非加法的測度と非線形積分により可測関数空間上に導入された位相の一致性

河　邊　　　淳*

概　要

この研究ノートでは，非加法的測度と非線形積分を用いて実可測関数空間上に導入された 6 つの位相を統一的に議論するために，集合族が定める位相の概念を新たに提案し，非加法的測度が有限な場合は，これら 6 つの位相はすべて一致することを示す．また，この位相による収束と測度収束が同値となるための十分条件を与える．

1　はじめに

測度空間 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 上で定義された $\mathcal{A}$-可測な実数値関数全体 $\mathcal{F}_0(X)$ は，Dunford と Schwartz [8] が導入した $\mathcal{F}_0(X) \times \mathcal{F}_0(X)$ 上の関数

$$\rho_1(f, g) := \inf_{c>0} \arctan(c + \mu(\{|f - g| > c\}))$$

により擬距離空間となる．また，μ が有限測度の場合は，$\mathcal{F}_0(X)$ は，Ky Fan [9] が導入した関数

$$\rho_2(f, g) := \inf\{c > 0 \colon \mu(\{|f - g| > c\}) \le c\}$$

や，Lebesgue 積分を用いて定められる関数

$$\rho_3(f, g) := \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu$$

に関しても擬距離空間となり，$\mathcal{F}_0(X)$ の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，これら擬距離 ρ_1，ρ_2，ρ_3 が定める位相による収束と μ-測度収束が同値であることが知られている [18].

近年，人間や社会の活動に関わる諸問題を理論的に取り扱うゲーム理論 (Aumann-Shappley [2])，評価問題 (Dubois-Prade [6, 7])，期待効用理論 (Gilboa-Schmeidler [11], Schmeidler [19]) において，必

* 信州大学工学部

ずしも加法的でない測度である非加法的測度の重要性が認識されてきた．非加法的測度の体系的研究の出発点は，1974 年に Sugeno [21] が工学への応用の視点から研究したファジィ測度と，奇しくも同年，全く独立に Dobrakov [5] が純粋に数学的研究対象とした劣測度に関する論文であるというのが，非加法的測度論の研究者たちの共通認識となっている．この研究の目的は，後者の立場，すなわち，純粋に数学的観点から非加法的測度論を深化させることであり，通常の測度の代わりに，非加法的測度を用いて $\mathcal{F}_0(X)$ 上の位相を定義できるかどうかや，定義した位相による可測関数列の収束と測度収束とが同値となるかを調べることにある．具体的には，先行研究で与えられた 5 つの位相に加え，新たに Shilkret 積分が定める位相を導入し，計 6 つの位相がすべて一致することを示す．また，6 つの位相のうち 5 つは，ρ_1，ρ_2，ρ_3 のように $\mathcal{F}_0(X) \times \mathcal{F}_0(X)$ 上の関数を用いて定義されるのに対して，Assa と Zimper [1] が導入した位相は，このような関数を用いずに定義されている．そこで，新たに，集合族が定める位相の概念を提案し，6 つの位相を統一的に議論できる定式化を行う．

この研究ノートは，すでに公表されている研究成果 [1, 13, 14, 15, 25, 27] と重複する内容を一部含んでいるが，集合族が定める位相の概念を新たに導入し，統一的な理論展開を用いて議論を再構成している点に新規性がある．また，考察する位相に関する今後の研究の方向性も示唆されている．

2　準　備

この研究ノートを通じて，$(X, \mathcal{A})$ は可測空間とする．$\mathbb{R}$ は実数全体，$\mathbb{N}$ は自然数全体，$\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ は通常の全順序と代数構造をもつ拡大実数全体を表すとする．X の部分集合全体からなる集合族を 2^X で表す．また，測度論を展開する際に役立つように，$(\pm\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (\pm\infty) = 0$ を規約する．

拡大実数 $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ に対して，$a \vee b := \max\{a, b\}$，$a \wedge b := \min\{a, b\}$ とおく．また，関数 $f, g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して，$(f \vee g)(x) := f(x) \vee g(x)$，$(f \wedge g)(x) := f(x) \wedge g(x)$ $(x \in X)$ とおく．X 上で定義された $\mathcal{A}$-可測な拡大実数値関数全体を $\mathcal{F}(X)$，$\mathcal{A}$-可測な実数値関数全体を $\mathcal{F}_0(X)$ で表す．このとき，$\mathcal{F}_0(X)$ は各点毎に定めた通常の和，スカラー倍，順序に関して Riesz 空間 (ベクトル束ともいう) となる．以下では，$\mathcal{F}^+(X) := \{f \in \mathcal{F}(X) \colon f \geq 0\}$，$\mathcal{F}_0^+(X) := \{f \in \mathcal{F}_0(X) \colon f \geq 0\}$ とおく．また，関数 $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して，集合 $\{x \in X \colon f(x) > t\}$ や $\{x \in X \colon f(x) \geq t\}$ を簡単に $\{f > t\}$ や $\{f \geq t\}$ で表す．

2.1　非加法的測度

集合関数 $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ は次の 2 つの条件

(i) $\mu(\emptyset) = 0$　(下方有界性)

(ii) $A, B \in \mathcal{A}$ で，$A \subset B$ ならば，$\mu(A) \leq \mu(B)$　(単調性)

を満たすとき**非加法的測度**といい，その全体を $\mathcal{M}(X)$ で表す．特に，$\mu(X) < \infty$ のとき，μ は**有限**といい，その全体を $\mathcal{M}_b(X)$ で表す．すなわち，

$$\mathcal{M}_b(X) := \{\mu \in \mathcal{M}(X) \colon \mu(X) < \infty\}$$

である．非加法的測度と次に紹介する非線形積分に関する数学的観点からの研究は**非加法的測度論**と呼ばれ，近年，勢力的に研究されている．その初期の研究成果は，1990 年代初頭には早くも，Denneberg [4]，Pap [16]，Wang-Klir [22, 23] により，成書としてまとめられた．

2.2 非線形積分

次の 3 つの積分は，非加法的測度による積算概念として，理論と応用の両面でよく用いられる．$(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ とする．関数 f の μ に関する **Choquet 積分**は，Lebesgue 積分を用いて，

$$\mathrm{Ch}(\mu, f) := \int_0^\infty \mu(\{f > t\})dt$$

で定義される．Choquet 積分の原型は [3] に見出すことができ，μ が σ-加法的であれば，通常の抽象 Lebesgue 積分と一致する．Choquet 積分は，一般には，被積分関数に関して加法的ではなく，加法的であるための必要十分条件は，μ がモジュラー，すなわち，任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

が成り立つことである (例えば，[4, 16] を見よ).

