{R}}_{-\ell}(e^{\rho x}F)(s))V_\ell(x,s)ds,\end{aligned}$$

ただし $V_\ell(x,\ s)=\dfrac{1-e^{-\rho(s-x)}}{(s-x)^{\mu+1}}$，と書けることに注意する．よって $e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(F)$ が $H^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R})$ に属することは，すべての $\gamma\in\Gamma$ に対して，$W^{\mathbb{R}}_{-\gamma}(e^{\rho x}F)$ が $H^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R})$ に属することと同値である．ここでトリーベル・リゾルキン空間 $\dot{F}^{s,w}_{p,q}$ を導入する（[1], [5]を参照）．$H^p_w(\mathbb{R})=\dot{F}^{0,w}_{p,2}(\mathbb{R})$ であり，$F\in\dot{F}^{s+\gamma,w}_{p,q}$ に対して，$\|W^{\mathbb{R}}_{-\gamma}(F)\|^{s,w}_{p,q}\sim\|F\|^{s+\gamma,w}_{p,q}$ である．このことから

命題 3.1.　$f\in H^1(\Delta)$ となる必要十分条件は，$F=\mathcal{A}(f)$ が

$$e^{\rho x}F(x)\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\dot{F}^{\gamma,w_\gamma}_{1,2}(\mathbb{R})$$

となることであり，$\|f\|_{H^1(\Delta)}\sim\sum_{\gamma\in\Gamma}\|e^{\rho x}F\|_{\dot{F}^{\gamma,w_\gamma}_{1,2}(\mathbb{R})}$ である．

ここでトリーベル・リゾルキン空間 $\dot{F}^{s,w}_{p,q}$ のアトム分解を用いる．[5]，定理 4.1, [1]，定理 5.8 を参照されたい．アトムの定義は後述するとして，$F\in\dot{F}^{s,w}_{p,q}(\mathbb{R})$ は

$$F = \sum_Q \lambda_Q A_Q$$

と有界閉区間 Q に台をもつ s- 滑らかアトムの和に分解され

$$\|F\|_{\dot{F}^{s,w}_{p,q}} = \|(\sum_Q (|Q|^{-s}|\lambda_Q|\widetilde{\chi}_Q)^q)^{1/q}\|_{L^p_w} < \infty \tag{10}$$

となる．ただし，$\widetilde{\chi}_Q = |Q|^{-\frac{1}{2}}\chi_Q$ は L^2- ノルムで正規化された Q の特性関数である．

ここで s- 滑らかアトム A_Q は有界閉区間 Q に台をもち，次の性質を満たす．

$$\begin{aligned} &(i) \quad \mathrm{supp} A_Q \subset Q, \\ &(ii) \quad \int A_Q(x)dx = 0, \\ &(iii) \quad \|\frac{d^k A_Q}{dx^k}\|_\infty \le |Q|^{-\frac{1}{2}-k},\ 0 \le k \le [s+1]_+. \end{aligned} \tag{11}$$

これらの事実を用いると，先の命題 3.1 は次のように書き換えられる．

命題 3.2. $f \in H^1(\Delta)$とすれば，$e^{\rho x}F(x)$は，すべての $\gamma \in \Gamma$ に対して $\dot{F}^{\gamma,w_\gamma}_{1,2}(\mathbb{R})$ に属し，γ_α- 滑らかアトム分解 $e^{\rho x}F(x)= \sum_Q \lambda_Q A_Q(x)$ をもち

$$\|f\|_{H^1_0(\Delta)} \sim \sum_{\gamma\in\Gamma} \|e^{\rho x}F\|_{\dot{F}^{\gamma,w_\gamma}_{1,2}(\mathbb{R})} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \|(\sum_{|Q|}(|Q|^{-\gamma}|\lambda_Q|\widetilde{\chi}_Q)^2)^{1/2}\|_{L^1_{w_\gamma}}$$

である．逆に数列 $\{\lambda_Q\}$ が上述の右辺を有限とし，その和を $c_{\{\lambda_Q\}}$ とすれば，$f = \mathcal{A}^{-1}(e^{-\rho x}\sum_Q \lambda_Q A_Q|_{\mathbb{R}_+})$ は $H^1(\Delta)$に属し，$\|f\|_{H^1(\Delta)} \le c_{\{\lambda_Q\}}$ である．

