

多変数フーリエ級数の収束問題とガウスの円問題

松岡勝男教授の古希・定年退職に寄せて

中 井 英 一

概 要

多変数フーリエ級数の収束問題とガウスの円問題という一見無関係と思われる 2 つの難問の密接な関係について、フーリエ球形部分和の収束発散についての最新研究とともに解説する。

I はじめに

近年、多変数フーリエ級数の収束問題とガウスの円問題という一見無関係と思われる 2 つの難問の密接な相互関係が明らかになった。特に、多変数フーリエ級数の球形部分和にみられる特異現象が、ガウスの円問題に関する Hardy 予想と同値な関係にあることがわかった。ここでは、フーリエ級数の収束発散に関する先人の研究を振り返るとともに、倉坪茂彦氏（弘前大学）との共同研究 [16] (2022) に基づき、これら 2 つの難問とその関係を解説する。

フーリエ (J. B. J. Fourier, 1768–1830) が関数を三角関数の和で表現することによって熱伝導方程式を解いてから約 200 年になる。この三角関数の和は、その後フーリエ級数と呼ばれるようになった。ただし、フーリエの方法には不完全な部分があり、当時から問題点が指摘されていた。その問題点の中心的なものひとつがフーリエ級数の収束問題である。1 変数の関数の場合には、局所性定理、Dirichlet-Jordan の収束定理、Carleson-Hunt の概収束定理など、1960 年代までの研究によりほぼ解決している。これに対して、多変数関数の場合には、局所性定理が成り立たないなど難しい点もあり、まだ分からないことが多い。そうした中で、とりわけ大きな成果は 1993 年の Pinsky たちによる結果 [23] である。彼らは、フーリエ級数の球形部分和の研究において、3 次元以上のとき、原点を中心とする球の定義関数のフーリエ級数が原点で発散することを証明した。もとの関数は原点の近傍では滑らかな定数関数であるが、それにもかかわらず発散するのである。この現象は、その後 Pinsky 現象と呼ばれるようになった。さらに、2010 年、もっと衝撃的なことが倉坪氏により証明された (Kuratsubo [14])。5 次元以上の球の定義関数のフーリエ級数が、すべての有理点で発散するというものである。この現象

本研究は科研費（課題番号:17K18731）の助成を受けたものである。

を倉坪現象と呼ぶ。有理点とは、各座標成分がすべて有理数である点であり、可算無限個の点で発散することを意味する。一方、ほとんどいたるところで収束（概収束）することも証明されており、大変奇妙な現象である。このように Pinsky 現象や倉坪現象の発見は、多変数フーリエ級数の複雑さをより明らかにする結果となった。

一方、ガウスの円問題（Gauss circle problem）は、円の面積とその円内の格子点の個数との誤差を評価する問題である。格子点とは x 座標と y 座標がともに整数である点であり、その個数は単位正方形（面積 1）の個数に一致する（図 1 参照）。したがって、円の面積とその円内の格子点の個数はほぼ等しく、その誤差は円の面積が大きくなれば相対的に小さくなる。Gauss (1777–1855) は、円の面積 S に対して誤差のオーダーは $S^{1/2}$ 以下であることを証明した。これは面積と円周との比である。その後 Sierpinski は 1906 年、誤差のオーダーは $S^{1/3}$ 以下であることを証明し、Hardy [6] (1915) は、 $S^{1/4}$ 以下ではないことを証明した。Hardy [7] (1916) はさらに、誤差のオーダーが $S^{1/4}$ に限りなく近いと予想した。これが Hardy 予想である。その後 100 年、多くの数学者が研究を積み重ねているが、現在の最新の結果 (Bourgain and Watt [4] (2017), arXiv) でも、まだ $S^{517/1648}$ ($517/1648 = 0.31371\dots$) 程度である。

2010 年、Kuratsubo [14] は格子点問題に関する Novák の結果を改良し、その結果を用いて 5 次元以上での倉坪現象を証明した。この倉坪の研究から、格子点問題と多変数フーリエ級数の収束問題に密接な関係があることが分かってきた。しかし、格子点問題は高次元では多くの結果が得られているにもかかわらず、ガウスの円問題のように低次元では未解決である。

この論文では、多変数フーリエ級数の収束問題と格子点問題がどのような関係にあるか、そして、原点におけるフーリエ球形部分和の収束発散とガウスの円問題との同値性について解説する。この研究により、調和解析学の古典的問題と解析的整数論の難問という、一見無関係と思われる 2 つの未解決問題の密接な相互関係が明らかになった。将来的には、単に大問題の解決に寄与するだけでなく、2 つの

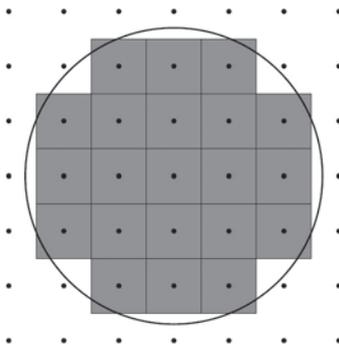


図 1 ガウスの円問題

分野相互に新しい研究手法をもたらすものと期待している。

以下、第 2 節と第 3 節では、それぞれ 1 変数の場合と多変数の場合について、フーリエ級数について知られている結果を述べる。第 4 節では主に 2010 年までの結果に基づき、多次元における球の定義関数について、そのフーリエ球形部分和にみられる特異現象をグラフで示す。第 5 節では最新の研究に基づき、ある種の多次元球対称関数について、そのフーリエ球形部分和の収束発散の状況を述べる。最後に第 6 節において、原点における収束発散とガウスの円問題との同値性について述べる。なお、第 4 節までは [11, 15, 19] も参考にした。

この節の最後に、本文中のグラフを作成したソフトウェアについて記載する。図 3 と図 6 のグラフは MATLAB を、図 16 のグラフは Java と gnuplot を、それ以外のグラフは Mathematica を用いた。いずれも、図の見出しに記載した文献から引用した。

II フーリエ級数

トーラス $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \equiv (-1/2, 1/2]$ 上の可積分関数 f （周期 1 の周期関数）に対して、

$$\widehat{f}(m) = \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi i m x} dx, \quad m \in \mathbb{Z}$$

をフーリエ係数と呼ぶ。 f が良い関数、例えば連続微分可能であれば、

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m x}, \quad x \in \mathbb{T} \tag{2.1}$$

が成り立つ。詳しくは、フーリエ部分和を

$$S_N(f)(x) = \sum_{m=-N}^N \widehat{f}(m) e^{2\pi i m x}, \quad x \in \mathbb{T}$$

としたとき、

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x), \quad x \in \mathbb{T}$$

が成り立つ。等式 (2.1) の右辺をフーリエ級数という。一般の可積分関数 f については、この等式が必ずしも成り立つとは限らない。以下の事実が知られている。

- 1873 年 du Bois-Reymond はある点でフーリエ級数が発散する連続関数を発見した。
- 1926 年 Kolmogorov はフーリエ級数がすべての点で発散する可積分関数が存在することを証明した。
- 1965 年 Kahane and Katznelson は測度 0 の任意の集合 E に対して、 E のすべての点で発散する連続関数が存在することを証明した。

収束に関しては次の結果が知られている.