関数 f の μ に関する **Sugeno 積分** [17, 21] は**ファジィ積分**とも呼ばれ，

$$\mathrm{Su}(f, \mu) := \sup_{t \in [0,\infty)} t \wedge \mu(\{f > t\})$$

で定義され，Sugeno の学位論文で与えられて以降，特に応用面でよく利用されている．Sugeno 積分も被積分関数に関して加法性をもたず，Sugeno 積分が劣加法的，すなわち，任意の $f, g \in \mathcal{F}^+(X)$ に対して

$$\mathrm{Su}(\mu, f+g) \le \mathrm{Su}(\mu, f) + \mathrm{Su}(\mu, g)$$

が成り立つための必要十分条件は，μ の劣加法性である [12].

最後に紹介する **Shilkret 積分**は，Shilkret [20] が最大性測度，すなわち，任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して，$A \cap B = \emptyset$ ならば

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B)$$

が成り立つ測度の研究で導入した積分であり，

$$\mathrm{Sh}(\mu, f) := \sup_{t \in [0,\infty)} t \cdot \mu(\{f > t\})$$

で定義される．この積分は Zhao [26] では，**(N) ファジィ積分**と呼ばれている．Shilkret 積分も被積分関数に関する加法性はもたないが，μ が最大性測度ならば，任意の $f, g \in \mathcal{F}^+(X)$ に対して

$$\mathrm{Sh}(\mu, f+g) \leq \mathrm{Sh}(\mu, f) + \mathrm{Sh}(\mu, g)$$

が成り立つ [20].

これらの積分は一般には加法性をもたないことや，非負とは限らない関数へのこれらの積分の拡張が斉次性をもたないことから，総称して**非線形積分**と呼ばれている．

2.3　位相空間

T は空でない集合とする．T の部分集合からなる族 $\mathcal{T}$ が次の条件 (G1)〜(G3) を満たすとき，$\mathcal{T}$ を T 上の**位相**，$(T, \mathcal{T})$ を**位相空間**という．

(G1) 空集合 $\emptyset$ と全体集合 T は $\mathcal{T}$ に属する．

(G2) $\mathcal{T}$ に属する任意個の集合の和集合は $\mathcal{T}$ に属する．

(G3) $\mathcal{T}$ に属する有限個の集合の積集合は $\mathcal{T}$ に属する．

$\mathcal{T}$ に属する集合を**開集合**，開集合の補集合を**閉集合**という．

$x \in T$ とする．T の部分集合 U は，$x \in G \subset U$ を満たす開集合 G が存在するとき，x の**近傍**という．特に，U 自身が開集合のときは，x の**開近傍**という．x の近傍全体からなる集合族を x の**近傍系**といい，x の近傍からなる集合族 $\mathcal{V}(x)$ は，x のどんな近傍 U に対しても，$V \subset U$ を満たす $V \in \mathcal{V}(x)$ が存在するとき，x の**近傍基底**という．位相 $\mathcal{T}$ または位相空間 $(T, \mathcal{T})$ は，どんな $x \in T$ に対しても，可算個の集合からなる近傍基底をもつとき，**第 1 可算公理**を満たすという．

$(T, \mathcal{T})$ は位相空間で，$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ は点列，$x \in T$ とする．x のどんな近傍 U に対しても，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \geq n_0$ ならば $x_n \in U$ が成り立つとき，$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は x に位相 $\mathcal{T}$ に関して**収束する**といい，$x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ とかく．$(S, \mathcal{S})$ をもう一つの位相空間とし，T から S への写像 $\varphi \colon T \to S$ を考える．このとき，任意の $x \in T$ と，$\varphi(x)$ の任意の近傍 V に対して，x の近傍 U が存在して，$\varphi(U) \subset V$ が成り立つとき，φ は**連続**という．位相空間の詳細については [24] を見よ．

次の列的開集合，列的閉集合の概念は Franklin [10] で導入された．G, F は T の部分集合とする．任意の $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ と $x \in G$ に対して，$x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ ならば，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq n_0$ を満たすすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in G$ が成り立つとき，G は**列的開集合**といい，任意の $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ と $x \in T$ に対して，$x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ ならば $x \in F$ が成り立つとき，F は**列的閉集合**という．位相空間 $(T, \mathcal{T})$ は次の同値な条件の一つ，したがって全部を満たすとき，**列型空間**という:

(a) T の任意の列的開集合は開集合である．

(b) T の任意の列的閉集合は閉集合である．

(c) 任意の位相空間 $(S, \mathcal{S})$ と任意の写像 $\varphi\colon T \to S$ に対して，φ が連続であるための必要十分条件は，任意の $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ と任意の $x \in T$ に対して，$x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ ならば $\varphi(x_n) \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi(x)$ が成り立つことである．

以上の用語において，考察する位相が $\mathcal{T}$ であることを明示したいときは，$\mathcal{T}$-近傍，$\mathcal{T}$-開近傍，$\mathcal{T}$-近傍基底，$\mathcal{T}$-収束などと呼ぶことにする．

2.4　測度収束

非加法的測度 μ に対しても，可測関数列の測度収束は通常の測度の場合と同様に定義できる (例えば，Rao [18] を見よ)：$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$，$f \in \mathcal{F}_0(X)$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0$$

が成り立つとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に **μ-測度収束**または単に**測度収束**するといい，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ で表す．

3　集合族が定める位相

今までに知られている実可測関数空間上の位相を統一的に取り扱うために，集合族が定める位相の概念を導入し，その基本性質を調べる．

T は空でない集合とする．各 $x \in T$ と $r > 0$ に対して，T の空でない部分集合 $B(x, r)$ が定まり，x を固定したとき，$B(x, r)$ は r に関して単調増加，すなわち，$0 < r_1 \le r_2$ ならば $B(x, r_1) \subset B(x, r_2)$ を満たすとする．以下ではこの条件を **r-増加性**という．各 $x \in T$ に対して，

$$\mathcal{U}(x) := \{U \subset T\colon \exists r > 0, B(x, r) \subset U\}$$

とおき，T の集合族 $\mathcal{T}$ を

$$\mathcal{T} := \{G \subset T\colon \forall x \in G, G \in \mathcal{U}(x)\}$$

で定める．明らかに，

$$\mathcal{T} = \{G \subset T\colon \forall x \in G, \exists r > 0, B(x, r) \subset G\}$$