ここでヤコビハイパー群上のアトムを次のように導入する．

定義 3.3. $Q \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$ とし，A_Q を γ_α- 滑らかアトムとする．このとき

$$a_Q = \mathcal{A}^{-1}(e^{-\rho x}A_Q)$$

をヤコビアトムとよぶ．

命題 3.2 は次のように書き換えられる．

定理 3.4. $f \in H^1(\Delta)$とすれば，$f = \sum_Q \lambda_Q a_Q$ とヤコビアトムの和に分解され

$$\|f\|_{H^1(\Delta)} \sim \sum_{\gamma\in\Gamma} \|(\sum_{|Q|}(|Q|^{-\gamma}|\lambda_Q|\widetilde{\chi}_Q)^2)^{1/2}\|_{L^1_{w_\gamma}}$$

である．逆に数列 $\{\lambda_Q\}$ が上述の右辺を有限とし，その和を $c_{\{\lambda_Q\}}$ とすれば，$f = \sum_Q \lambda_Q a_Q$ は $H^1(\Delta)$に属し，$\|f\|_{H^1_0(\Delta)} \le c_{\{\lambda_Q\}}$ である．

次にヤコビハイパー群上のクォークを導入する．A_Q を Q に台をもつ $\gamma\alpha$- 滑らかアトムとし，$a_Q = A^{-1}(e^{-\rho x}A_Q)$ を付随するヤコビアトムとする．この a_Q に(5)を適用すれば

$$
\begin{aligned}
a_Q(x) =& \frac{e^{\rho x}}{\Delta(x)}\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma_0} W^{\mathbb{R}}_{-\gamma}(e^{-\rho x}A_Q)(x)A_\gamma(x)\\
&\qquad + \sum_{\gamma\in\Gamma_1} A_\gamma(x)\int_x^\infty W^{\mathbb{R}}_{-\gamma}(e^{-\rho x}A_Q)(s)A_\gamma(x,s)ds\Big)\\
=& \frac{1}{\Delta(x)}\Big(M_{Q,\gamma}(x)A_\gamma(x)\\
&\qquad + \sum_{\gamma\in\Gamma_1} A_\gamma(x)e^{\rho x}\int_x^\infty e^{-\rho s}M_{Q,\gamma}(s)A_Q)(s)A_\gamma(x,s)ds\Big)\\
=& \frac{1}{\Delta(x)}\sum_{\gamma\in\Gamma} q_{Q,\gamma}(x) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

となる．ここで $M_{Q,\gamma}(x) = e^{\rho x}W^{\mathbb{R}}_{-\gamma}(e^{-\rho x}A_Q)(x)$ とし，$q_{Q,\gamma}$ を

$$
q_{Q,\gamma}(x) = A_\gamma(x)\begin{cases} M_{Q,\gamma}(x), & \text{if } \gamma\in\Gamma_0,\\ e^{\rho x}\displaystyle\int_x^\infty e^{-\rho s}M_{Q,\gamma}(s)A_\gamma(x,s)ds, & \text{if } \gamma\in\Gamma_1 \end{cases} \qquad (13)
$$

と置いている．

定義 3.5.　$q_{Q,\gamma}$ をヤコビアトム a_Q に付随するヤコビクォークとよぶ．(12)を a_Q のヤコビクォーク分解とよぶ．さらに $M_{Q,\gamma}$ を $q_{Q,\gamma}$ の核とよぶ．

このとき次の定理が成立する．以下では

$$
\begin{aligned}
c_{Q,\gamma} &= \sum_{\gamma'\in\Gamma,\gamma'\le\gamma} |Q|^{-\frac{1}{2}-\gamma'}|Q|_{w_{\gamma'}},\\
d_{Q,\gamma} &= |Q|^{-\frac{1}{2}}(1+|Q|^{-\gamma})
\end{aligned}
$$

とする．ここで $|Q|_{w_\gamma} = \displaystyle\int_0^\infty \chi_Q(x)w_\gamma(x)dx$ である．

定理 3.6.　$Q = [-b, b]$ あるいは $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ とする．このとき $\gamma > 0$ に対して

(1) γ が自然数であれば，$M_{Q,\gamma}$ は Q に台をもつ $\dot{F}^{0,w_\gamma}_{1,2}(\mathbb{R})$ のアトムの $(1 + |Q|^{-\gamma})$ 倍であり，$|M_{Q,\gamma}(x)| \le cd_{Q,\gamma}$ を満たす．