- (局所性定理) f と g を可積分関数とする. 区間 I 上で $f = g$ ならば, I の内部に含まれる任意の区間において $S_N(f) - S_N(g)$ は 0 に一様収束する.
- (Dirichlet-Jordan の収束定理) 有界変動関数 f に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

が成り立つ. 特に, f が x で連続ならば

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f(x)$$

が成り立つ.

フーリエ級数に関する特異現象として, Gibbs 現象 (Gibbs-Wilbraham 現象) が良く知られている. たとえば

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases} \quad x \in \mathbb{T} = (-1/2, 1/2].$$

とすると, そのフーリエ部分和 $S_N(\chi_a)$ のグラフには, 関数 χ_a の不連続点の近傍において, 不連続幅を超える跳躍が見られる. これが Gibbs 現象である. $N = 10, 20, 30$ としたときの $S_N(\chi_a)$ のグラフは図 2 のようになる. 跳躍の幅は

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = 1.1789 \dots$$

で与えられる.

フーリエ級数の各点収束に関しては, 次の定理が知られている.

定理 2.1 (Carleson-Hunt の概収束定理). $1 < p \leq \infty$ とするとき, $f \in L^p(\mathbb{T})$ ならば $S_N(f)$ は f に概収束する.

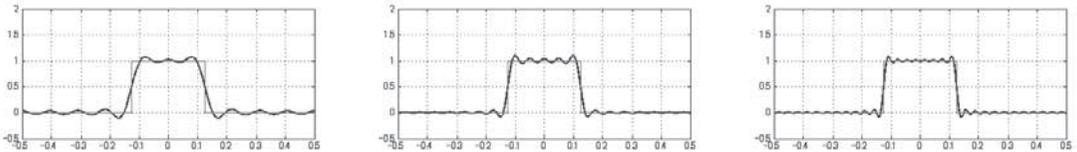


図 2 Gibbs 現象 (Gibbs-Wilbraham 現象) $S_{10}(\chi_a)$, $S_{20}(\chi_a)$, $S_{30}(\chi_a)$, $a = 1/8$. [8]

この定理は, Carleson (1966) が $f \in L^2(\mathbb{T})$ に対して証明し, その後, Hunt (1968) が Carleson の結果を $L^p(\mathbb{T})$ ($p > 1$) に拡張したものである. また, Carleson-Hunt の概収束定理は, Sjölin (1971) によって $L \log L(\log \log L)(\mathbb{T})$ に拡張され, さらに, Antonov (1996) によって $L \log L(\log \log \log L)(\mathbb{T})$ に拡張された. 一方, Konyagin (1999) は $S_N(f)$ がすべての点で発散する関数 $f \in L(\log L)^{1/2}(\mathbb{T})$ が存在することを証明した. 詳細は Arias de Reyna [1] (2002) 参照. より精密な結果が Arias de Reyna [2] (2002), Carro et al. [5] (2012) により得られている.

III 多変数フーリエ級数

d を自然数とし, d 次元トーラスを $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \equiv (-1/2, 1/2]^d$ とおく. 関数 $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ に対して, そのフーリエ係数 $\hat{f}(m)$ を

$$c_m = \hat{f}(m) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-2\pi i m x} dx, \quad m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d,$$

と定める. ただし, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d$ に対して $m x = m_1 x_1 + \dots + m_d x_d$ とする.

2次元以上のとき, フーリエ級数の部分和の取り方は何通りもある.

$$\sum_{|m_1|, |m_2| \leq N} c_m e^{2\pi i m x}, \quad \sum_{|m_1| \leq N_1, |m_2| \leq N_2} c_m e^{2\pi i m x} \quad (d=2)$$

は正方形部分 and 長方形部分 and である. また, 多角形 $P \ni 0$, 単位円 B および $\lambda > 0$ に対して, $\lambda P = \{\lambda x : x \in P\}$, $\lambda B = \{\lambda x : x \in B\}$ とおくとき, 次の部分 and を考えることができる.

$$\sum_{m \in \lambda P} c_m e^{2\pi i m x}, \quad \sum_{m \in \lambda B} c_m e^{2\pi i m x}.$$

最後の and は球形部分 and である. 以下, 球形部分 and を

$$S_\lambda(f)(x) = \sum_{m \in \lambda B} c_m e^{2\pi i m x}$$

とおく.

多変数フーリエ級数の L^p 収束について, 次の定理が知られている.

定理 3.1. $1 < p \leq \infty$ とするとき, $f \in L^p(\mathbb{T}^d)$ ならば任意の多角形 $P \ni 0$ に対して

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{m \in \lambda P} c_m e^{2\pi i m x} = f(x) \quad \text{in } L^p(\mathbb{T}^d).$$

定理 3.2. $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ ならば球形部分 and $S_\lambda(f)$ は f に L^2 収束する. さらに, $p \neq 2$ かつ $d \geq 2$ ならば球形部分 and $S_\lambda(f)$ が L^p 収束しない関数 $f \in L^p(\mathbb{T}^d)$ が存在する.

また、多変数フーリエ級数の各点収束について、次の定理が知られている。

定理 3.3 (C. Fefferman (1971)). 長方形部分和

$$\lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \sum_{|m_1| \leq N_1, |m_2| \leq N_2} c_m e^{2\pi i m x}$$

がすべての点で発散するような関数 $f \in C(\mathbb{T}^2)$ が存在する。

定理 3.4 (P. Sjölin (1971), C. Fefferman (1971)). $1 < p \leq \infty$ とするとき、 $f \in L^p(\mathbb{T}^d)$ ならば任意の多角形 $P \ni 0$ に対して

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{m \in \lambda P} c_m e^{2\pi i m x} = f(x) \quad a.e. x \in \mathbb{T}^d$$

が成り立つ。

球形部分和の各点収束については $p = 2$ のときでさえ未解決問題である。

IV 多変数フーリエ級数における特異現象

多変数フーリエ級数の特異現象として、Pinsky et al. [23] (1993) によって発見された Pinsky 現象が知られている。半径 a の (d 次元) 球の定義関数

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases} \quad x \in \mathbb{T}^d, \quad 0 < a < \frac{1}{2}$$

を考える。 $d = 2$ のとき次の収束が知られている。

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(\chi_a)(x) = \overline{\chi}_a(x) := \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ \frac{1}{2}, & |x| = a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

さらに、次の定理が得られている。

定理 4.1 (Kuratsubo [13] (1996)). すべての次元 d において

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(\chi_a)(x) = \overline{\chi}_a(x) \quad a.e. x \in \mathbb{T}^d$$

が成り立つ。

しかし、 $d \geq 3$ とすると原点において $S_\lambda(\chi_a)(0)$ は発散する。この現象が Pinsky 現象である。たとえば $d = 4$, $a = 1/8$ のとき球形部分 and $S_\lambda(\chi_a)(x_1, x_2, 0, 0)$ ($\lambda = 47$) のグラフは図 3 のようになる。中心の原点において大きく振動していることがわかる。

