関数のつくる空間と作用素のつくる空間

九州大学　綿　　谷　　安　　男

概　要

松岡勝男教授とは数理解析研究所での関数空間とその周辺関連の研究集会でお世話になりましたが，松岡教授のご退職を記念してささやかな研究ノートを寄稿させていただきます．

関数のつくる空間には色々ある．作用素のつくる空間も色々ある．実はこの二つの間には密接な関係（Calkin 対応と呼ばれる）がある．これを von Neumann 環という作用素環を通じて解説する．この Calkin 対応と渚ー綿谷の最近の共同研究である非線形トレースの理論との関連を示す．

1.　典型的な幾何学的空間と作用素環

幾何学的空間は世の中に豊富であふれているが，このノートでは,Calkin 対応にでてくる非常に典型的な次の４つしか考えない．

(1) 有限離散空間　$\Omega = \{1, 2, 3, ..., n\}$

(2) 可算無限離散空間　$\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

(3) 有限区間　$\Omega = [0, 1]$

(4) 無限区間　$\Omega = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$

これらの幾何学的空間 Ω 上の関数空間は，連続な関数からなるもの，微分可能な関数からなるもの，色々な考えがあるのだが，今回は可測な関数からなるものに限定してやることになる．その理由は，von Neumann 環という作用素環のクラスは「可測関数のつくる有界な環」の非可換化に相当し，今回はその設定で Calkin 対応を説明するためである．C^*-環という作用素環のクラスは「連続関数のつくる有界な環」の非可換化に相当するが，今回は扱わない．

さてこれらの４つの幾何学的空間に対応して，因子環 (factor) と呼ばれる作用素環の 4 つのクラスが存在し，それぞれ　I_n 型，I_∞ 型，II_1 型，II_∞ 型 と呼ばれる．因子環には実は III 型と呼ばれるものもあるのだが，今回は考えない．因子環 M の中の projection たちの次元のつくる値の全体としてこれらの幾何学的空間が復元できる．ここで，可分な Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素全体のつくる環を $B(H)$ とおく．作用素弱位相で閉じた $B(H)$ の $*$-部分環を von Neumann 環という．その中でその中心が $\mathbb{C}I$ となるものを因子環 (factor) と呼び,von Neumann 環のなかでこれ以上直和に分けられない

building block になるものである．I_n 型は簡単で n × n 行列全体のつくる行列環 $M_n(\mathbb{C})$ と思ってよい．I_∞ 型は可算無限次元の Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素全体のつくる環 $B(H)$ と思ってよい．II_1 型は関数空間 $L^\infty[0,1]$ を自然に含む因子環で, II_∞ 型は関数空間 $L^\infty[0,\infty)$ を自然に含む因子環である．

2.　有限離散空間 $\{1,2,3,...,n\}$ の場合の関数空間と作用素空間の対応

有限離散空間　$\Omega = \{1,2,3,...,n\}$ 上の関数空間とは単に有限数列空間であるベクトル空間 $V = \mathbb{C}^n$ である．V 上の典型的なノルムは $a \in \mathbb{C}^n$ に対し

$$\|a\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|, \quad \|a\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{1/2},$$

$$\|a\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty), \quad \|a\|_\infty = \max\{|a_i| \ ; \ i = 1,...,n\}$$

などがあるが，これ以外に，もう少し一般的な symmetric norm $\| \ \|$ と呼ばれているものがある．これは $V = \mathbb{C}^n$ 上の norm で, 絶対値をとっても不変で:

$$\|(|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|)\| = \|(a_1, a_2, ..., a_n)\|$$

任意の置換 $\sigma \in S_n$ で 座標を入れ替えても不変：

$$\|(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ..., a_{\sigma(n)})\| = \|(a_1, a_2, ..., a_n)\|$$

になるものである．$|a| := (|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|)$ を大きい順に並べなおしたもの

$$s(a) := (s_1(a), s_2(a), ..., s_n(a)), \quad s_1(a) \ge s_2(a) \ge s_3(a) ... \ge s_n(a)$$

を $a \in \mathbb{C}^n$ の rearrangement といい．symmetric norm とはこの rearrangement で不変な norm であるともいえる．例えば $1 \le k \le n$ となる k を一つ固定して $\|a\|_{(k)} = \sum_{i=1}^{k} s_i(a)$ のようなものがある

同様なことを $\mathbb{R}^n$ に対して考えた時はその symmetric norm のことを　gauge invariant function ともいう．