(2) γ が自然数でないとき，$\gamma = m + \mu$，ただし m は γ の整数部分，$0 < \mu < 1$ を残りの部分とすれば，$M_{Q,\gamma}$ は $Q_* = (-\infty, x_Q + |Q|)$ に台をもつ．$\dot{F}^{0,w_\gamma}_{1,2}(\mathbb{R})$ のモレキュール（[11], [12] を参照）の $(1 + |Q|^{-\gamma})$ 倍であり，次の不等式を満たす．

$$
|M_{Q,\gamma}(x)| \le cd_{Q,\gamma}\Big(1+\frac{|x_Q - x|}{|Q|}\Big)^{-(1+\mu)}. \qquad (14)
$$

系 3.7. ヤコビクォーク $q_{Q,\gamma}$ は，モーメント条件を除き，定理 3.6 の $M_{Q,\gamma}$ の性質を満たす．

以上のようにヤコビアトムがヤコビクォークの和に分解され，各ヤコビクォークの核がモレキュールとなる．奇異な構造だが，入れ子式になっている．

つぎにヤコブアトム，ヤコビモレキュールを一般化する．ヤコビクォーク $q_{Q,\gamma}$ を擬ヤコビクォーク $u_{Q,\gamma,\rho'}$, ヤコビアトム a_Q を擬ヤコビアトム $b_Q = \Delta^{-1}\sum_{\gamma\in\Gamma} u_{Q,\gamma,\rho'}$ の形に一般化する．

最初に $q_{Q,\gamma}$ を一般化するためにその核 $M_{Q,\gamma}$ を一般化する．以下では $0 \le \gamma \le n+1$ とする．$\gamma \in \Gamma$ である必要はない．$Q = [-b, b]$ あるいは $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ とし，U_Q は

$$\|\frac{d^k U_Q}{dx^k}\|_\infty \le |Q|^{-\frac{1}{2}-k},\ 0 \le k \le n+1$$

を満たすとする．$\rho' > 0$ とし，$0 \le \gamma \le n+1$ 対して

$$U_{Q,\gamma,\rho'}(x) = e^{\rho' x} W^{\mathbb{R}}_{-\gamma}(e^{-\rho' x} U_Q)(x) \tag{15}$$

と定義する．γ が自然数であれば，$U_{Q,\gamma,\rho'}$ は Q に台をもつが，一般には Q_* に台をもつ．$\|U_{Q,\gamma,\rho'}\|_\infty \le cd_{Q,\gamma}$ である．このようにして核 $M_{Q,\gamma}$ を $U_{Q,\gamma,\rho'}$ と一般化したが，U_Q にはモーメント条件を課していないこと，また ρ を ρ' と変数化したことが特徴である．$V_{Q,\gamma}(x)$ を

$$V_{Q,\gamma}(x) = v_{Q,\gamma}(x)|\tanh x|^\gamma,$$

ただし $v_{Q,\gamma}$ は有界で滑らかな関数とする．ここで

$$d_Q = \max_\gamma d_{Q,\gamma} = \max_\gamma \sup_{x\ge 0} |v_{Q,\gamma}(x)|$$

と置く．また $V_{Q,\gamma}(x, s)$ を(6)を満たす関数とする．

定義 3.8. $U_{Q,\gamma,\rho'}(x)$, $V_{Q,\gamma}(x)$, $V_{Q,\gamma}(x, s)$ を上述の関数とし

$$u_{Q,\gamma,\rho'}(x) = V_{Q,\gamma}(x)\begin{cases} U_{Q,\gamma,\rho'}(x),\ \text{あるいは} \\ e^{\rho' x}\displaystyle\int_x^\infty e^{-\rho' s} U_{Q,\gamma,\rho'}(s) V_{Q,\gamma}(x,s)ds \end{cases}$$

と定義する．この $u_{Q,\gamma,\rho'}$ を擬ヤコビクォーク，$U_{Q,\gamma,\rho'}$ をその核とよぶ．

$U_{Q,\gamma,\rho'}$ はモーメント条件を除き，$M_{Q,\gamma}$ と同じ性質をもつので，次の命題が得られる．

命題 3.9. $U_{Q,\gamma,\rho'}$ および $u_{Q,\gamma,\rho'}$ は定理 3.6, 系 3.7 の不等式を満たす，ただし右辺の定数は $cd_{Q,\gamma}$ で置き換える．