また $d = 6$, $a = 1/4$ のとき球形部分 and $S_\lambda(\chi_a)(x, 0, 0, 0, 0, 0)$ ($\lambda = 800$) のグラフは図 4 のようになる。原点において振動が非常に激しく、また λ を大きくしたため線の幅よりも細かく振動しており Pinsky 現象が太い棒のように見える。この図には Gibbs 現象も見られる。そのほかの部分では、元の関数 χ_a に近づいている。しかし、なぜか細かな突起も見られる。これを確認するため、区間 $[0.2, 0.5]$ においてグラフを縦に拡大したものが図 5 である。たくさんの点で細かく振動していることがわかる。これが、2006 年に世界で初めてとらえられた倉坪現象である。グラフ作成は大坪和弥氏が担当した (Kuratsubo, Nakai and Ootsubo [17])。この現象はその後、2010 年に倉坪茂彦氏により証明された (Kuratsubo [14])。

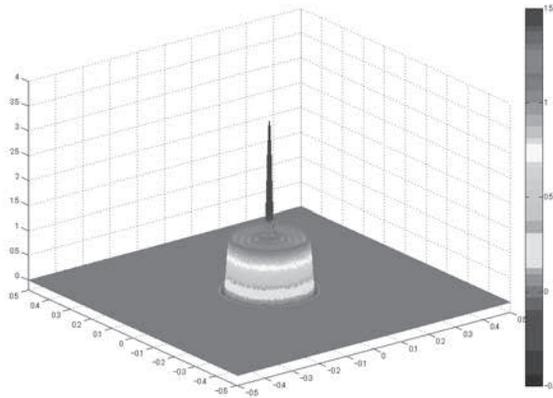


図 3 Pinsky 現象 ($\lambda = 47$) [8]

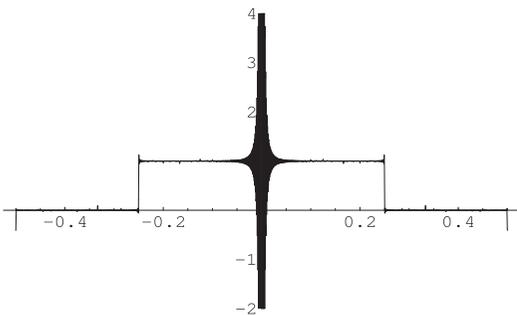


図 4 倉坪現象 ($\lambda = 800$) [17]

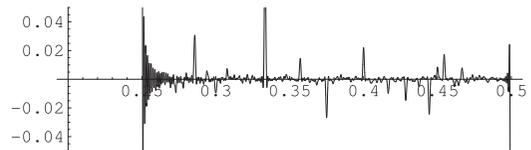


図 5 縦方向への拡大 [17]

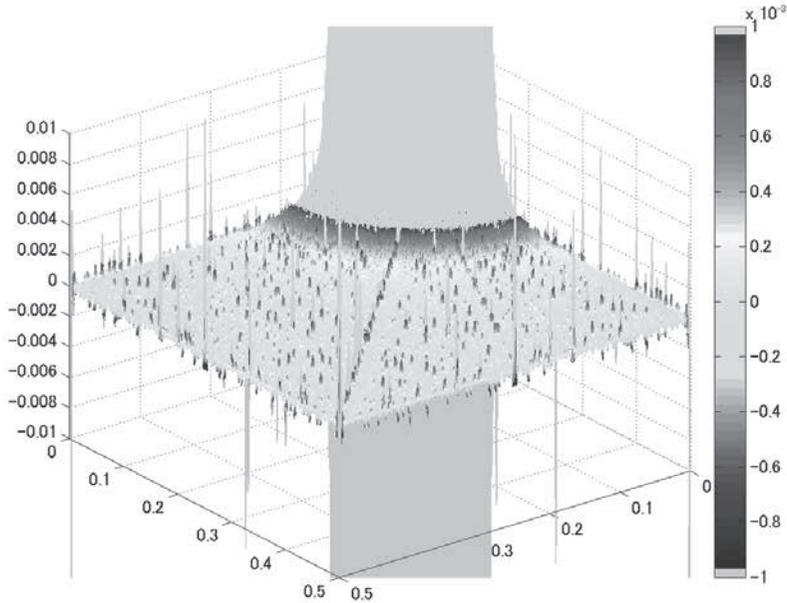


図6 倉坪現象 ($\lambda = 407$) [8]

なお、次元を d とするとき球形部分 $S_\lambda(f)$ の項の数は λ^d に比例する。したがって次元が高くなると、項の数が非常に多くなり、その分計算に時間がかかる。6次元で $\lambda = 800$ ならば項の数はおよそ $800^6 \times \pi^3/3! \approx 1.37 \times 10^{17}$ になる。当時のパソコンではひとつのグラフに2日かかった。実は、このグラフにたどり着くまでに複数のパソコンを使って何百ものグラフを作った。

図6は、 $d = 6, a = 1/8$ のときに $S_\lambda(\chi_a)(x_1, x_2, 0, 0, 0, 0)$ ($\lambda = 407$) を3Dで描いたものである。図3と図6のグラフは2009年に速水彬裕氏が作成した ([8])。図6のグラフから、振動の激しい部分が直線状に分布していることが分かる。しかも、中心点から直線が放射状に延びている。しかしながら、なぜそうなるかはまだ証明されていない。

さらに、フーリエ球形部分の収束発散を調べるため、Gibbs現象、Pinsky現象、倉坪現象をそれぞれ数式上で分離して詳細に考察した。この分離のために、論文 [18] (2010) の中で十数ページの計算が必要であった。図7は $\chi_a(x)$ ($x \in \mathbb{T}^5, a = 1/4$) に対するフーリエ球形部分 $S_\lambda(\chi_a)(\chi_a)(x_1, 0, 0, 0, 0)$ ($\lambda = 81$) のグラフである。この中で、下のグラフは上のグラフを縦に拡大したものである。また、図8はこの $S_\lambda(\chi_a)$ から Gibbs現象 $\bar{\chi}_a + G_{a,\lambda}$, Pinsky現象 $P_{a,\lambda}$, 倉坪現象 $K_{a,\lambda}$ を分離して描いたグラフである。このグラフにより、倉坪現象が原点で最も激しくみられることが分かった。