有限数列空間である関数空間 $V = \mathbb{C}^n$ に対応する作用素空間は $n \times n$ 行列全体のつくる行列環 $M_n(\mathbb{C})$ になる．$\mathbb{C}^n$ 上の一般的な symmetric norm $\| \ \|$ と行列環 $M_n(\mathbb{C})$ 上の unitarily invariant norm $||| \ |||$ の間に１：１の対応があることを von Neumann が示した ([9])．行列環 $M_n(\mathbb{C})$ 上の norm $||| \ |||$ が unitarily invariant であるとは任意の unitary $U, V \in M_n(\mathbb{C})$ と任意の $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $|||UAV||| = |||A|||$ をみたすことである．例えば行列環 $M_n(\mathbb{C})$ 上のトレース Tr を使って

$$|||A|||_1 = Tr(|A|),\quad |||A|||_2 = Tr(|A|^2)^{1/2},\quad |||A|||_p = Tr(|A|^p)^{1/p},$$

や operator norm $|||A|||_\infty$ などがある．これら以外にもある．行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ の i-th singular value を $s_i(A)$ とおくと, つまり, $|A|$ の固有値を大きい順に並べなおしたもの

$$s(A) := (s_1(A), s_2(A), ..., s_n(A)),\quad s_1(A) \geq s_2(A) \geq s_3(A)... \geq s_n(A)$$

のことである．このとき Ky-Fan k-norm

$$|||A|||_{(k)} = \sum_{i=1}^{k} s_i(A)$$

も unitarily invariant norm である．

Theorem (von Neumann [9]). $\mathbb{C}^n$ 上の symmetric norm $\|\ \|$ と行列環 $M_n(\mathbb{C})$ 上の unitarily invariant norm $|||\ |||$ の間には次のような１：１の対応がある．

(1)$\mathbb{C}^n$ 上の symmetric norm $\|\ \|$ が与えられたら,$A \in M_n(\mathbb{C})$ の unitarily invariant norm $|||A|||$ を次で決める：

$$|||A||| = \|(s_1(A), s_2(A), ..., s_n(A))\|$$

(2)$M_n(\mathbb{C})$ 上の unitarily invariant norm $|||\ |||$ が与えられたら, $a \in \mathbb{C}^n$ を対角線成分にもつ diagonal operator $diag(a_1, a_2, ..., a_n)$ を使って, $a \in \mathbb{C}^n$ の symmetric norm $\|a\|$ を次で決める：

$$\|a\| = |||diag(a_1, a_2, ..., a_n)|||$$

ここで鍵となるのは, submajorization $\prec_w$(weak majorization ともいう) の概念で

$$s(A + B) \prec_w s(A) + s(B)$$

となることが　三角不等式の証明に効いてくる．

以上の関数空間と作用素空間の対応は，有限離散空間 $\{1, 2, 3, ..., n\}$ だけでなく他の幾何学的空間である可算無限離散空間 $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ 有限区間 $\Omega = [0, 1]$, 無限区間 $\Omega = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ に対しても多くの人によって拡張されている．それを紹介する．例えば次の本 [2],[5],[10] にそれらがまとめられている．

3.　可算無限離散空間 $\mathbb{N}$ の場合の関数空間と作用素空間の対応

可算無限離散空間 $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ 上の関数空間とは単に数列空間であるベクトル空間 V ではあるが，有限離散空間の時と違い，ノルムの入れ方に応じてノルムだけでなくもちろん数列空間自身も

変動する．数列 $a = (a_n)_n$ に対して 典型的なノルムの入れ方は

$$\|a\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|, \quad \|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{1/2},$$

$$\|a\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), \quad \|a\|_\infty = \sup\{|a_i| \ ; \ i = 1, 2, 3, ...\}$$

などがあるが, それぞれのノルムの値が有限になるような数列を集めることで数列空間 $\ell^1(\mathbb{N})$, $\ell^2(\mathbb{N})$, $\ell^p(\mathbb{N})$, $\ell^\infty(\mathbb{N})$ が作れる．これ以外に 0 に収束する数列全体 $c_0(\mathbb{N})$ や有限個以外は 0 となる数列全体 $c_{00}(\mathbb{N})$ もある．$\ell^\infty(\mathbb{N})$ 対応する作用素空間は可算無限次元の Hilbert 空間 H 上有界線形作用素全体のつくる環 $B(H)$ である．これ以外はコンパクト作用素全体 $K(H)$ の部分空間に対応し, 例えば　トレース Tr を使って

$$|||A|||_1 = Tr(|A|), \quad |||A|||_2 = Tr(|A|^2)^{1/2}, \quad ||||A|||_p = Tr(|A|^p)^{1/p},$$