である．以下では，

$$\mathfrak{B} := \{B(x, r)\colon x \in T, r > 0\}$$

とおく．また，点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ と $x \in T$ が与えられたとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \ge n_0$ ならば $x_n \in B(x, \varepsilon)$ が成り立つとき，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は x に **$\mathfrak{B}$-収束**

するといい，$x_n \xrightarrow{\mathfrak{B}} x$ とかく．

命題 1． 集合族 $\mathcal{T}$ は T 上の位相であり，次の性質をもつ．

(1) 各 $x \in T$ に対して，$\mathcal{U}(x)$ は x の $\mathcal{T}$-近傍系を含んでいる．

(2) $(T, \mathcal{T})$ は列型空間である．

(3) 任意の $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ と $x \in T$ に対して，$x_n \xrightarrow{\mathfrak{B}} x$ ならば $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ である．

(4) 次は同値である．

(i) 任意の $x \in T$ と $r > 0$ に対して，$B(x, r)$ は x の $\mathcal{T}$-近傍である．

(ii) 任意の $x \in T$ に対して，$\mathcal{U}(x)$ は x の $\mathcal{T}$-近傍系である．

(iii) 位相 $\mathcal{T}$ は第 1 可算公理を満たし，任意の $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ と $x \in T$ に対して，$x_n \xrightarrow{\mathfrak{B}} x$ と $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ は同値である．

証明． 集合族 $\mathcal{T}$ が位相であるための条件 (G1)〜(G3) を満たすことを示す．

(G1) 任意の $x \in T$ に対して，$B(x, 1) \subset T$ なので，$T \in \mathcal{T}$ である．次に，$\emptyset \notin \mathcal{T}$ とすると，$x_0 \in \emptyset$ が存在して，任意の $r > 0$ に対して，$B(x_0, r) \not\subset \emptyset$ となる．これは $\emptyset$ が一つも要素をもたないことに反する．よって，$\emptyset \in \mathcal{T}$ である．

(G2) $G_\lambda \in \mathcal{T}$ $(\lambda \in \Lambda)$ とし，$G := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ とおく．$x \in G$ とすると，$\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して，$x \in G_{\lambda_0}$ となるが，$G_{\lambda_0} \in \mathcal{T}$ なので，$r_0 > 0$ が存在して，$B(x, r_0) \subset G_{\lambda_0} \subset G$ となる．よって，$G \in \mathcal{T}$ である．

(G3) $G_i \in \mathcal{T}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とし，$G := \bigcap_{i=1}^n G_i$ とおく．$x \in G$ とすると，各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して $r_i > 0$ が存在して，$B(x, r_i) \subset G_i$ となる．そこで，$r := \min_{1\le i\le n} r_i > 0$ とおくと，r-増加性より，すべての $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，$B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset G_i$ が成り立つ．よって，

$$B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i = G$$

となり，$G \in \mathcal{T}$ を得る．

以上より，$\mathcal{T}$ は T 上の位相であることが示された．

(1) $x \in T$ とする．U は x の $\mathcal{T}$-近傍とすると，$G \in \mathcal{T}$ が存在して，$x \in G \subset U$ となる．よって，$r > 0$ が存在して，$B(x, r) \subset G$ となり，$B(x, r) \subset U$ を得る．ゆえに，$U \in \mathcal{U}(x)$ となる．

(2) 列型空間の定義より，T の任意の列的開集合は $\mathcal{T}$-開集合であることを示せばよい．G は T の列的開集合とする．$G \notin \mathcal{T}$ とすると，$x_0 \in G$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$B(x_0, 1/n) \not\subset G$ となる．そこで，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$x_n \in B(x_0, 1/n)$ を満たす $x_n \notin G$ を選ぶ．このとき，$x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x_0$ である．実際，U を x_0 の近傍とすると，$r_0 > 0$ が存在して，$B(x_0, r_0) \subset U$ となる．そこで，$1/n_0 < r_0$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ を選べば，r-増加性より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \ge n_0$ ならば

$$x_n \in B(x_0, 1/n) \subset B(x_0, r_0) \subset U$$

となり，$x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x_0$ を得る．G は列的開集合なので，$x_{n_0} \in G$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在するが，これは，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \notin G$ であることに反する．よって，$G \in \mathcal{T}$ である．

(3) $x_n \xrightarrow{\mathfrak{B}} x$ とする．U は x の $\mathcal{T}$-近傍とすると，(1) より $U \in \mathcal{U}(x)$ なので，$r > 0$ が存在して，$B(x,r) \subset U$ となる．この $r > 0$ に対して，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \geq n_0$ ならば $x_n \in B(x,r)$ となり，$x_n \in U$ を得る．ゆえに，$x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ である．

(4) (i)⇒(ii) $x \in T$ とする．(1) より，$\mathcal{U}(x)$ に属する任意の集合が x の $\mathcal{T}$-近傍であることを示せばよい．$U \in \mathcal{U}(x)$ とすると，$r > 0$ が存在して，$B(x,r) \subset U$ となる．条件 (i) より，$B(x,r)$ は x の $\mathcal{T}$-近傍なので，$G \in \mathcal{T}$ が存在して，$x \in G \subset B(x,r)$ となり，$x \in G \subset U$ を得る．よって，U は x の $\mathcal{T}$-近傍である．

(ii)⇒(iii) 各 $x \in T$ に対して

$$\mathcal{V}(x) := \{B(x, 1/n) \colon n \in \mathbb{N}\}$$

とおくと，$\mathcal{V}(x)$ は x の $\mathcal{T}$-近傍基底となる．実際，条件 (ii) より，$\mathcal{V}(x)$ は $\mathcal{T}$-近傍からなる集合族である．さらに，$U \in \mathcal{U}(x)$ とすると，$r > 0$ が存在して，$B(x,r) \subset U$ となるので，$1/n_0 < r$ を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ を選べば，r-増加性より，

$$B(x, 1/n_0) \subset B(x,r) \subset U$$

を得る．ゆえに，$\mathcal{V}(x)$ は x の $\mathcal{T}$-近傍基底である．$\mathcal{V}(x)$ は高々可算個の集合からなるので，位相 $\mathcal{T}$ は第 1 可算公理を満たす.

