Rubio de Francia の extrapolation theorem について

東海大学　古　谷　康　雄

Extrapolationtheorem は Rubio de Francia が 1982 年［16, 17］に発表して以来盛んに研究されて，改良，一般化もなされ，理論も整理されてほぼ完成の域に達している．証明もオリジナルのものより簡単になっている．D. Cruz-Uribe, J.M. Martell, and C. Pérez による Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia. Operator Theory: Advances and Applications **215**. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. を参照．なお Rubio de Francia は 88 年に 39 歳で急逝されたので，この教科書で引用されている彼の論文は上の 2 本だけである．蛇足ながら，彼の最後の論文は普通の特異積分より特異性が遥かに強い作用素の理論[8]であり，数多く引用されている彼の重要な仕事の一つである．［18］には Torrea, Garcia-Cuerva, Duoandikoetxea, Carbery による彼の業績の紹介が載っている．［10］には Garcia-Cuerva による追悼文を載っているがスペイン語．彼が Garcia-Cuerva と書いた教科書［9］は名著だが現在は絶版のようである．

このノートでは extarpolation theorem の発展の歴史について概観し，最も基本的な定理を上の教科書に従い証明する．

I　イントロダクション

以下では一般的な設定ではなく，基本的な設定で考える．$\mathbb{R}^n$ とその上のルベーグ測度 dx，そして T は linear operator とする．まず良く知られた interpolation theorem（補間定理）を考える．以下とは違うタイプの補間定理はたとえば［14］，［15］参照.

定理（interpolation） $p_1 < p_2$ とする.

$$T : L^{p_1} \to L^{p_1} \cdots \text{(1)} \quad \text{かつ} \quad T : L^{p_2} \to L^{p_2} \ \cdots \text{(2)}$$

ならば

$$T : L^{p} \to L^{p} \quad \cdots \text{(3)} \quad p_1 < p < p_2$$

次のような問題を考える.

問題　(2) がなくても (1) だけで (3) は成り立つか？

もちろん答えは No である．そこで重み付き評価を考える．以下では $w \geq 0$ とする．$T : L^p(w) \to L^p(w)$ とは

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)\,dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\,dx. \tag{4}$$

(3) が成り立っているとき (4) が成り立つための w の条件は？

$0 < C_1 \leq w(x) \leq C_2$ ならば(4) が成り立つことは自明. $w(x) \to 0$, $w(x) \to \infty$ となるときが問題である. このことが良く分かる条件が

定義（A_2 **条件**）　$w \in A_2$ とは

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-1}\,dx\right) < \infty.$$

$w(x) \to 0$ と $w(x) \to \infty$ のときのバランスが良くとれている（$|x|^a \in A_2$ iff. $-n < a < n$). これはヒルベルト変換が $L^2(w)$ 有界になるための必要十分条件である.

重み付き評価を考えると, さっきの問題の答えがある意味で Yes となる. 正しい表現は定理1で述べる.

<u>**Rubio de Francia's extrapolation theorem**</u>（rough and simple version）

$$T: L^2(w) \to L^2(w) \text{ for all } w \in A^2 \;\Rightarrow\; T: L^p \to L^p \text{ for all } 1 < p < \infty.$$

Cordoba はこの定理のことを次のように言っている. [5] p. 11 参照.

There are no L^p spaces, only weighted L^2.

この定理はとても強力な定理であるが,

$$T: L^p \to L^p \quad \text{where} \quad p_0 < p < p_1$$

というような作用素はたくさんある. これに対応したのは limited range extarpo-lation と呼ばれている, Auscher and Martell [1] (2007).

$T: L^p \to L^q$ となる作用素に対応したのは off-diagonal extrapolation といわれる, Harboure, Macías and Segovia [11] (1988), Auscher and Martell [2] (2008).

Off-diagonal limited range extrapolation については Duoandikoetxea [7] (2011), Cruz-Uribe and Martell [4] (2018).

さらに multilinear な作用素に関する extrapolation theorem は未解決問題であったが, diagonal な場合に Li, Martell and Ombrosi [13] (2020) によって得られた.

我々は off-diagonal multilinear limited range extrapolation theorem を証明した [12].

II　Rubio de Francia's extrapolationtheorem

Rubio de Francia の定理を正しい形で書く.

定義　$p > 1$ とする. $w \in A_p$ とは

$$[w]_{A_p} := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} < \infty.$$

$w\in A_1$ とは

$$[w]_{A_1}:=\sup_Q\left\{\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right)\mathrm{esssup}_{x\in Q}w^{-1}(x)\right\}<\infty.$$

注意　$A_1\subset A_p\subset A_q\,(1<p<q)$. $|x|^a\in A_1$ iff. $-n<a\leq 0$.

定理　ある $1<p_0<\infty$ が存在して

$$\|Tf\|_{L^{p_0}(w)}\leq C([w]_{A_{p_0}})\|f\|_{L^{p_0}(w)}\quad\text{for all}\quad w\in A_{p_0} \tag{*}$$

ならば任意の $1<p<\infty$ に対して

$$\|Tf\|_{L^p(w)}\leq C([w]_{A_p})\|f\|_{L^p(w)}\quad\text{for all}\quad w\in A_p.$$

$C(X)$ は X にのみ依存した定数.