が有限となるコンパクト作用素 A 全体のなす Schatten class $\mathcal{C}^1(H)$, $\mathcal{C}^2(H)$ $\mathcal{C}^p(H)$ などがある．もっと一般に以下のような関数空間と作用素空間の対応（Calkin 対応）がある．

0 に収束する数列 $a = (a_n)_n \in c_0(\mathbb{N})$ に対してその絶対値からなる数列 $|a| = (|a_n|)_n \in c_0(\mathbb{N})$ を大きい順に並べ直したものを decreasing rearrangement といい,

$$s(a) := (s_1(|a|), s_2(|a|), ..., s_n(|a|), ...),$$

$$s_1(|a|) \geq s_2(|a|) \geq s_3(|a|)... \geq s_n(|a|) \geq ....$$

のことである．

Definition.　数列空間 J が *Calkin space* とは, $c_0(\mathbb{N})$ の部分ベクトル空間であって, 任意の $a \in J$ と任意の $b \in c_0(\mathbb{N})$ に対して, $s(b) \leq s(a)$ ならば $b \in J$ となるものである．同値な定義があって, 数列空間 J が *Calkin space* とは, $c_0(\mathbb{N})$ の部分ベクトル空間であって,$\ell^\infty(\mathbb{N})$ のイデアルであり, さらに置換で不変な空間といってもよい．

コンパクト作用素 A の特異値列とは $|A| = (A^*A)^{1/2}$ の固有値を重複をこめて大きい順に並べなおしたもの

$$s(A) := (s_1(A), s_2(A), ..., s_n(A), ...),$$

$$s_1(A) \geq s_2(A) \geq s_3(A)... \geq s_n(A) \geq ....$$

のことである．ただし, 有限階数の時以外は 0 を省いておく．

Theorem (Calkin [1]).　Calkin space 全体とコンパクト作用素環 $K(H)$ のイデアル全体の間には次のような全単射が存在する．

(1) Calkin space J に対して $K(H)$ のイデアル $\mathcal{J}$ を次で対応させる：

$$\mathcal{J} := \{A \in K(H) \mid s(A) \in J\}.$$

(2) $K(H)$ のイデアル $\mathcal{J}$ に対して Calkin space J を次で対応させる：

$$J = \{a \in c_0(\mathbb{N}) \mid diag(a) \in \mathcal{J}\},$$

ここで　$diag(a)$ は $a = (a_1, a_2, a_3, ...)$ を対角成分にもつ対角作用素のことである.

以上のような関数空間と作用素空間の対応（Calkin 対応）でさらにノルムまでこめての対応はかなり難しくなるが　次のような定理が知られている：

Definition.　数列空間 E が *symmetric sequence space* とは, $c_0(\mathbb{N})$ の部分ベクトル空間であって, norm $|| \ ||_E$ をもち, 任意の $a \in E$ と任意の $b \in c_0(\mathbb{N})$ に対して, $s(b) \leq s(a)$ ならば $b \in E$ となり, $||b||_E \leq ||a||_E$ をみたすことである.

Definition.　作用素空間 $\mathcal{E}$ が *symmetric operator space* とは, $K(H)$ の部分ベクトル空間であって, norm $|| \ ||_{\mathcal{E}}$ をもち, 任意の $a \in \mathcal{E}$ と任意の $b \in K(H)$ に対して, $s(b) \leq s(a)$ ならば $b \in \mathcal{E}$ となり, $||b||_{\mathcal{E}} \leq ||a||_{\mathcal{E}}$ をみたすことである.

Theorem (von Neumann-Schatten and Gohberg-Krein).　Symmetric sequence space 全体とコンパクト作用素環 $K(H)$ の symmetric operator space 全体の間には次のような全単射が存在する.

(1) Symmetric sequence space E に対して $K(H)$ の symmetric operator space $\mathcal{E}$ を次で対応させる：

$$\mathcal{E} := \{A \in K(H) \mid s(A) \in E\}, \ ||A||_{\mathcal{E}} := ||s(A)||_E$$

(2) $K(H)$ の symmetric operator space $\mathcal{E}$ に対して symmetric sequence space E を次で対応させる：

$$E = \{a \in c_0(\mathbb{N}) \mid diag(a) \in \mathcal{E}\}, \ ||a||_E := ||diag(a)||_{\mathcal{E}}$$

ここで　$diag(a)$ は $a = (a_1, a_2, a_3, ...)$ を対角成分にもつ対角作用素のことである.