次に，任意の $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ と $x \in T$ に対して，$x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ とする．(3) より，$x_n \xrightarrow{\mathfrak{B}} x$ を示せばよい．任意に $\varepsilon > 0$ を固定すると，$B(x,\varepsilon) \in \mathcal{U}(x)$ なので，条件 (ii) より，$B(x,\varepsilon)$ は x の $\mathcal{T}$-近傍となる．よって，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \geq n_0$ ならば $x_n \in B(x,\varepsilon)$ となる．ゆえに，$x_n \xrightarrow{\mathfrak{B}} x$ である．

(iii)⇒(i) $x \in T$, $r > 0$ とする．背理法で示すために，$B(x,r)$ は x の $\mathcal{T}$-近傍でないとする．$\mathcal{T}$ は第 1 可算公理を満たすので，単調減少な集合からなる x の $\mathcal{T}$-近傍基底 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する．さて，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$V_{n_0} \subset B(x,r)$ が成り立つと仮定すると，$G_0 \in \mathcal{T}$ が存在して，$x \in G_0 \subset V_{n_0} \subset B(x,r)$ となり，$B(x,r)$ は x の $\mathcal{T}$-近傍となる．これは背理法の仮定に反する．よって，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $V_n \not\subset B(x,r)$ となる．そこで，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$x_n \notin B(x,r)$ となる $x_n \in V_n$ を選べば，$x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ が成り立つ．実際，V を x の $\mathcal{T}$-近傍とすると，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $V_{n_0} \subset V$ となるので，$\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の単調増加性より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \geq n_0$ ならば

$$x_n \in V_n \subset V_{n_0} \subset V$$

となり，$x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ を得る．ゆえに，$x_n \xrightarrow{\mathfrak{B}} x$ となる．よって，$x_{n_0} \in B(x,r)$ を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在するので，矛盾が生じる．ゆえに，$B(x,r)$ は x の $\mathcal{T}$-近傍である．　□

定義 2.　命題 1 で定まる位相 $\mathcal{T}$ を**集合族 $\mathfrak{B}$ が定める位相**または単に **$\mathfrak{B}$-位相**という．

命題 3.　T は空でない集合とする．$\mathfrak{B}_1 = \{B_1(x,r) \colon x \in T, r > 0\}$，$\mathfrak{B}_2 = \{B_2(x,r) \colon x \in T, r > 0\}$ は r-増加性を満たす T の部分集合族で，$\mathcal{T}_1$ は $\mathfrak{B}_1$-位相，$\mathcal{T}_2$ は $\mathfrak{B}_2$-位相とする．このとき，任意の $x \in T$ と $r > 0$ に対して，

$$B_2(x,s) \subset B_1(x,r)$$

となる $s > 0$ が存在すれば，$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ である．

証明.　$G \in \mathcal{T}_1$ とし，$x \in G$ を固定する．このとき，$r > 0$ が存在して，$B_1(x,r) \subset G$ となる．この $r > 0$ に対して，仮定より，$B_2(x,s) \subset B_1(x,r)$ となる $s > 0$ が存在するので，$G \in \mathcal{T}_2$ を得る．　□

一般に，集合 $B(x,r)$ は $\mathfrak{B}$-位相に関して開集合になるとは限らないことに注意せよ (例 7 を見よ)．それゆえ，次の定義は意味をもつ．

定義 4.　任意の $x \in T$ と $r > 0$ に対して，$B(x,r) \in \mathcal{T}$ となるとき，$\mathfrak{B}$-位相 $\mathcal{T}$ は**開球条件を満たす**という．

4　$\mathcal{F}_0(X)$ 上の $\mathfrak{B}$-位相

非加法的測度と非線形積分を用いて，次の 6 つの $\mathfrak{B}$-位相を $\mathcal{F}_0(X)$ 上に導入する．

定義 5.　(1) Wu, Ren, and Wu [25]: 各 $f \in \mathcal{F}_0(X)$ と $r > 0$ に対して，

$$B_{\mathrm{Su}}(f,r) := \{g \in \mathcal{F}_0(X) \colon d_{\mathrm{Su}}(f,g) < r\}$$

とする．ここで，関数 $d_{\mathrm{Su}} \colon \mathcal{F}_0(X) \times \mathcal{F}_0(X) \to [0,1]$ は

$$d_{\mathrm{Su}}(f,g) := \mathrm{Su}\left(\mu, \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\right), \quad f,g \in \mathcal{F}_0(X)$$

で定める．集合族 $\{B_{\mathrm{Su}}(f,r) \colon f \in \mathcal{F}_0(X), r > 0\}$ が定める $\mathcal{F}_0(X)$ 上の位相を **Su 位相**といい，$\mathcal{T}_{\mathrm{Su}}$ で表す．

(2) Ouyang and Zhang [15]: 各 $f \in \mathcal{F}_0(X)$ と $r > 0$ に対して，

$$B_{\mathrm{Ch}}(f,r) := \{g \in \mathcal{F}_0(X) \colon d_{\mathrm{Ch}}(f,g) < r\}$$

とする．ここで，関数 $d_{\mathrm{Ch}} \colon \mathcal{F}_0(X) \times \mathcal{F}_0(X) \to [0,\mu(X)]$ は

$$d_{\mathrm{Ch}}(f,g) := \mathrm{Ch}\left(\mu, \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\right), \quad f,g \in \mathcal{F}_0(X)$$

で定める．集合族 $\{B_{\mathrm{Ch}}(f,r)\colon f \in \mathcal{F}_0(X), r>0\}$ が定める $\mathcal{F}_0(X)$ 上の位相を **Ch 位相**といい，$\mathcal{T}_{\mathrm{Ch}}$ で表す．

(3) Ky Fan [9]，Li [14]: 各 $f \in \mathcal{F}_0(X)$ と $r>0$ に対して，

$$B_{\mathrm{Ky}}(f,r) := \{g \in \mathcal{F}_0(X)\colon d_{\mathrm{Ky}}(f,g) < r\}$$

とする．ここで，関数 $d_{\mathrm{Ky}}\colon \mathcal{F}_0(X) \times \mathcal{F}_0(X) \to [0,\mu(X)]$ は

$$d_{\mathrm{Ky}}(f,g) := \inf\{c>0\colon \mu(\{|f-g|>c\}) \le c\}, \quad f,g \in \mathcal{F}_0(X)$$

で定める．ただし，$\inf\emptyset := \infty$ と規約する．集合族 $\{B_{\mathrm{Ky}}(f,r)\colon f \in \mathcal{F}_0(X), r>0\}$ が定める $\mathcal{F}_0(X)$ 上の位相を **Ky 位相**といい，$\mathcal{T}_{\mathrm{Ky}}$ で表す．

(4) Assa and Zimper [1]: 各 $f \in \mathcal{F}_0(X)$ と $r>0$ に対して，

$$B_{\mathrm{AZ}}(f,r) := \{g \in \mathcal{F}_0(X)\colon \mu(\{|f-g| \ge r\}) < r\}$$