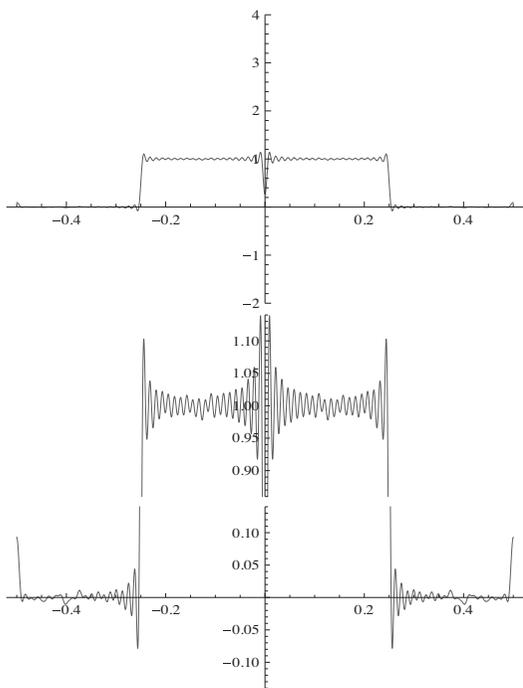


図7 $S_\lambda(\chi_a)$ ($d = 5, a = 1/4, \lambda = 81$) とその拡大 [18, 22]

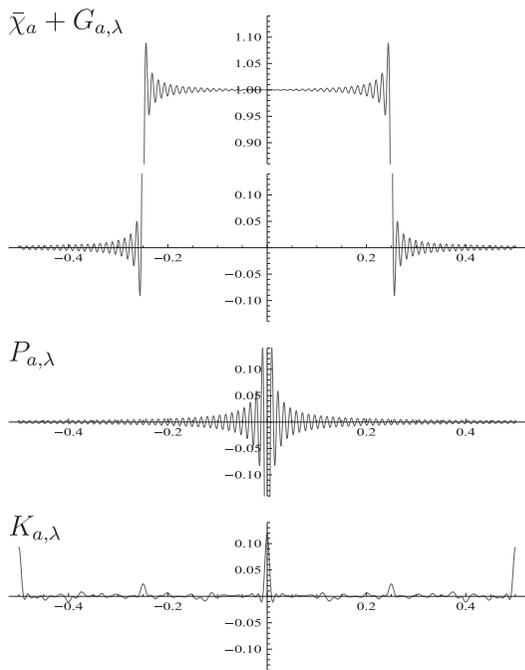


図8 Gibbs 現象, Pinsky 現象, 倉坪現象の分離 [18, 22]

V 多変数フーリエ級数の収束発散

この節では [16] (2022) に従って, 第 4 節で考察した定義関数 χ_a の代わりに次の関数を考える. $\beta > -1, 0 < a < 1/2$ に対して, \mathbb{T}^d 上の関数 $u_{\beta,a}$ と \mathbb{R}^d 上の関数 $U_{\beta,a}$ を次のように定義する.

$$u_{\beta,a}(x) = \begin{cases} (a^2 - |x|^2)^\beta, & 0 \leq |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases} \quad x \in \mathbb{T}^d,$$

$$U_{\beta,a}(x) = \begin{cases} (a^2 - |x|^2)^\beta, & 0 \leq |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

これ以降 $\mathbb{T}^d = (-1/2, 1/2]^d \subset \mathbb{R}^d$ と考えて

$$u_{\beta,a}(x) = U_{\beta,a}(x) \quad \text{for } x \in \mathbb{T}^d$$

とみなす.

関数 $u_{\beta,a}$ は, $\beta = 0$ のとき χ_a と一致する. $\beta > 0$ のときは連続関数となり, $-1 < \beta < 0$ のときは可積分関数であるが $|x| = a$ で発散する. 図 9 は, $d = 1, a = 1/8, \beta = -0.95$ のときの関数 $u_{\beta,a}$

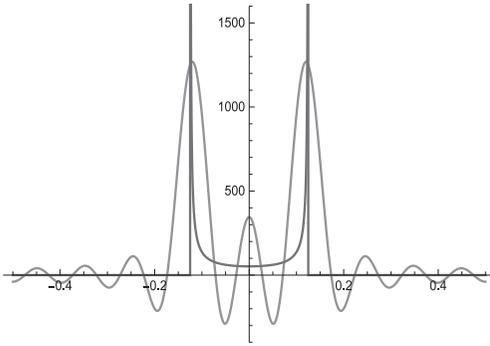


図9 $S_\lambda(u_{\beta,a})(d=1, a=1/8, \beta=-0.95, \lambda=10)$ [12]

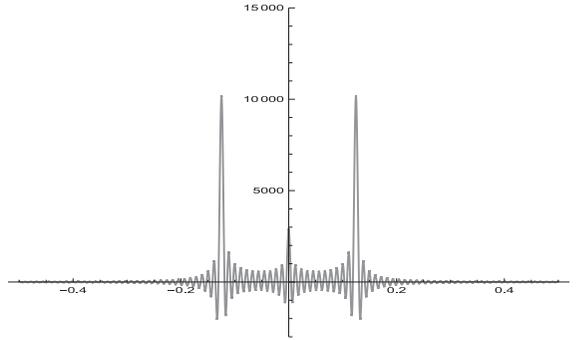


図10 $S_\lambda(u_{\beta,a})(d=2, a=1/8, \beta=-0.95, \lambda=91)$ [12]

とその球形部分和 $S_\lambda(u_{\beta,a})$ ($\lambda=10$) のグラフである. $S_\lambda(u_{\beta,a})$ も $|x|=a$ の近傍で大きな値をとる. また, 図10は $d=2, a=1/8, \beta=-0.95$ のときの球形部分和 $S_\lambda(u_{\beta,a})(x_1, 0)$ ($\lambda=91$) のグラフである. $|x|=a$ の近傍でグラフが負の方向に飛び出す Gibbs 現象がみられるとともに, 2次元であるにもかかわらず Pinsky 現象がみられる. これは Taylor [24, 25] も実験により指摘している. 図9と図10のグラフは加藤本気氏が作成した ([12] (2019)).

さらに高次元では倉坪現象が生じるが, この現象はフーリエ級数とフーリエ積分の差に関係している. すでに述べたように $\mathbb{T}^d = (-1/2, 1/2]^d$ 上の可積分関数 f に対して, そのフーリエ係数とフーリエ球形部分和は次のように定義した.

$$\hat{f}(m) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-2\pi i m x} dx, \quad m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d, \quad (5.1)$$

$$S_\lambda(f)(x) = \sum_{|m| < \lambda} \hat{f}(m) e^{2\pi i m x}, \quad |m| = \sqrt{\sum_{k=1}^d m_k^2}, \quad x \in \mathbb{T}^d. \quad (5.2)$$

これに対して \mathbb{R}^d 上の可積分関数 F に対して, そのフーリエ変換とフーリエ球形部分積分を次のように定義する.

$$\hat{F}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d, \quad (5.3)$$

$$\sigma_\lambda(F)(x) = \int_{|\xi| < \lambda} \hat{F}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi, \quad |\xi| = \sqrt{\sum_{k=1}^d \xi_k^2}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (5.4)$$

ここで ξx は内積 $\sum_{k=1}^d \xi_k x_k$ を表す. このフーリエ球形部分積分 $\sigma_\lambda(F)$ では Gibbs 現象と Pinsky 現象が生じるが, 倉坪現象は生じない. フーリエ球形部分和 $S_\lambda(u_{\beta,a})$ とフーリエ球形部分積分 $\sigma_\lambda(U_{\beta,a})$ の間には次の関係がある.