証明の重要なアイデアは $w\in A_p$ から $v\in A_{p0}$ を作って条件（$*$）を使う．そのために以下の補題が重要.

補題 1

（1）　Let $1<p<p_0$.

$$w\in A_p\quad\text{and}\quad v\in A_1,\quad\text{then}\quad w\cdot v^{p-p_0}\in A_{p_0}.$$

（2）　Let $1<p_0<p<\infty$.

$$\text{If } w\in A_p\quad\text{and}\quad v\in A_1,\quad\text{then}\quad \left(w^{p_0-1}\cdot v^{p-p_0}\right)^{1/(p-1)}\in A_{p_0}.$$

証明は A_p の定義にあてはめるだけだが，このような指数をみつけたところが重要.

この補題において v は $v\in A_1$ ならば何でも良いが，問題と関係ない $v=|x|^a$（$-n<a<0$）をとってきても意味はない．そこで次の補題が重要になる.

補題 2（**Rubio de Francia** のアルゴリズム）Let $1<p<\infty$ and $f\in L^p(w)$ where $w\in A_p$. By the Rubiode Francia algorithm, we can mak ethefunction $Rf(x)$ such that

$$|f(x)|\leq\mathcal{R}f(x)\,\text{a.e.},\quad\|\mathcal{R}f\|_{L^p(w)}\leq 2\|f\|_{L^p(w)}\quad\text{and}\quad[\mathcal{R}f]_{A_1}\leq C([w]_{A_p}).$$

注意　$[Rf]_{A1}$ が f に依存しないことが重要である.

補題 1 の証明

（1）
$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\cdot v^{p-p_0}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q(w\cdot v^{p-p_0})^{-1/(p_0-1)}\right)^{p_0-1}=:I\cdot II$$

を評価する.

$$I\leq\frac{1}{|Q|}\int_Q w\cdot\left(\mathrm{esssup}_Q v^{-1}\right)^{p_0-p}.$$

II には $1/s:=1-(p-1)/(p_0-1)$ とおいて Hölder の不等式を使うと

$$\begin{aligned}II&\leq\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q(w^{-1/(p_0-1)})^{(p_0-1)/(p-1)}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q(v^{(p_0-p)/(p_0-1)})^s\right)^{(p_0-1)/s}\\&=\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-1/(p-1)}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v\right)^{p_0-p}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$I\cdot II \le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-1/(p-1)}\right)^{p-1}\left(\mathrm{esssup}_Q v^{-1}\cdot\frac{1}{|Q|}\int_Q v\right)^{p_0-p}$$
$$\le [w]_{A_p}\cdot[v]_{A_1}^{p_0-p}.$$

(2)

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (w^{p_0-1}\cdot v^{p-p_0})^{1/(p-1)}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (w^{p_0-1}\cdot v^{p-p_0})^{\frac{1}{p-1}\frac{-1}{p_0-1}}\right)^{p_0-1} =: I\cdot II$$

を評価する.

$1/s := 1-(p_0-1)/(p-1)$ とおいて Hölder の不等式を使うと

$$I \le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)^{(p_0-1)/(p-1)}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v^{(p-p_0)s/(p-1)}\right)^{1/s}$$
$$= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)^{(p_0-1)/(p-1)}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v\right)^{1/s}.$$

$$II \le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-1/(p-1)}\right)^{p_0-1}\cdot(\mathrm{esssup}_Q v^{-1})^{(p-p_0)/(p-1)}.$$

ゆえに

$$I\cdot II \le \left\{\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-1/(p-1)}\right)^{p-1}\right\}^{(p_0-1)/(p-1)}$$
$$\times\left(\mathrm{esssup}_Q v^{-1}\cdot\frac{1}{|Q|}\int_Q v\right)^{(p-p_0)/(p-1)} \le [w]_{A_p}^{(p_0-1)/(p-1)}\cdot[v]_{A_1}^{(p-p_0)/(p-1)}. \quad \square$$

補題2の証明　最初に1つだけ準備をしておく. M を Hardy-Littlewood maximal operator とすると, 次の事実は良く知られている. $1<p<\infty$ とする.

$$M: L^p(w)\to L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w\in A_p$$

このとき

$$\|M\|_{L^p(w)\to L^p(w)} := \sup_{f\neq 0}\frac{\|Mf\|_{L^p(w)}}{\|f\|_{L^p(w)}} \quad \text{（作用素ノルム）}$$

とおくと $\|M\|_{L^p(w)\to L^p(w)} \le C([w]_{A_p})$. この C が補題の3番目の性質と関係する.