とする．集合族 $\{B_{\mathrm{AZ}}(f,r)\colon f \in \mathcal{F}_0(X), r>0\}$ が定める $\mathcal{F}_0(X)$ 上の位相を **AZ 位相**といい，$\mathcal{T}_{\mathrm{AZ}}$ で表す．

(5) Dunford and Schwartz [8]，Kawabe [13]: 各 $f \in \mathcal{F}_0(X)$ と $r>0$ に対して，

$$B_{\mathrm{DS}}(f,r) := \{g \in \mathcal{F}_0(X)\colon d_{\mathrm{DS}}(f,g) < r\}$$

とする． ここで，関数 $d_{\mathrm{DS}}\colon \mathcal{F}_0(X) \times \mathcal{F}_0(X) \to [0,\pi/2]$ は

$$d_{\mathrm{DS}}(f,g) := \inf_{c>0} \varphi(c+\mu(\{|f-g|>c\})), \quad f,g \in \mathcal{F}_0(X)$$

で定める．また，関数 $\varphi\colon [0,\infty] \to [0,\pi/2]$ は

$$\varphi(t) := \begin{cases} \arctan t & \text{if } t \ne \infty \\ \pi/2 & \text{if } t = \infty \end{cases}$$

である．集合族 $\{B_{\mathrm{DS}}(f,r)\colon f \in \mathcal{F}_0(X), r>0\}$ が定める $\mathcal{F}_0(X)$ 上の位相を **DS 位相**といい，$\mathcal{T}_{\mathrm{DS}}$ で表す．

(6) 各 $f \in \mathcal{F}_0(X)$ と $r>0$ に対して，

$$B_{\mathrm{Sh}}(f,r) := \{g \in \mathcal{F}_0(X)\colon d_{\mathrm{Sh}}(f,g) < r\}$$

とする．ここで，関数 $d_{\mathrm{Sh}}\colon \mathcal{F}_0(X) \times \mathcal{F}_0(X) \to [0,\mu(X)]$ は

$$d_{\mathrm{Sh}}(f,g) := \mathrm{Sh}\left(\mu, \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\right), \quad f,g \in \mathcal{F}_0(X)$$

で定める．集合族 $\{B_{\mathrm{Sh}}(f,r)\colon f \in \mathcal{F}_0(X), r>0\}$ が定める $\mathcal{F}_0(X)$ 上の位相を **Sh 位相**といい，$\mathcal{T}_{\mathrm{Sh}}$ で表す．

注意 6. (1) μ は非加法的測度なので，上記の関数 d_{Su}，d_{Ch}，d_{Ky}，d_{DS}，d_{Sh} は一般には三角不等式の類の不等式評価をもたない．それゆえ，次の例 7 が示すように，$B_{\mathrm{DS}}(f,r)$ は $\mathcal{T}_{\mathrm{DS}}$-開集合とは限らない．他の位相の場合も同様である．

(2) 上記の位相の中で，AZ 位相だけは，集合 $B_{\mathrm{AZ}}(f,r)$ が関数を用いずに定義されている．そこで，AZ 位相を他の位相と統一的に議論するために，集合族が定める位相である $\mathfrak{B}$-位相の概念が必要となる．

例 7 ([13])**.** $X=\mathbb{N}$，$\mathcal{A}=2^X$ とする．非加法的測度 $\mu\colon \mathcal{A}\to[0,\infty]$ を，各 $A\in\mathcal{A}$ に対して

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{if } A=\emptyset \\ |A|\cdot\sum_{i\in A}\dfrac{1}{2^i} & \text{if } A\neq\emptyset \end{cases}$$

で定める．ただし，$|A|$ は集合 A の要素の個数を表す．このとき，$B_{\mathrm{DS}}(0,\pi/4)$ は $\mathcal{T}_{\mathrm{DS}}$-開集合でない．

5　$\mathfrak{B}$-位相の一致性

第 4 章で定義した 6 つの $\mathfrak{B}$-位相の一致性と測度収束との関係性を議論するために，まず次の補題を準備する．

補題 8. $\mu\in\mathcal{M}(X)$ とする．$f,g\in\mathcal{F}_0(X)$，$r>0$ とする．このとき，次の含意が成り立つ．

(1) $d_{\mathrm{Ch}}(f,g) < \dfrac{r^2}{1+r} \ \Rightarrow\ \mu(\{|f-g|>r\}) < r$

$$\Rightarrow\ d_{\mathrm{Ch}}(f,g) \le \frac{r}{1+r}(1+\mu(\{|f-g|>0\})).$$

(2) $d_{\mathrm{Su}}(f,g) < \dfrac{r}{1+r} \ \Rightarrow\ \mu(\{|f-g|>r\}) < r \ \Rightarrow\ d_{\mathrm{Su}}(f,g) < r.$

(3) $d_{\mathrm{Sh}}(f,g) < \dfrac{r^2}{1+r} \ \Rightarrow\ \mu(\{|f-g|>r\}) < r$

$$\Rightarrow\ d_{\mathrm{Sh}}(f,g) \le \max\left\{\frac{r}{1+r}\mu(\{|f-g|>0\}), r\right\}.$$

証明． (1) $d_{\mathrm{Ch}}(f,g) < \dfrac{r^2}{1+r}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\frac{r}{1+r}\mu(\{|f-g|>r\}) &= \frac{r}{1+r}\mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|} > \frac{r}{1+r}\right\}\right) \\
&= \int_0^{\frac{r}{1+r}} \mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|} > \frac{r}{1+r}\right\}\right) dt \\
&\leq \int_0^{\frac{r}{1+r}} \mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|} > t\right\}\right) dt \\
&\leq \int_0^{\infty} \mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|} > t\right\}\right) dt \\
&= \mathrm{Ch}\left(\mu, \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\right) \\
&= d_{\mathrm{Ch}}(f,g) < \frac{r^2}{1+r}
\end{aligned}
$$