定理 5.1 ([16] (2022)). $d \geq 1$, $\beta > -1$, $0 < a < 1/2$ のとき, すべての $x \in \mathbb{T}^d$ に対して

$$S_\lambda(u_{\beta,a})(x) = \sigma_\lambda(U_{\beta,a})(x) + \mathcal{K}_{\beta,a}(\lambda^2 : x) + O(\lambda^{-\beta-1}) \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

この定理に出てくる記号について説明すると

$$\mathcal{K}_{\beta,a}(\lambda^2 : x) = \sum_{j=0}^{d_\sharp} (-1)^j \Delta_j(\lambda^2 : x) A_{\beta,a}^{(j)}(\lambda^2)$$

であり, d_\sharp と Δ_j , $A_{\beta,a}^{(j)}$ は, それぞれ

$$d_\sharp = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor + 1 = \begin{cases} 1, & d = 1, 2, \\ 2, & d = 3, 4, \\ 3, & d = 5, 6, \\ \dots & \end{cases}$$

$$\Delta_j(s : x) = D_j(s : x) - \mathcal{D}_j(s : x), \quad s > 0, x \in \mathbb{R}^d,$$

$$D_j(s : x) = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \sum_{|m|^2 < s} (s - |m|^2)^j e^{2\pi i m x}, \quad s > 0, x \in \mathbb{R}^d,$$

$$\mathcal{D}_j(s : x) = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_{|\xi|^2 < s} (s - |\xi|^2)^j e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad s > 0, x \in \mathbb{R}^d,$$

$$A_{\beta,a}^{(j)}(s) = (-1)^j \frac{\Gamma(\beta+1)}{\pi^{\beta-j}} a^{\frac{d}{2} + \beta + j} \frac{J_{\frac{d}{2} + \beta + j}(2\pi a \sqrt{s})}{s^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2} + \beta + j)}}, \quad s > 0, \quad (5.5)$$

である. ここで, Γ はガンマ関数, J はベッセル関数である. また, $O(\lambda^{-\beta-1})$ はランダウの記号であり, $\lambda^{-\beta-1}$ 以下のオーダーで小さくなる項を表している.

この定理からわかるように $S_\lambda(u_{\beta,a})$ の収束発散を調べるには, $\sigma_\lambda(U_{\beta,a})$ と $\mathcal{K}_{\beta,a}$ の収束発散を調べる必要がある. そして $\mathcal{K}_{\beta,a}$ の収束発散を調べるためには, 解析的整数論における格子点問題が必要となる. しかし残念なことに我々が必要とする格子点問題の結果はまだ完全には得られていない. 特に低次元での結果が不十分である. 最後の節で述べるように, 2次元において, 原点における $\mathcal{K}_{\beta,a}$ の収束発散は, ガウスの円問題に関する Hardy 予想と同値であることがわかった. すなわち, いずれかが解決すれば両方の問題が解決する.

次に, $\sigma_\lambda(U_{\beta,a})$ の解析を行うとともに, これまでに分かっている格子点問題の結果を改良して $\mathcal{K}_{\beta,a}$ の収束発散を調べることにより, わかった結果を述べる. まず原点における収束発散については, 次の結論が得られた. これにより Pinsky 現象の発散のオーダーが正確に得られた.

定理 5.2 ([16] (2022)). $d \geq 1, 0 < a < 1/2$ とする.

(i) $\beta > \frac{d-3}{2}$ のとき

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(u_{\beta,a})(0) = u_{\beta,a}(0).$$

(ii) $-1 < \beta \leq \frac{d-3}{2}$ のとき

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{S_\lambda(u_{\beta,a})(0) - u_{\beta,a}(0)}{\lambda^{\frac{d-3}{2}-\beta}} = -P_{\beta,a}^{[d]},$$

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{S_\lambda(u_{\beta,a})(0) - u_{\beta,a}(0)}{\lambda^{\frac{d-3}{2}-\beta}} = P_{\beta,a}^{[d]},$$

ただし

$$P_{\beta,a}^{[d]} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(d/2)} a^{(d-3)/2+\beta} \pi^{(d-4)/2-\beta} \quad (5.6)$$

である.

この定理によれば, $d=2$ のときも Pinsky 現象が生じることがわかる. このことは Taylor [24, 25] が $\beta = -1/2, a = 1/4$ の場合に実験で示していたが, この定理によって証明された. しかも, この定理により振動の幅は $P_{\beta,a}^{[d]} = 4$ であることもわかる. $\beta = -1/2, a = 1/4$ の場合の $u_{\beta,a}$ とそのフーリエ球形部分 $S_\lambda(u_{\beta,a})(x_1, x_2)$ のグラフは, 図 11 である. また, 図 12 と図 13 は, それぞれ, 3次元と4次元の場合である. 図 12 は $d=3, \beta=0, a=1/4$ の場合で, このとき振動の幅は $P_{\beta,a}^{[d]} = 2/\pi$ となる. 図 13 は $d=4, \beta=1/2, a=1/4$ の場合であり, もとの関数は連続関数であるが, そのフーリエ球形部分 $S_\lambda(u_{\beta,a})(x_1, x_2)$ は原点で振動しており, その幅は $P_{\beta,a}^{[d]} = 1/8$ である.

次に, 原点以外における各点での収束発散に関する定理である. この定理によって倉坪現象が生じることも分かる. まず, 次元 $d=1, 2, 3, 4$ に対して $c(d)$ を次のように定義する.

$$c(d) = d - \frac{2d}{d+1} - \frac{d+1}{2} = \frac{d-5}{2} + \frac{2}{d+1} = \frac{d(d-4)-1}{2(d+1)}, \quad (5.7)$$

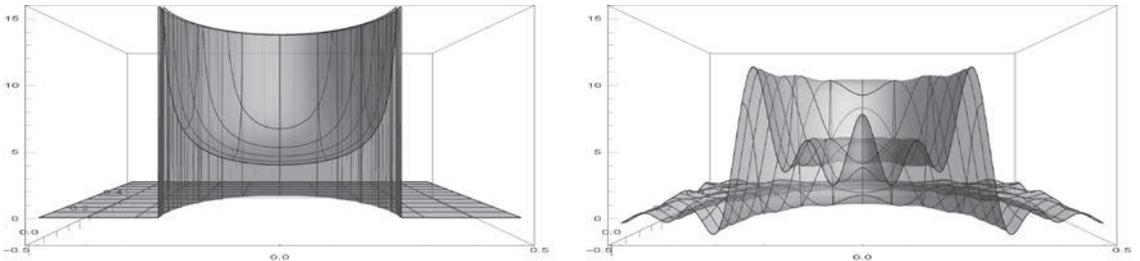


図 11 $u_{\beta,a}$ ($d=2, \beta=-1/2, a=1/4$) と $S_\lambda(u_{\beta,a})$ ($\lambda=10$) [16]

