Meir-Keeler 型写像の特徴付け

千葉大学・社会科学研究院　青　山　耕　治

概　要

文献［1］で得られた Meir-Keeler 型写像の特徴付けとそれに関連する結果を報告する．

I　はじめに

$(X,\ d)$ を距離空間，R を $X \times X$ の部分集合とする．このとき，写像 $T : X \to X$ が R 上で **Meir-Keeler 型**［1］であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$(x,\ y) \in R,\ \epsilon \leq d(x,\ y) < \epsilon + \delta \Rightarrow d(Tx,\ Ty) < \epsilon$$

が成り立つときをいう．文献［1］では，推移関係をもつ完備距離空間上の Meir-Keeler 型写像の不動点定理を示し，さらに，その写像の特徴付けに関する次の結果を得た．

定理 I.1（[1, Theorem 1]）．$(X,\ d)$ を距離空間，T を X から X への写像，R を空でない $X \times X$ の部分集合とする．このとき，以下は同値である．

（1）T は R 上で Meir-Keeler 型である．

（2）任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，以下が成り立つ．

$$(x,\ y) \in R,\ d(x,\ y) < \epsilon + \delta \Rightarrow d(Tx,\ Ty) < \epsilon.$$

（3）非減少関数 $\phi : \mathbb{R}_+ \to [0,\ \infty]$ が存在して，以下が成り立つ．

$$s > 0 \Rightarrow \phi(s) > s\ ;\ (x,\ y) \in R \Rightarrow \phi(d(Tx,\ Ty)) \leq d(x,\ y). \tag{I.1}$$

（4）$(0,\ \infty)$ 上で右下半連続な関数 $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が存在して，（I.1）が成り立つ．

（5）（L）型関数 $l : (0,\ \infty) \to \mathbb{R}_+$ が存在して，以下が成り立つ．

$$(x,\ y) \in R,\ x \neq y \Rightarrow d(Tx,\ Ty) < l(d(x,\ y)).$$

（6）非減少関数 $\phi : \mathbb{R}_+ \to [0,\ \infty]$ および $(0,\ \infty)$ 上で右上半連続な関数 $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が存在して，以下が成り立つ．

$$t > 0 \Rightarrow \phi(t) > \psi(t);\ (x,\ y) \in R \Rightarrow \phi(d(Tx,\ Ty)) \leq \psi(d(x,\ y)).$$

さらに，（5）の l は非減少かつ右連続で，任意の $s > 0$ に対して $l(s) > 0$ を満たすように選ぶことができる．

Meir-Keeler 型写像は，いわゆる Meir-Keeler contraction［5］に基づいている．再び (X, d) を距離空間とするとき，写像 $T: X \to X$ が Meir-Keeler contraction［5］であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して

$$x, y \in X, \epsilon \leq d(x, y) < \epsilon + \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) < \epsilon$$

が成り立つときをいう．Meir-Keeler contraction は，縮小写像の一般化である．実際，$r \in (0, 1)$ が存在して，任意の $x, y \in X$ に対して $d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$ が成り立つとき，与えられた $\epsilon > 0$ に対して，$\delta = \epsilon(1 - r)/r$ とおけば，

$$x, y \in X, \epsilon \leq d(x, y) < \epsilon + \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq rd(x, y) < r(\epsilon + \delta) = \epsilon$$

となる．一方，Meir-Keeler contraction は必ずしも縮小写像ではないことが知られている [5, Example]．また，Meir-Keeler contraction の様々な特徴付けが知られている［4, 6, 7］.

定理I.1の（4）は, [7, Theorem 1］で提示されたMeir-Keeler contractionの特徴付けと関連している．詳しくは，［8, 註 2］を参照されたい.

文献［4］では，定理 I.1 で $R=X \times X$ のとき，(3）と（4）が同値であることを示している［4, Theorem 1］. 文献［4］について詳しくは，［8, 註 3］を参照されたい.

定理 I.1 の（5）は, [4, Theorem 1］で提示された Meir-Keeler contraction の特徴付けと関連している．[4, Theorem 1］の証明については，［6, Proposition 1］を参照するとよい.

定理 I.1 の（6）は，文献［2］の weak type contraction を一般化したものである．この weak type contraction は，Meir-Keeler contraction の一例であることが知られている [2, Theorem 5]．詳しくは，[8, 註 4] を参照されたい.

本稿の構成は次の通りである．次の第 II 節で準備をして，第 III 節で，定理 I.1 を抽象化した結果を紹介する (定理 III.1)．そして，第 IV 節では，第 III 節と文献［3］の結果の関係を説明する.

II 準 備

本稿では，$\mathbb{N}$ を正の整数の集合，$\mathbb{R}$ を実数の集合，$\mathbb{R}_+$ を非負実数の集合，$[0, \infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ とする.

関数 $l: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が（L）型であるとは，任意の $s > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$t \in [s, s + \delta] \Rightarrow l(t) \leq s$ が成り立つときをいう.

註 1.（L）型関数は，文献［4］の L- 関数（L-function）に基づいている．関数 $l: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が，［4］の意味で L- 関数であるとは，l が（L）型であり，さらに $l(0) = 0$, および，任意の $s > 0$ に対して $l(s) > 0$ が成り立つときをいう.