となる．よって，

$$
\mu(\{|f-g|>r\}) < \frac{r^2}{1+r}\cdot\frac{1+r}{r} = r.
$$

次に，$\mu(\{|f-g|>r\}) < r$ とすると，

$$
\begin{aligned}
d_{\mathrm{Ch}}(f,g) &= \int_0^1 \mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|} > t\right\}\right) dt \\
&= \int_0^{\frac{r}{1+r}} \mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|} > t\right\}\right) dt + \int_{\frac{r}{1+r}}^1 \mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|} > t\right\}\right) dt \\
&\leq \int_0^{\frac{r}{1+r}} \mu(\{|f-g|>0\})dt + \int_{\frac{r}{1+r}}^1 \mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|} > \frac{r}{1+r}\right\}\right) dt \\
&= \frac{r}{1+r}\mu(\{|f-g|>0\}) + \left(1-\frac{r}{1+r}\right)\mu(\{|f-g|>r\}) \\
&\leq \frac{r}{1+r}\mu(\{|f-g|>0\}) + \frac{1}{1+r}\cdot r \\
&= \frac{r}{1+r}\big\{1+\mu(\{|f-g|>0\})\big\}.
\end{aligned}
$$

(2) $d_{\mathrm{Su}}(f,g) < \dfrac{r}{1+r}$ とすると，

$$\begin{aligned}\frac{r}{1+r} \wedge \mu(\{|f-g| > r\}) &= \frac{r}{1+r} \wedge \mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|} > \frac{r}{1+r}\right\}\right) \\ &\leq \sup_{t\in[0,\infty)} t \wedge \mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|} > t\right\}\right) \\ &= \mathrm{Su}\left(\mu, \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\right) \\ &= d_{\mathrm{Su}}(f,g) < \frac{r}{1+r}\end{aligned}$$

より，

$$\frac{r}{1+r} \wedge \mu(\{|f-g| > r\}) < \frac{r}{1+r}$$

となる．よって，

$$\mu(\{|f-g| > r\}) < \frac{r}{1+r} < r.$$

次に，$\mu(\{|f-g| > r\}) < r$ とすると，

$$\begin{aligned}d_{\mathrm{Su}}(f,g) &= \mathrm{Su}\left(\mu, \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\right) \\ &\leq \frac{r}{1+r} \vee \mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|} > \frac{r}{1+r}\right\}\right) \\ &= \frac{r}{1+r} \vee \mu(\{|f-g| > r\}) < r.\end{aligned}$$

(3) $d_{\mathrm{Sh}}(f,g) < \dfrac{r^2}{1+r}$ とすると，

$$\begin{aligned}\frac{r}{1+r}\mu(\{|f-g| > r\}) &= \frac{r}{1+r}\mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|} > \frac{r}{1+r}\right\}\right) \\ &\leq \sup_{t\in[0,\infty)} t \cdot \mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|} > t\right\}\right) \\ &= \mathrm{Sh}\left(\mu, \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\right) \\ &= d_{\mathrm{Sh}}(f,g) < \frac{r^2}{1+r}\end{aligned}$$

となる．よって，

$$\mu(\{|f-g|>r\}) < \frac{r^2}{1+r}\cdot\frac{1+r}{r} = r.$$

次に，$\mu(\{|f-g|>r\}) < r$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&d_{\mathrm{Sh}}(f,g)\\
&= \max\left\{\sup_{t\in\left[0,\frac{r}{1+r}\right]} t\cdot\mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|}>t\right\}\right), \sup_{t\in\left(\frac{r}{1+r},1\right]} t\cdot\mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|}>t\right\}\right)\right\}\\
&\le \max\left\{\sup_{t\in\left[0,\frac{r}{1+r}\right]} t\cdot\mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|}>0\right\}\right), \sup_{t\in\left(\frac{r}{1+r},1\right]} t\cdot\mu\left(\left\{\frac{|f-g|}{1+|f-g|}>\frac{r}{1+r}\right\}\right)\right\}\\
&= \max\left\{\frac{r}{1+r}\mu(\{|f-g|>0\}), \mu(\{|f-g|>r\})\right\}\\
&\le \max\left\{\frac{r}{1+r}\mu(\{|f-g|>0\}), r\right\}
\end{aligned}
$$

を得る．　□

注意 9.　μ が有限ならば，命題 8 の (1) の最後の不等式は

$$d_{\mathrm{Ch}}(f,g) < \frac{r}{1+r}(1+\mu(\{|f-g|>0\}))$$

となる．

補題 8 を用いて，集合 $B_*(f,r)$ $(*=\mathrm{Su},\mathrm{Ch},\mathrm{AZ},\mathrm{DS},\mathrm{Sh})$ と $B_{\mathrm{Ky}}(f,r)$ の包含関係を調べると，次のようになる．

命題 10.　$\mu\in\mathcal{M}(X)$ とする．$f\in\mathcal{F}_0(X)$，$r>0$ とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $B_{\mathrm{Su}}(f,r/(2+r))\subset B_{\mathrm{Ky}}(f,r)\subset B_{\mathrm{Su}}(f,r)$.

(2) $B_{\mathrm{AZ}}(f,r/2)\subset B_{\mathrm{Ky}}(f,r)\subset B_{\mathrm{AZ}}(f,2r)$.

(3) $B_{\mathrm{DS}}(f,\varphi(r/2))\subset B_{\mathrm{Ky}}(f,r)\subset B_{\mathrm{DS}}(f,\varphi(2r))$.

証明．　(1) $g\in B_{\mathrm{Su}}(f,r/(2+r))$ とすると，

$$d_{\mathrm{Su}}(f,g) < \frac{r}{2+r} = \frac{r/2}{1+r/2}$$

となる．よって，補題 8 の (2) より，

$$\mu\left(\left\{|f-g|>\frac{r}{2}\right\}\right)<\frac{r}{2}$$

を得る．よって，

$$d_{\mathrm{Ky}}(f,g)\le\frac{r}{2}<r$$

となり，$g\in B_{\mathrm{Ky}}(f,r)$ である．

次に $g\in B_{\mathrm{Ky}}(f,r)$ とすると，$\mu(\{|f-g|>r\})<r$ となる．ゆえに，補題 8 の (2) より $d_{\mathrm{Su}}(f,g)<r$ となり，$g\in B_{\mathrm{Su}}(f,r)$ である．

(2) $g\in B_{\mathrm{AZ}}(f,r/2)$ とすると，

$$\mu\left(\left\{|f-g|>\frac{r}{2}\right\}\right)<\frac{r}{2}$$

となり，

$$d_{\mathrm{Ky}}(f,g)\le\frac{r}{2}<r$$

である．よって，$g\in B_{\mathrm{Ky}}(f,r)$ を得る．

次に，$g\in B_{\mathrm{Ky}}(f,r)$ とすると，$\mu(\{|f-g|>r\})<r$ となり，

$$\mu(\{|f-g|\ge 2r\})\le\mu(\{|f-g|>r\})<r<2r$$

となる．よって，$g\in B_{\mathrm{AZ}}(f,2r)$ である．

(3) $g\in B_{\mathrm{DS}}(f,\varphi(r/2))$ とすると，$c_0\in(0,\infty)$ が存在して，

$$c_0+\mu(\{|f-g|>c_0\})<\frac{r}{2}$$

となるので，

$$\mu\left(\left\{|f-g|>\frac{r}{2}\right\}\right)\le\mu(\{|f-g|>c_0\})<\frac{r}{2}$$