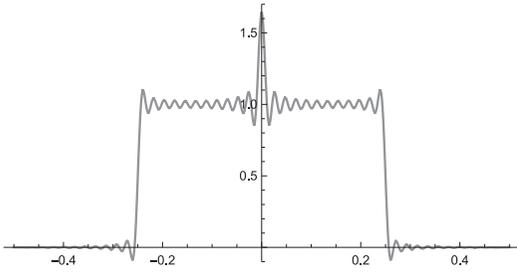


図 12 $S_\lambda(u_{\beta,a})$ ($d = 3, \beta = 0,$
 $a = 1/4, \lambda = 47$) [16]

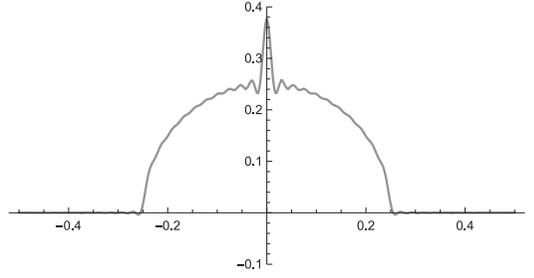


図 13 $S_\lambda(u_{\beta,a})$ ($d = 4, \beta = 1/2,$
 $a = 1/4, \lambda = 44$) [16]

すなわち

$$c(1) = -1, c(2) = -5/6, c(3) = -1/2, c(4) = -1/10.$$

また

$$E_a = \{x \in \mathbb{T}^d : x \neq 0 \text{ and } |x| \neq a\},$$

$$G_a = \{x \in \mathbb{T}^d : |x| = a\}$$

とおくと $\mathbb{T}^d = \{0\} \cup G_a \cup E_a$ である. $\beta > -1, a > 0$ に対して

$$L_{\beta,a} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{2} \left(\frac{a}{\pi}\right)^\beta \left(\frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{\frac{\beta\pi}{2}}\right) \quad (5.8)$$

とおく. ただし, $\beta = 0$ のときは $(\sin \frac{\beta\pi}{2}) / \frac{\beta\pi}{2} = 1$ とみなす. すなわち $L_{0,a} = 1/2$ である.

定理 5.3 ([16] (2022)). $\beta > -1, 0 < a < 1/2$ とする.

(i) $1 \leq d \leq 4$ のとき

(a) $\beta > -1$ ならば, $x \in G_a$ に対して

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{S_\lambda(u_{\beta,a})(x) - u_{\beta,a}(x)}{\lambda^{-\beta}} = L_{\beta,a}.$$

(b) $\beta > c(d)$ ならば, E_a 内の任意のコンパクト集合上で一様に

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(u_{\beta,a})(x) = u_{\beta,a}(x).$$

(ii) $d \geq 5$ のとき, $x \in (E_a \cup G_a) \setminus \mathbb{Q}^d$ に対して

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^{\frac{d-5}{2}}} \left| \frac{S_\lambda(u_{\beta,a})(x) - u_{\beta,a}(x)}{\lambda^{-\beta}} - \chi_{G_a}(x) L_{\beta,a} \right| = 0,$$

また $x \in (E_a \cup G_a) \cap \mathbb{Q}^d$ に対して

$$0 < \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^{\frac{d-5}{2}}} \left| \frac{S_\lambda(u_{\beta,a})(x) - u_{\beta,a}(x)}{\lambda^{-\beta}} - \chi_{G_a}(x)L_{\beta,a} \right| < \infty.$$

すなわち, $(d-5)/2 - \beta \geq 0$ のとき $S_\lambda(u_{\beta,a})$ は倉坪現象を起こす.

図 14 は $u_{\beta,a}(x,0,0,0,0)$ ($d = 5, \beta = -1/2, a = 1/4$) とそのフーリエ球形部分 and $S_\lambda(u_{\beta,a})$ ($\lambda = 101$) のグラフである. このフーリエ球形部分 and のグラフには Gibbs 現象, Pinsky 現象, 倉坪現象がすべて見られる. このうち倉坪現象を見やすくするため区間 $[0.2, 0.5]$ おいて縦方向に拡大したものが図 15 である.

注意 5.1. 定理 5.3 において, $2 \leq d \leq 4$ かつ $-1 < \beta \leq c(d)$ の場合は, E_a における $S_\lambda(u_{\beta,a})$ の各点収束の状況は未解決である. この部分は格子点問題の未解決な部分と深くかかっている.

なお, $d = 4, -1 < \beta < -1/2$ のときは, Ootsubo et al. [21] (2021) により, $\mathbb{T}^d \cap \mathbb{Q}^d$ における $S_\lambda(u_{\beta,a})$ の発散が証明された. 図 16 は, $d = 4, \beta = -9/10, a = 1/8$ のときのフーリエ球形部分 and $S_\lambda(u_{\beta,a})$ ($\lambda = 400$) のグラフである. 区間 $[0.2, 0.5]$ において拡大して描いたものだが, かなり大きく振動している. このグラフの数値計算は藤間昌一氏が担当した.

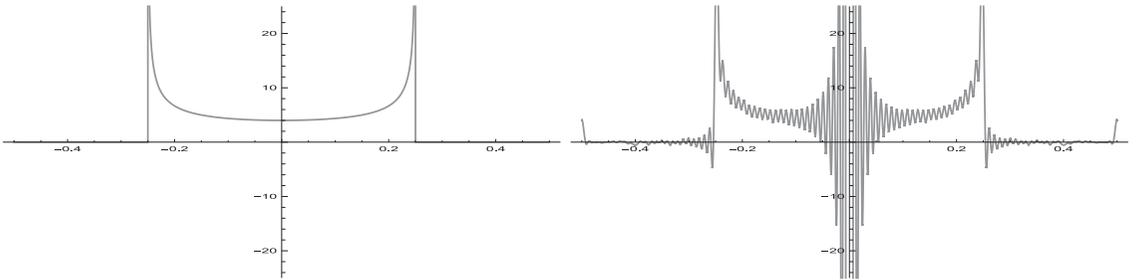


図 14 $u_{\beta,a}$ ($d = 5, \beta = -1/2, a = 1/4$) と $S_\lambda(u_{\beta,a})$ ($\lambda = 101$) [16]

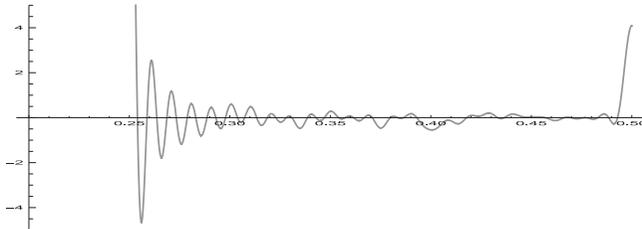


図 15 区間 $[0.2, 0.5]$ にて縦方向に拡大 [16]

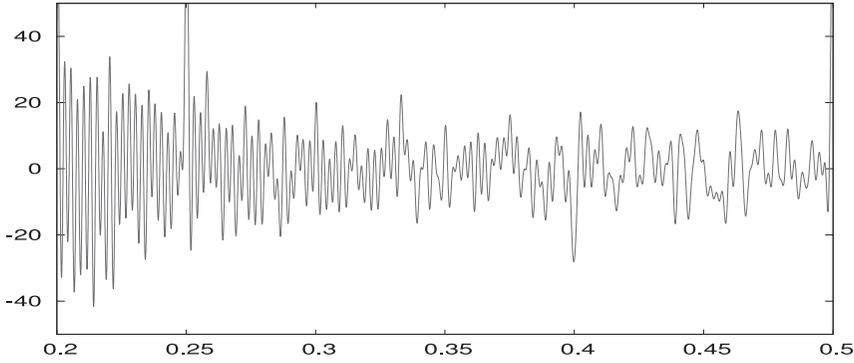


図 16 4次元における倉坪現象 [21]

続いて $1 \leq d \leq 4$ のとき G_a の近傍における Gibbs 現象に関する定理を述べる.