次に擬ヤコビアトムを定義する．

定義 3.10. $u_{Q,\gamma,\rho'}$ を擬ヤコビクォークの集合とし，その全体を Γ_* とする．

$$b_Q(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma_*,\rho'>0} \frac{1}{\Delta(x)} u_{Q,\gamma,\rho'}(x)$$

がモーメント条件 $\displaystyle\int_0^\infty b_Q(x)\Delta(x)dx = 0$ を満たすとき，b_Q を擬ヤコビアトムとよぶ．

明らかにアトムは擬ヤコビアトムである．実際，$U_Q = A_Q$, $\rho' = \rho$ とすれば，$u_{Q,\gamma,\rho'} = q_{Q,\gamma}$ となり

$$a_Q(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{1}{\Delta(x)} q_{Q,\gamma}(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{1}{\Delta(x)} u_{Q,\gamma,\rho'}(x) = b_Q(x)$$

である．この b_Q が $H^1(\Delta)$ に属することを示すために次の命題とが鍵となる．

命題3.11.　$\gamma, \gamma' \in \Gamma$ とし，$\gamma = m + \mu$, m を自然数，$0 \leq \mu < 1$ を残りの部分とする．$W^{\mathbb{R}}_{-\gamma'}(e^{\rho x}\mathcal{A}(\Delta^{-1}u_{Q,\gamma,\rho'}))(x)$ は Q_* に台をもち

$$d_Q d_{Q,\gamma} |\tanh x|^{\gamma-\gamma_\alpha} \tag{16}$$

で押さえられる．さらに $x_Q \geq 2|Q|$ であるとき，$x \leq x_Q - 2|Q|$ に対して

$$d_Q d_{Q,\gamma}\Big(1 + \frac{|x_Q - x|}{|Q|}\Big)^{-(1+\mu)} |\tanh x|^{\gamma-\gamma_\alpha-1} \tag{17}$$

となる．また十分に小さな $\epsilon > 0$ に対して

$$d_Q d_{Q,\gamma}\Big(\frac{\tanh |Q|}{\tanh x}\Big)^{\epsilon}\Big(1 + \frac{|x_Q - x|}{|Q|}\Big)^{-(1+\mu-\epsilon)} (\tanh x)^{\gamma-\gamma_\alpha} \tag{18}$$

となる．

系3.12.　命題3.11の記号のもとで，$x_Q \geq 2\,|Q|$ を仮定する．

（1）$|Q| > 1$ とする．もし $u_{Q,\gamma,\rho'}$ が $[1, \infty) \cap Q$ に台をもつならば，$x \leq x_Q + |Q|$ に対して，$e^{\rho x} W^{\mathbb{R}}_{-\gamma'}(\mathcal{A}(\Delta^{-1}u_{Q,\gamma,\rho'}))(x)$ は次で押さえられる．

$$d_Q d_{Q,\gamma}\Big(1 + \frac{|x_Q - x|}{|Q|}\Big)^{-(1+\mu)}. \tag{19}$$

（2）$|Q|<1$ とし，$\epsilon > 0$ を十分に小さくとる．もし $u_{Q,\gamma,\rho'}$ が $[|Q|, \infty) \cap Q$ に台をもつならば，$x \leq x_Q + |Q|$ に対して，$e^{\rho x} W^{\mathbb{R}}_{-\gamma'}(\mathcal{A}(\Delta^{-1}u_{Q,\gamma,\rho'}))(x)$，は次で押さえられる．

$$d_Q d_{Q,\gamma}\Big(1 + \frac{|x_Q - x|}{|Q|}\Big)^{-(1+\mu-\epsilon)} |Q|^{\gamma-\gamma_\alpha}. \tag{20}$$

これらの結果から次の定理を示すことができる．

定理3.13.　b_Q を擬ヤコビアトムとする．b_Q は H^1（Δ）に属し

$$\|b_Q\|_{H^1(\Delta)} = \|e^{\rho x} W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(\mathcal{A}(b_Q))\|_{H^1_{w_{\gamma_\alpha}}(\mathbb{R})} \leq c d_Q c_{Q,\gamma_\alpha}$$