を得る．よって，

$$d_{\mathrm{Ky}}(f,g)\le\frac{r}{2}<r$$

となり，$g\in B_{\mathrm{Ky}}(f,r)$ である．

次に，$g\in B_{\mathrm{Ky}}(f,r)$ とすると，$\mu(\{|f-g|>r\})<r$ となり，

$$d_{\mathrm{DS}}(f,g)\le\varphi(r+\mu(\{|f-g|>r\}))<\varphi(2r)$$

である．よって，$g\in B_{\mathrm{DS}}(f,\varphi(2r))$ を得る．　□

命題 11． $\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ とする．$f \in \mathcal{F}_0(X)$，$r > 0$ とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $B_{\mathrm{Ch}}(f, r^2/(4+2r)) \subset B_{\mathrm{Ky}}(f, r) \subset B_{\mathrm{Ch}}\left(f, r(1+\mu(X))/(1+r)\right)$.

(2) $B_{\mathrm{Sh}}(f, r^2/(4+2r)) \subset B_{\mathrm{Ky}}(f, r) \subset B_{\mathrm{Sh}}(f, r(1+\mu(X)))$.

証明． (1) $g \in B_{\mathrm{Ch}}(f, r^2/(4+2r))$ とすると，

$$d_{\mathrm{Ch}}(f,g) < \frac{r^2}{4+2r} = \frac{(r/2)^2}{1+r/2}$$

なので，補題 8 の (1) より，

$$\mu\left(\{|f-g| > \frac{r}{2}\right) < \frac{r}{2}$$

となる．よって，

$$d_{\mathrm{Ky}}(f,g) \leq \frac{r}{2} < r$$

となり，$g \in B_{\mathrm{Ky}}(f,r)$ である．

次に $g \in B_{\mathrm{Ky}}(f,r)$ とすると，$\mu(\{|f-g| > r\}) < r$ となる．よって，注意 9 より，

$$d_{\mathrm{Ch}}(f,g) < \frac{r}{1+r}(1+\mu(X))$$

となり，

$$g \in B_{\mathrm{Ch}}\left(f, \frac{r}{1+r}(1+\mu(X))\right)$$

を得る．

(2) $g \in B_{\mathrm{Sh}}(f, r^2/(4+2r))$ とすると，

$$d_{\mathrm{Sh}}(f,g) < \frac{r^2}{4+2r} = \frac{(r/2)^2}{1+r/2}$$

なので，補題 8 の (3) より，

$$\mu\left(\left\{|f-g| > \frac{r}{2}\right\}\right) < \frac{r}{2}$$

となる．よって，

$$d_{\mathrm{Ky}}(f,g) \leq \frac{r}{2} < r$$

なので，$g \in B_{\mathrm{Ky}}(f,r)$ を得る．

次に $g \in B_{\mathrm{Ky}}(f,r)$ とすると，$\mu(\{|f-g| > r\}) < r$ となる．よって，補題 8 の (3) より，

$$d_{\mathrm{Sh}}(f,g) \le \max\left\{\frac{r}{1+r}\mu(X), r\right\} < r(1+\mu(X))$$

となり，$g \in B_{\mathrm{Sh}}(f, r(1+\mu(X)))$ を得る．　□

命題 3，命題 10，命題 11 より，$\mathcal{F}_0(X)$ 上に導入された 6 つの位相の一致性に関して，次の結果が得られる ([27] も見よ).

定理 12. $\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．このとき，$\mathcal{F}_0(X)$ 上の 6 つの $\mathfrak{B}$-位相 $\mathcal{T}_{\mathrm{Su}}$，$\mathcal{T}_{\mathrm{Ch}}$，$\mathcal{T}_{\mathrm{Ky}}$，$\mathcal{T}_{\mathrm{AZ}}$，$\mathcal{T}_{\mathrm{DS}}$，$\mathcal{T}_{\mathrm{Sh}}$ に対して，以下が成り立つ.

(1) $\mathcal{T}_{\mathrm{Su}} = \mathcal{T}_{\mathrm{Ky}} = \mathcal{T}_{\mathrm{AZ}} = \mathcal{T}_{\mathrm{DS}}$ である.

(2) μ が有限ならば，$\mathcal{T}_{\mathrm{Su}} = \mathcal{T}_{\mathrm{Ch}} = \mathcal{T}_{\mathrm{Ky}} = \mathcal{T}_{\mathrm{AZ}} = \mathcal{T}_{\mathrm{DS}} = \mathcal{T}_{\mathrm{Sh}}$ である.

補題 8 は，可測関数列の測度収束と $\mathfrak{B}_*$-収束の一致性を示す際にも役立つ．実際，次の定理は，補題 8 と，測度収束，$\mathfrak{B}_*$-収束の定義より容易に導ける.

定理 13. $\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ は関数列，$f \in \mathcal{F}_0(X)$ とする．このとき，

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\mathfrak{B}_{\mathrm{Su}}} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\mathfrak{B}_{\mathrm{Ky}}} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\mathfrak{B}_{\mathrm{AZ}}} f \Leftrightarrow \xrightarrow{\mathfrak{B}_{\mathrm{DS}}} f$$

が成り立つ．特に，μ が有限ならば,

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\mathfrak{B}_{\mathrm{Ch}}} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\mathfrak{B}_{\mathrm{Sh}}} f$$

も成り立つ.

一般には，可測関数列の測度収束と位相 $\mathcal{T}_*$ による収束は同値ではない．次の結果は，これら 2 つの収束が同値となるための十分条件を与えている.

系 14. $\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．$* = \mathrm{Su}, \mathrm{Ky}, \mathrm{AZ}, \mathrm{DS}$ とする．$\mathfrak{B}$-位相 $\mathcal{T}_*$ が開球条件を満たすならば，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ と $f \in \mathcal{F}_0(X)$ に対して，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ と $f_n \xrightarrow{\mathcal{T}_*} f$ は同値である．特に，μ が有限ならば，この同値性は $* = \mathrm{Ch}, \mathrm{Sh}$ に対しても成り立つ.