Example.　Lorentz 数列空間を次で定義する：

$$E = \{a \in c_0(\mathbb{N}) \mid ||a||_E = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{\log(1+n)} \sum_{i=1}^{n} s_i(a) < \infty\}.$$

この E は symmetric sequence space で, 対応する symmetric operator ideal である Lorentz operator space $\mathcal{E}$ は次で定義される.

$$\mathcal{E} = \{A \in K(H) \mid ||A||_{\mathcal{E}} = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{\log(1+n)} \sum_{i=1}^{n} s_i(A) < \infty\}.$$

4.　有限区間 $\mathbf{\Omega} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ や無限区間 $\mathbf{\Omega} = \mathbf{R}^+ = [\mathbf{0}, \infty)$ の場合の関数空間と作用素空間の対応

この場合, 関数空間としては $L^\infty[0,1]$ や　$L^\infty[0,\infty]$ をとる．対応する作用素環は II_1 型因子環や II_∞ 型因子環である．関数 a の rearrangement はよく知られているが, コンパクト作用素 A の特異値列 $s(A)$ に対応するのは II_1 型因子環や II_∞ 型因子環 M の measurable operator A の generalized singular value function である．

M 上の　faithful normal semifinite trace を τ とする．M に付随する densely defined closed operator A が *τ-measurable* とは 任意の $\epsilon > 0$ に対して　ある projection $p \in M$ があって $p(H) \subset D(A)$ で $\tau(I-p) < \epsilon$　となることである．その全体を $\hat{M}$ とおく．さらに A が positive self-adjoint operator でそのスペクトル分解が $A = \int_0^\infty \lambda de_\lambda$ ならば trace の値も拡張できて

$$\tau(A) = \int_0^\infty \lambda d\tau(e_\lambda).$$

$1 \le p \le \infty$　に対して, 非可換 L^p-空間 $L^p(M;\tau)$ とは measurable operator A で　$||A||_p := \tau(|A|^p)^{1/p} < \infty$ となるもの全体からなる Banach 空間である．$t > 0$ に対して 固有値の連続版である正作用素 A の "generalized t-th eigenvalue " $\lambda_t(A)$ は次で定義される．

$$\lambda_t(A) := \inf\{s \ge 0 | \tau(e_{(s,\infty)}(A)) \le t\},$$

これはつぎのようにも表される：

$$\lambda_t(A) = \inf\{\|Ap\| \ ; \ p \in M : \text{ projection s.t. } \tau(I-p) \le t\}$$

さらに min-max type expression をもつ：

$$\lambda_t(A) = \inf\{ \sup_{\xi \in pH, \|\xi\|=1} < A\xi, \xi > ; \ p \in M : \text{ projection s.t. } \tau(I-p) \le t\}$$

この $(0,\infty) \ni t \mapsto \lambda_t(A) \in [0,\infty)$ は decreasing で right-continuous になる．必ずしも正でない τ-measurable operator A, に対してはその特異値の連続版である generalized t-th singular value" (i.e. s-number) $s_t(A)$ は次で定義される：$s_t(A) := \lambda_t(|A|)$. これを関数とみなして,

$$s(A) : (0,\infty) \ni t \mapsto s_t(|A|) \in [0,\infty)$$

を A の generalized singular value function とよぶ．このように固有値と特異値をその連続版に置き換えることで次のような定理が成立する．

Theorem (Kalton-Sukochev[3]). II_1 型因子環もしくは II_∞ 型因子環を M とおく．$L^\infty[0,1]$ や $L^\infty[0,\infty]$ の M への埋め込みがあり, symmetric function space 全体と M の symmetric operator

space 全体の間には次のような全単射が存在する．
(1) Symmetric function space E に対して M の symmetric operator space $\mathcal{E}$ を次で対応させる：

$$\mathcal{E} := \{A \in \hat{M} \mid s(A) \in E\},\ ||A||_{\mathcal{E}} := ||s(A)||_E$$

(2) M の symmetric operator space $\mathcal{E}$ に対して symmetric function space E を次で対応させる：II_1 型因子環の時は

$$E = \{a \in L^\infty[0,1] \mid s(a) \in \mathcal{E}\},\ ||a||_E := ||s(a)||_{\mathcal{E}}$$

II_∞ 型因子環のときは

$$E = \{a \in L^\infty[0,\infty) \mid s(a) \in \mathcal{E}\},\ ||a||_E := ||s(a)||_{\mathcal{E}}$$