$M^k := M\circ M\circ\cdots\circ M$　（k 回の合成）としたとき

$$\mathcal{R}f(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{M^k f(x)}{2^k\|M\|^k_{L^p(w)\to L^p(w)}}, \qquad M^0 f = |f| \text{ とする},$$

とおくとこれが求める関数である. 最初の2つの性質は自明である. 3番目を証明する.

$$
\begin{aligned}
M(\mathcal{R}f)(x) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{k+1}f(x)}{2^k \|M\|^k_{L^p(w)\to L^p(w)}} \\
&= 2\|M\|_{L^p(w)\to L^p(w)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{k+1}f(x)}{2^{k+1}\|M\|^{k+1}_{L^p(w)\to L^p(w)}} \\
&\leq 2\|M\|_{L^p(w)\to L^p(w)} \mathcal{R}f(x).
\end{aligned}
$$

これは

$$[\mathcal{R}f]_{A_1} \leq 2\|M\|_{L^p(w)\to L^p(w)} = C([w]_{A_p})$$

を意味する． □

定理の証明　$p < p_0$ のとき．$f \in L^p(w)$，$w \in A_p$ に対して，補題 2 より $Rf \in A_1$ が作れて，補題 1 より

$$V := w \cdot (\mathcal{R}f)^{p-p_0} \in A_{p_0}.$$

$[V]_{A_{p_0}}$ は f に依存しないことが重要である．

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf|^p w\, dx\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf|^p V^{p/p_0} \cdot V^{-p/p_0} w\, dx\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf|^{p_0} V\, dx\right)^{1/p_0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (V^{-p/p_0} w)^s\, dx\right)^{1/sp} \qquad 1/s = 1 - p/p_0
\end{aligned}
$$

定理の仮定と Rf の性質と $p - p_0 < 0$ より

$$
\begin{aligned}
I &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p_0} V\, dx\right)^{1/p_0} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p_0} (\mathcal{R}f)^{p-p_0} \cdot w\, dx\right)^{1/p_0} \\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p_0} |f|^{p-p_0} \cdot w\, dx\right)^{1/p_0} = C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \cdot w\, dx\right)^{1/p_0}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

II について

$$(V^{-p/p_0} w)^s = \left(w \cdot (\mathcal{R}f)^{p-p_0}\right)^{-ps/p_0} \cdot w^s = (\mathcal{R}f)^p \cdot w.$$

だから

$$II \leq 2^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \cdot w\, dx\right)^{1/sp}. \qquad (2)$$

（1），（2）より求める結果を得る．

$p > p_0$ のときも同様の計算をする．

参考文献

［1］ P. AuscherandJ. M. Martell, *Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators. I. General operator theory and weights*. Adv. Math. **212** no. 1, pp. 225-276, 2007.

［2］ P. Auscher and J.M. Martell, *Weighted norm inequalities for fractional operators*. IndianaUniv. Math. J. **57** no. 4, pp. 1845-1869, 2008.

［3］D. Cruz-Uribe and J.M. Martell, *Extrapolation from A_∞ weights and applications*. J. Funct. Anal. **213** no. 2,

pp. 412-439, 2004.
[4] D. Cruz-Uribe and J.M. Martell, *Limited range multilinear extrapolation with applications to the bilinear Hilbert transform*. Math. Ann. **371** no. 1-2, pp. 615-653, 2018.
[5] D. Cruz-Uribe, J.M. Martell, and C. Pérez, *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia*. Operator Theory: Advances and Applications **215**. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.
[6] D. Cruz-Uribe and C. Pérez, *Two weight extrapolation via the maximal operator*. J. Funct. Anal. **174** no. 1, pp. 1-17, 2000.
[7] J. Duoandikoetxea, *Extrapolation of weights revisited:new proofs and sharp bound*. J. Funct. Anal. **260** no. 6, pp. 1886-1901, 2011.
[8] J. Duoandikoetxea and J.L. Rubiode Francia, *Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimates*. Inv. Math. **84** pp. 541-561, 1986.
[9] J. García-Cuerva and J.L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*. North-Holland Mathematics Studies, **116**. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.
[10] J. García-Cuerva, *José Luis Rubiode Francia* (*1949-1988*). Collect. Math. **38** pp. 3-15, 1987.
[11] E. Harboure, R.A. Macías and C. Segovia, *Extrapolation results for classes of weights*. Amer. J. Math. **110** no. 3, pp. 383-397, 1988.
[12] Y. Komori-Furuya, *Multilinear off-diagonal limited range extrapolations*, Math. Ineq. Appl. **26** no. 2, pp. 465-492.
[13] K. Li, J.M. Martell and S. Ombrosi, *Extrapolation for multilinear Muckenhoupt classes and applications*. Adv. Math. **373**107286, 43pp., 2020.
[14] K. Matsuoka, *Interpolation theorem between* B_0^p *and BMO*. Sci. Math. Jpn. **53** no. 3, pp. 547-554, 2001.
[15] K. Matsuoka, *Interpolation between some Banach spaces in generalized harmonic ana lysis: the real method*. Tokyo J. Math. **14** no. 1, pp. 129-134, 1991.
[16] J.L. Rubio de Francia, *Factorization and extrapolation o fweights*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **7** no. 2, pp. 393-395, 1982.
[17] J.L. Rubio de Francia, *Factorization theory and* A_p *weights*. Amer. J. Math. **106** no. 3, pp. 533-547, 1984.
[18] The work of Jose Luis Rubio de Francia I ~ IV. Publ. Mat. **35**, 1991.