である．実際，$e^{\rho x} W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(\mathcal{A}(b_Q))$ は $\dot{F}^{0,w_{\gamma_\alpha}}_{1,2}(\mathbb{R})$ のモレキュールの $d_Q(1 + |Q|^{-1})^{\gamma_\alpha}$ 倍であり，$\|e^{\rho x} W^{\mathbb{R}}_{-\gamma_\alpha}(\mathcal{A}(b_Q))\|_{\dot{F}^{0,w_{\gamma_\alpha}}_{1,2}(\mathbb{R})} \leq c d_Q c_{Q,\gamma_\alpha}$ となる．

4　応　用

最後に応用を1つ紹介する．ユークリッド空間の場合，膨張作用素は実ハーディ空間 $H^1(\mathbb{R})$上で有界である．このことは膨張作用素が $H^1(\mathbb{R})$-ノルムを不変にすることから明らかである．実際，アトムの膨張が再びアトムとなることから，$f \in H^1(\mathbb{R})$に対して，$\|f_t\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}$である．同様の結果がヤコビハイパー群上の $H^1(\Delta)$ と（7）の膨張作用に対して成り立つかを考える．ユークリッド空間と同様にヤコビアトム a_Q の（7）の膨張（$(a_Q)_t$）を評価すればよいのだが，膨張を作用させたとき，指数関数 $e^{\rho x}$ の部分が $e^{\rho \frac{x}{t}}$ となり，ヤコビアトムでなくなり，評価を難しくする．このとき擬ヤコビクォークま

で分解して考えると，$\rho' = \frac{\rho}{t}$とすれば，膨張は擬ヤコビクォークにとどまる．定理3.13を使うことができ，次の結果を得ることができる．

定理 4.1.　$f \in H^1$（Δ）とすれば

$$\|f_t\|_{H^1(\Delta)} \leq c(\tanh t)^{-\gamma_{\alpha-1}}(1+t)^{\gamma_{\alpha+2}}\|f\|_{H_0^1(\Delta)}$$

である．$\gamma \in \Gamma$がすべて自然数のときは，右辺の指数$-\gamma_{\alpha-1}$，$\gamma_{\alpha+2}$を$-\gamma_\alpha$，γ_αで置き換えられる．

この評価はヤコビハイパー群上でハウスドルフ作用素の$H^1(\Delta)$-有界性を得るときに必要となる．

参考文献

[1] M. Bownik and K-P. HO, *Atomic and Molecule decompositions of anisotropic Triebel-Lizorkin spaces*. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 358, 2005, pp. 1469-1510.

[2] M. Flensted-Jensen, *Paley-Wiener type theorems for a differential operator connected with symmetric spaces*. Ark. Mat., Vol. 10, 1972, pp. 143-162.

[3] M. Flensted-Jensen and T. Koornwinder, *The convolution structure and Jacobi transform expansions*. Ark. Mat., Vol. 11, 1973, pp. 245-262.

[4] G.B. Folland and E.M. Stein, Hardy Spaces on Homogeneous Groups. Mathematical Notes 28, Princeton University Press, New Jersey, 1982.

[5] M. Frazier and B. Jawerth, *A discrete transform and decompositions of distribution spaces*. J. Funct. Anal., Vol. 93, 1990, pp. 34-170.

[6] T. Kawazoe, *Atomic Hardy space on semisimple Lie groups*. Japanese J. Math., Vol. 11, 1985, pp. 293-343.

[7] T. Kawazoe, *Real Hardy spaces on real rank 1 semisimple Lie groups*. Japanese J. Math., Vol. 31, 2005, pp. 281-343.

[8] T. Kawazoe, H^1*-estimates of Littlewood-Paley and Lusin functions for Jacobi analysis*. Analysis in Theory and Appli., Vol. 25, 2009, pp. 201-229 .

[9] T. Kawazoe, *Atomic decomposition of a real Hardy space for Jacobi analysis*. Analysis in Theory and Appli., Vol. 2, 2011, pp. 309-404.

[10] T. Koornwinder, *A new proof of a Paley-Wiener type theorem for the Jacobi transform*. Ark. Mat., Vol. 13, 1975, pp. 145-159.

[11] X. Li and L. Peng, *The molecular characterization of weighted Hardy spaces*. Science in China (Series A), vol. 44 (2), 2011, pp. 201-211.

[12] M.H. Taibleson and G.Weiss, *The molecular characterization of certain Hardy spaces*. Asterisque, 77, 1980, pp. 67-149.

[13] T. Kawazoe, *Revisiting the real Hardy space on the Jacobi hypergroup and its atom and quark decompositions*. preprint.