定理 5.4 ([16] (2022)). $1 \leq d \leq 4$, $c(d) < \beta \leq 0$, $0 < a < 1/2$ とする. このとき G_a の近傍で, $S_\lambda(u_{\beta,a})$ は Gibbs 現象 (Gibbs-Wilbraham 現象) を起こす. より詳しく言えば, 各 $x_0 \in G_a$ に対して, 数列 $\{x_\lambda^\pm\} \subset \mathbb{T}^d$ が $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} x_\lambda^\pm = x_0$ かつ $|x_\lambda^\pm| = a \mp (2 \pm \beta)/(4\lambda)$ を満たすならば

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{S_\lambda(u_{\beta,a})(x_\lambda^\pm) - u_{\beta,a}(x_\lambda^\pm)}{\lambda^{-\beta}} = G_{\beta,a}^\pm,$$

ただし

$$G_{\beta,a}^\pm = \mp \frac{\Gamma(\beta+1)a^\beta(2 \pm \beta)^\beta}{\pi 2^\beta} \int_\pi^\infty \frac{\sin s}{(s \pm \frac{\beta}{2}\pi)^{\beta+1}} ds. \quad (5.9)$$

先ほどの図 12 では, $d = 3$, $\beta = 0$, $a = 1/4$ のとき Gibbs 現象と Pinsky 現象が見られる. 一方, 図 13 のように, $d = 4$, $\beta = 1/2$, $a = 1/4$ のときは Pinsky 現象は見られるが Gibbs 現象は見られない.

注意 5.2. (i) 定理 5.4 において, 定数 $G_{\beta,a}^+$ は正の数であり, $G_{\beta,a}^-$ は負の数である. 特に,

$$G_{0,a}^\pm = \mp \frac{1}{\pi} \int_\pi^\infty \frac{\sin s}{s} ds = \mp \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin s}{s} ds = \pm 0.08949 \dots$$

(ii) $2 \leq d \leq 4$ かつ $-1 < \beta \leq c(d)$ の場合は, 注意 5.1 と同じ理由により定理 5.4 は未解決である.

最後に, $d \geq 4$ のとき, $S_\lambda(u_{\beta,a})$ の概収束に関する定理を述べる.

定理 5.5 ([16] (2022)). $d \geq 4$, $\beta > -1/2$, $a > 0$ とする. このとき

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(u_{\beta,a})(x) = u_{\beta,a}(x), \quad a.e. \ x \in \mathbb{T}^d.$$

注意 5.3. $d \geq 4$ かつ $-1 < \beta \leq -1/2$ のとき $S_\lambda(u_{\beta,a})$ の概収束は未解決である.

VI フーリエ球形部分和と格子点問題との関係

最後に, $S_\lambda(u_{\beta,a})$ の各点収束と格子点問題との関係を述べる.

定理 6.1 ([16] (2022)). $d = 2$ または $d = 3$ とする. $0 < a < 1/2$ のとき $x_0 \in \mathbb{T}^d$ に対して次の (i) と (ii) は同値である.

(i) すべての $\beta > -1$ に対して

$$S_\lambda(u_{\beta,a})(x_0) - \sigma_\lambda(U_{\beta,a})(x_0) = \mathcal{K}_{\beta,a}(\lambda^2 : x_0) + O(\lambda^{-\beta-1}) = o(1) \quad (\lambda \rightarrow \infty). \quad (6.1)$$

(ii) すべての $\varepsilon > 0$ に対して

$$\Delta_0(s : x_0) = O(s^{\frac{d-1}{4}+\varepsilon}) \quad (s \rightarrow \infty). \quad (6.2)$$

この定理の中で $o(1)$ はランダウの記号であり, 0 に収束する項を表している.

$d = 1$ のとき $S_\lambda(u_{\beta,a})(x)$ と $\sigma_\lambda(U_{\beta,a})(x)$ の収束発散はよくわかっており, 評価式 (6.2) も成り立つことが分かっている. しかし, $d = 2$ と $d = 3$ の場合には, 評価式 (6.2) が成り立つかどうかは未知である.

$d = 2$ のとき, 次の不等式が知られている ([20, Hauptsatz 3] (1969)).

$$C_2(x) t^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{1}{t} \int_0^t |\Delta_0(s : x)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} < D_2(x) t^{\frac{1}{4}} \quad (x \in \mathbb{T}^2), \quad (6.3)$$

ただし, $C_2(x)$ と $D_2(x)$ は $x \in \mathbb{T}^2$ に依存する正の定数である. したがって, 自然な予想として, すべての $x \in \mathbb{T}^2$ に対して $\Delta_0(s : x) = O(s^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$ が成り立つと考えられる. しかし $x = 0$ の場合だけ考えても

$$\text{“}\Delta_0(s : 0) = O(s^{\frac{1}{4}+\varepsilon}) \text{ for all } \varepsilon > 0\text{”}$$

は, 未解決問題として有名な, ガウスの円問題に関する Hardy 予想と等しい. つまり, $d = 2$ の場合, 評価式 (6.2) は $x = 0$ のとき

$$\Delta_0(s : 0) = D_0(s : 0) - \mathcal{D}_0(s : 0) = \sum_{|m|^2 < s} 1 - \int_{|\xi|^2 < s} d\xi$$

であり, この式は円内の格子点の個数と円の面積との差になっている. すなわち, ガウスの円問題は評価式 $\Delta_0(s : 0) = O(s^\theta)$ の θ を求める問題と等しい. 最近の結果としては, Huxley [10] (2003) の $\theta = 131/416 = 0.314903\dots$, Bourgain and Watt [3] (2018) の $\theta = 1515/4816 = 0.314576\dots$ が得られている. さらに正式出版ではないが, 最新の結果は Bourgain and Watt [4] (2017, arXiv) の $\theta = 517/1648 = 0.31371\dots$ である.

$d = 3$ のとき, 次の不等式が知られている ([20, Hauptsatz 3] (1969)).

$$C_3(x)t^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{t} \int_0^t |\Delta_0(s : x)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} < D_3(x)t^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} t \text{ for all } x \in \mathbb{T}^3, \quad (6.4)$$

ただし, $C_3(x)$ と $D_3(x)$ は $x \in \mathbb{T}^3$ に依存する正の定数である. したがって, 自然な予想として, すべての $x \in \mathbb{T}^3$ に対して $\Delta_0(s : x) = O(s^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ が成り立つと考えられる. しかし, この問題も大変難しい. これまでの最良の結果は Heath-Brown [9] (1999) の $\Delta_0(s : 0) = O(s^{21/32+\varepsilon})$ である.