証明. 位相 $\mathcal{T}_*$ は開球条件を満たすので，命題 1 の (4) と定理 12 より，結果が従う．　□

6　今後の課題

系 14 によれば，$\mathfrak{B}$-位相 $\mathcal{T}_*$ が開球条件を満たせば，すべての $B_*(f,r)$ が $\mathcal{T}_*$-開集合となるだけでなく，可測関数列の測度収束性と $\mathcal{T}_*$-収束性も一致する．それゆえ，位相 $\mathcal{T}_*$ の性質を集合 $B_*(f,r)$ や関数列の測度収束性を用いて調べることが可能となり，大変便利である．この研究ノートで取り扱った $\mathcal{F}_0(X)$ 上の 6 つの位相が開球条件を満たすために非加法的測度 μ に課すべき (必要) 十分条件に関しては，現在までに以下の結果が知られている.

- μ は有限かつ条件 (WRW) を満たす $\Leftrightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{Su}}$ は開球条件を満たす [25].
- μ は有限かつ上から一様自己連続 $\Rightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{Ch}}$ は開球条件を満たす [15].
- μ は有限かつ下から連続かつ劣加法的 $\Rightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{Ky}}$ は開球条件を満たす [14].
- μ は上から自己連続 $\Leftrightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{DS}}$ は開球条件を満たす [13].
- μ は上から連続かつ上から自己連続 $\Rightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{AZ}}$ は開球条件を満たす [27].

ここで，左側の条件は非加法的測度 μ に関する特性で，任意の $A \in \mathcal{A}$ と $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して，$\mu(B_n) \to 0$ ならば $\mu(A \cup B_n) \to \mu(A)$ が成り立つとき**上から自己連続**，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，すべての $A, B \in \mathcal{A}$ に対して，$\mu(B) < \delta$ ならば $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \varepsilon$ が成り立つとき**上から一様自己連続**，任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ が成り立つとき**劣加法的**という．また，任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ と $A \in \mathcal{A}$ に対して，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加で $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ならば $\mu(A_n) \to \mu(A)$ が成り立つとき**下から連続**，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調減少で $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ならば $\mu(A_n) \to \mu(A)$ が成り立つとき**上から連続**という．条件 (WRW) は，Wu-Ren-Wu [25] が与えた条件を少しだけ取り扱いやすい形に書き換えた条件であり，任意の $0 < r \leq 1$，$A \in \mathcal{A}$，$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して，$\mu(A) < r$ かつ $\mu(B_n) \to 0$ ならば $\mu(A \cup B_{n_0}) < r$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する (この条件は μ が上から自己連続であれば常に満たされる) とき，μ は**条件 (WRW)** を満たすという．

上記の結果を見ると，$* = \mathrm{Ch}, \mathrm{Ky}, \mathrm{AZ}, \mathrm{Sh}$ の場合には，位相 $\mathcal{T}_*$ が開球条件を満たすための必要十分条件が未だ確立されていない．それゆえ，これらの場合にも $\mathcal{T}_*$-位相が開球条件を満たすために非加法的測度 μ に課すべき必要十分条件を見出し，$\mathcal{F}_0(X)$ 上の $\mathfrak{B}$-位相 $\mathcal{T}_*$ がもつ様々な性質を非加法的測度 μ の特性を用いて特徴づけることが，今後の課題である．

参考文献

[1] H. Assa, A. Zimper, When a combination of convexity and continuity forces monotonicity of preferences, Int. J. Approx. Reason. 136 (2021) 86–109.

[2] R.J. Aumann, L.S. Shapley, Values of Non-Atomic Games, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1974.

[3] G. Choquet, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 5 (1953–54) 131–295.

[4] D. Denneberg, Non-Additive Measure and Integral, second edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[5] I. Dobrakov, On submeasures I, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 112 (1974) 1–35.

[6] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Math. Sci. Engrg., 144 Academic Press, New York, 1980.

[7] D. Dubois, H. Prade, Possibility Theory, Plenum Press, New York, 1988.

[8] N. Dunford, J. Schwartz, Linear Operators, Part I, Wiley, New York, 1958.

[9] Ky Fan, Entfernung zweier zufällingen Größen und die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit, Math. Z. 49 (1944) 681–683.

[10] S.P. Franklin, Spaces in which sequences suffice, Fund. Math. 57 (1965) 107–115.

[11] I. Gilboa, D. Schmeidler, Maximin expected untility with non-unique priors, J. Math. Econom. 18 (1989) 141–153.
[12] J. Kawabe, The completeness and separability of the Lorentz spaces defined by the Sugeno and Shilkret integrals, Linear and Nonlinear Anal. 7 (2021) 265–284.
[13] J. Kawabe, The topology on the space of measurable functions that is compatible with convergence in nonadditive measure, Fuzzy Sets Syst. 430 (2022) 1–18.
[14] G. Li, A metric on space of measurable functions and the related convergence, Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl.-Based Syst. 20 (2012) 211-222.
[15] Y. Ouyang and H. Zhang, On the space of measurable functions and its topology determined by the Choquet integral, Int. J. Approx. Reason. 52 (2011) 1355–1362.
[16] E. Pap, Null-Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, Bratislava, 1995.
[17] D. Ralescu, G. Adams, The fuzzy integral, J. Math. Anal. Appl. 75 (1980) 562–570.
[18] M.M. Rao, Measure Theory and Integration, second edition, revised and expanded, Dekker, New York, 2004.
[19] D. Schmeidler, Subjective probability and expected utility without additivity, Econometrica 57 (1989) 571–587.
[20] N. Shilkret, Maxitive measure and integration, Indag. Math. 33 (1971) 109–116.
[21] M. Sugeno, Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph.D. Dissertation, Tokyo Inst. of Tech., Tokyo, 1974.
[22] Z.Y. Wang, G.J. Klir, Fuzzy Measure Theory, Plenum Press, New York, 1992.
[23] Z.Y. Wang, G.J. Klir, Generalized Measure Theory, Springer, New York, 2009.
[24] S. Willard, General Topology, Addison-Wesley, Massachusetts, 1970.
[25] Chong Wu, Xuekun Ren, Congxin Wu, A note on the space of fuzzy measurable functions for a monotone measure, Fuzzy Sets Syst. 182 (2011) 2–12.
[26] R.H. Zhao, (N) fuzzy integral (in Chinese), J. Math. Res. Exposition 1 (1981) 55–72.
[27] A. Zimper, S. Zimper, J. Kawabe, Base topologies and convergence in nonaddtive measure, Fuzzy Sets Syst. 457 (2023) 1–19.