5．　非加法的測度による非線形積分から作られる関数空間と非線形トレースから作られる作用素空間

非加法的測度による非線形積分を使っても色々な関数空間が構成できるが, 最近渚氏との共同研究でコンパクト環上でも非線形なトレースを使って色々な作用素空間が構成できることを研究している[6],[7],[8]．その一部を紹介する．

Definition（単調測度）集合 Ω とその上の σ-集合体もしくは集合環 (つまり, 演算 $A \cup B$ と $A \setminus B$ で閉じているもの)$\mathcal{B}$ を考える．

写像 $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ が単調測度とは次をみたすことである．

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(2) 任意の $A, B \in \mathcal{B}$ に対し, もし $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ となる．

この非加法的な単調測度 μ による Choquet 積分は次のように横切りの非線型積分として定義される．

Definition（Choquet 積分）Ω 上の非負可測関数 f の Choquet 積分を次で定義する．

$$(\mathrm{C}) \int f d\mu := \int_0^\infty \mu\{x \in \Omega \mid f(x) > t\} dt$$

非加法的測度については河邊氏によるすぐれた解説 [4] がある．

Definition $\alpha : \{0,1,2,3,\ldots,\} \to [0,\infty)$ を単調増加数列で $\alpha(0) = 0 < \alpha(1)$ を満たすものとする．$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ の有限部分集合からなる集合環を $\mathcal{B}$ とおく．α に付随する $\mathbb{N}$ 上の単調測度

$\mu_\alpha : \mathcal{B} \to [0, \infty)$ を $\mu_\alpha(A) = \alpha(^\# A), (A \in \mathcal{B})$ で定義する．すると μ_α は置換で不変になる．逆に置換で不変な単調測度で有限部分集合での値が有限となるものはみんなこんな形になる．そこでこの単調測度 μ_α による Choque 積分に対応するコンパクト環 $K(H)$ 上の Choquet 型の非線型トレース $\varphi_\alpha : K(H)^+ \to \mathbb{C}^+$ を次できめる．正のコンパクト作用素 A の固有値リストを重複度もこめて減少列で表して $\lambda(A) = (\lambda_1(A), \lambda_2(A), \lambda_3(A), \dots)$ とすると

$$\varphi_\alpha(A) := \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i(A) - \lambda_{i+1}(A))\alpha(i)$$

例えば次のような定理が成立する：

Theorem [Nagisa-W] 上で $0 < \alpha(1)$ とする．$A \in K(H)$ に対して $|||A|||_\alpha := \varphi_\alpha(|A|)$ とおく．次は同値である．

(1) α は次の意味で concave である：$\frac{\alpha(i+1)+\alpha(i-1)}{2} \leq \alpha(i)$, $(i = 1, 2,)$.

(2) $||| \; |||_\alpha$ は $\{A \in K(H) \mid |||A|||_\alpha < \infty\}$ 上のユニタリ不変ノルムである．

この Choquet 型の非線型トレース φ_α を用いて渚氏と「非線形非可換積分論」を研究中であるが, いろんな作用素空間が構成できる．例えば symmetric operator ideal である Lorentz operator space $\mathcal{E}$ もこのようにして構成できる．

References

[1] J. Calkin, *Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space*, Ann. of Math., 42 (1941), 839-873.

[2] I. Gohberg and M. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18, AMS. 1970.

[3] N. Kalton and F. Sukochev, *Symmetric norms and spaces of operators*, J. Reine Angew. Math. 621 (2008), 81-121.

[4] 河邊 淳, 非加法的測度と非線形積分, 数学, 2016, 68 巻, 3 号, p. 266-292

[5] S. Lord, F. Sukochev and D. Zanin, *Singular Traces*, De Gruyter, 2013.

[6] M. Nagisa and Y. Watatani, *Non-linear monotone positive maps*, J. Operator Theory, 87 (2022), 203-228.

[7] M. Nagisa and Y. Watatani, *Non-linear traces on matrix algebras, majorization, unitarily invariant norms and 2-positivity.*, Analysis Mathematica, 48 (2022), 1105-1126.

[8] M. Nagisa and Y. Watatani, *Non-linear traces on the algebras of compact operators and majorization*, Indag. Math. 34 (2023), 724-751.

[9] J. von Neumann, *Some matrix inequalities and metrization of matrix space*, Tomsk University Review, 1 (1937), 286-300.

[10] B. Simon, *Trace ideals and Their Applications*, Mathematical Surveys and Monographs Vo. 120, Amer. Math. Soc, 2005.