定理 6.2 ([16] (2022)). $d \geq 4$ とする. $\beta > -1$, $0 < a < 1/2$ のとき $x_0 \in \mathbb{T}^d$ に対して評価式 (6.2) が成り立てば

$$S_\lambda(u_{\beta,a})(x_0) - \sigma_\lambda(U_{\beta,a})(x_0) = o(1) \text{ as } \lambda \rightarrow \infty$$

が成り立つ.

$d \geq 4$ のとき $x \in \mathbb{T}^d \cap \mathbb{Q}^d$ に対して次の不等式が知られている ([20, Hauptsatz 1] (1969)).

$$\left(\frac{1}{t} \int_0^t |\Delta_0(s : x)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = M_d(x)t^{\frac{d}{2}-1} + O(t^{\frac{d}{2}-\frac{3}{2}+\varepsilon}),$$

ただし, $M_d(x)$ は x に依存した正の定数である. したがって, $d \geq 4$ のとき $x \in \mathbb{T}^d \cap \mathbb{Q}^d$ に対して評価式 (6.2) は成り立たないことが分かる.

参考文献

- [1] J. Arias de Reyna, Pointwise convergence of Fourier series, Lecture Notes in Mathematics, 1785, Springer-Verlag, Berlin, 2002. xviii+175 pp. ISBN: 3-540-43270-1
- [2] J. Arias de Reyna, Pointwise convergence of Fourier series, J. London Math. Soc. (2) 65, 2002, No. 1, pp. 139–153.
- [3] J. Bourgain and N. Watt, Decoupling for Perturbed Cones and the Mean Square of $|\zeta(12 + it)|$. Int. Math. Res. Not. IMRN, 2018, No. 17, pp. 5219–5296.
- [4] J. Bourgain and N. Watt, Mean square of zeta function, circle problem and divisor problem revisited, arXiv:1709.04340v1 (Submitted on 13 Sep. 2017).
- [5] M. J. Carro, M. Mastylo and L. Rodriguez-Piazza, Almost everywhere convergent Fourier series, J. Fourier Anal. Appl. 18, 2012, No. 2, pp. 266–286.

- [6] G. H. Hardy, On the expression of a number as the sum of two squares, *Quart. J. Math.*, 46, 1915, pp. 263–283.
- [7] G. H. Hardy, The average order of the arithmetical functions $P(x)$ and $\Delta(x)$, *Proc. London Math. Soc.* 15, 1916, pp. 192–213.
- [8] A. Hayami, Singular phenomena of Fourier series in several variables, Thesis for master's degree, Osaka Kyoiku University, 2009, 64 pp.
<http://ir.lib.osaka-kyoiku.ac.jp/dspace/handle/123456789/8679>
- [9] D. R. Heath-Brown, Lattice points in the sphere, *Number theory in progress*, Vol. 2 (Zakopane-Kościelisko, 1997), pp. 883–892, de Gruyter, Berlin, 1999.
- [10] M. N. Huxley, Exponential sums and lattice points. III. *Proc. London Math. Soc.*, (3) 87, 2003, No. 3, pp. 591–609.
- [11] 猪狩惺, 論説「多重フーリエ級数の収束問題」, *数学* 25, 1973, No. 2, pp. 110–119.
- [12] M. Kato, Convergence of the Fourier series and singular phenomena, Thesis for master's degree, Ibaraki University, 2019, 1006 pp.
- [13] S. Kuratsubo, On pointwise convergence of Fourier series of indicator function of n dimensional ball, *Sci. Report Hirosaki*, 43, 1996, pp. 199–208.
- [14] S. Kuratsubo, On pointwise convergence of Fourier series of the indicator function of d dimensional ball, *J. Fourier Anal. Appl.*, 16, 2010, pp. 52–59.
- [15] 倉坪茂彦, 論説「多変数フーリエ級数と格子点問題について – Gibbs-Wilbraham 現象, Pinsky 現象そして第 3 の現象 –」, *数学* 63, 2011, No. 1, pp. 103–118.
- [16] S. Kuratsubo and E. Nakai, Multiple Fourier series and lattice point problems, *J. Funct. Anal.* 282, 2022, No. 1, Article 109272, 62 pp.
- [17] S. Kuratsubo, E. Nakai and K. Ootsubo, On the Pinsky Phenomenon of Fourier Series of the Indicator Function in Several Variables, *Memoirs of Osaka Kyoiku University, Ser.III Natural Science and Applied Science*, 55, 2006, No. 1, pp. 1–20.
<http://ir.lib.osaka-kyoiku.ac.jp/dspace/handle/123456789/372>
- [18] S. Kuratsubo, E. Nakai and K. Ootsubo, Generalized Hardy identity and relations to Gibbs-Wilbraham and Pinsky phenomena, *J. Funct. Anal.*, 259, 2010, No. 2, pp. 315–342.
- [19] 中井英一, フーリエ級数の収束問題 – 多変数フーリエ級数の特異現象 –, 日本評論社「数学セミナー」49 (2010) No. 10, 通巻 589 号, 31–37.
- [20] B. Novák, Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, *Czechoslovak Math. J.*, 19, 1969, pp. 154–180.
- [21] K. Ootsubo, S. Fujima, S. Kuratsubo and E. Nakai, Kuratsubo phenomenon of the Fourier series of some radial functions in four dimensions, *Sci. Math. Jpn.* 84, 2001, No. 3, pp. 181–192. https://doi.org/10.32219/isms.84.3_181
- [22] 大坪和弥, 倉坪茂彦, 中井英一, 速水彬裕, Voronoi-Hardy's identity, the Gibbs-Wilbraham phenomenon, the Pinsky phenomenon and the third phenomenon, 日本数学会秋季総合分科会講演資料 2009.9.24, <http://ir.lib.osaka-kyoiku.ac.jp/dspace/handle/123456789/21779>
- [23] M. A. Pinsky, N. K. Stanton and P. E. Trapa, Fourier series of radial functions in several variables, *J. Funct. Anal.*, 116, 1993, pp. 111–132.
- [24] M. Taylor, Double Fourier series with simple singularities—A graphical case study, preprint.
<https://mtaylor.web.unc.edu/notes/classical-fourier-analysis-\\sometimes-with-a-modern-perspective/double-fourier-series-of-\\functions-with-simple-singularities/>
<https://mtaylor.web.unc.edu/notes/classical-fourier-analysis-\\sometimes-with-a-modern-perspective/fourier-series-of-the-\\>

`\fundamental-solution-of-the-2d-wave-equation/`

[25] M. Taylor, Serendipitous Fourier inversion, preprint.

<https://mtaylor.web.unc.edu/wp-content/uploads/sites/16915/2018/04/SERENE.pdf>