関数 $\phi: \mathbb{R}_+ \to [0, \infty]$ を所与とし，$\mathrm{dom}(\phi) = \{t \in \mathbb{R}_+ : \phi(t) < \infty\}$ とおく．関数 ϕ が $t_0 \in \mathrm{dom}(\phi)$ で右下半連続であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$s \in [t_0, t_0 + \delta) \Rightarrow \phi(t_0) - \epsilon < \phi(s)$ が成り立つときをいう．また，ϕ が $t_0 \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathrm{dom}(\phi)$ で右下半連続（または右連続）であるとは，任意の $M \in R$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$s \in [t_0, t_0 + \delta) \Rightarrow M < \phi(s)$ が成り立つときをいう．関数

ϕ が非減少ならば，ϕ は任意の $t \in \mathbb{R}_+$ で右下半連続である．関数 $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が $t_0 \in \mathbb{R}_+$ で右上半連続であるとは，$-\psi$ が t_0 で右下半連続であるときをいう．

関数の右下半連続性は，数列で特徴付けられる．

補助定理 II.1（[9, 補助定理 2.1]）． 関数 $\phi : \mathbb{R}_+ \to [0, \infty]$ について以下は同値である．

- ϕ は $t_0 \in \mathbb{R}_+$ で右下半連続である；
- $\{s_n\}$ が t_0 に収束する $[t_0, \infty)$ の数列ならば，$\phi(t_0) \leq \liminf_n \phi(s_n)$ である[*1]．

III Meir-Keeler 型写像の特徴付け

本節では，Meir-Keeler 型写像の特徴付けを抽象的な形でまとめた結果（定理 III.1）について説明する．

(X, d) を距離空間，T を X から X への写像，R を $X \times X$ の部分集合とし，関数 $f : R \to \mathbb{R}_+$ および $g : R \to \mathbb{R}_+$ を，$(x, y) \in R$ に対して

$$f(x, y) = d(Tx, Tx), \quad g(x, y) = d(x, y) \tag{III.1}$$

で定義する．このとき，写像 $T : X \to X$ が R 上で Meir-Keeler 型であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$(x, y) \in R, \epsilon \leq g(x, y) < \epsilon + \delta \Rightarrow f(x, y) < \epsilon$$

が成り立つことである．このように，Meir-Keeler 型写像の定義は二つの関数を用いて表される．そこで，文献 [1] では，非負値関数 f および g で表される条件に注目した次の定理を示した．

定理 III.1（[1, Theorem 2]）． K を空でない集合，f および g を K から $\mathbb{R}_+$ への関数とし，$g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ を仮定する．このとき，以下は同値である．

(1) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，以下が成り立つ．

$$u \in K, \epsilon \leq g(u) < \epsilon + \delta \Rightarrow f(u) < \epsilon.$$

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，以下が成り立つ．

$$u \in K, g(u) < \epsilon + \delta \Rightarrow f(u) < \epsilon.$$

(3) 非減少関数 $\phi : \mathbb{R}_+ \to [0, \infty]$ が存在して，以下が成り立つ．

$$s > 0 \Rightarrow \phi(s) > s ; u \in K \Rightarrow \phi(f(u)) \leq g(u). \tag{III.2}$$

(4) $(0, \infty)$ 上で右下半連続な関数 $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が存在して，(III.2) が成り立つ．

(5) (L) 型関数 $l : (0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ が存在して，以下が成り立つ．

$$u \in K, g(u) \neq 0 \Rightarrow f(u) < l(g(u)).$$

(6) 非減少関数 $\phi : \mathbb{R}_+ \to [0, \infty]$ および $(0, \infty)$ 上で右上半連続な関数 $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が存在して，以下が成り立つ．

$$s > 0 \Rightarrow \phi(s) > \psi(s) ; u \in K \Rightarrow \phi(f(u)) \leq \psi(g(u)).$$

---

*1 $\{\phi(s_n)\}$ は $[0, \infty]$ の点列である．

さらに，(5) の l は非減少かつ右連続で，任意の $s > 0$ に対して $l(s) > 0$ を満たすように選ぶことができる．

定理 III.1 の K を定理 I.1 の R とし，関数 f と g を（III.1）で定義すれば，定理 III.1 より定理 I.1 が直ちに得られる．

また，定理 III.1 の（4）は，それより弱い次の条件（4'）で置き換えられることが，次の補助定理からわかる．

（4'）$(0, \infty)$ 上で右下半連続な関数 $\phi : \mathbb{R}_+ \to [0, \infty]$ が存在して，(III.2) が成り立つ．

補助定理 III.2. K を空でない集合，f および g を K から $\mathbb{R}_+$ への関数とし，(4') を仮定する．このとき，$g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ であり，定理 III.1 の (1) が成り立つ．

証明. $u \in K, g(u) = 0$ のとき，$f(u) > 0$ とすると，(III.2) より

$$0 < f(u) < \phi(f(u)) \leq g(u) = 0$$

となり矛盾する．よって，$f(u) = 0$．つまり，$g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ である．

次に，定理 III.1 の (1) が成り立たないとすると，$\epsilon > 0$ と K の列 $\{x_n\}$ が存在して，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\epsilon \leq g(x_n) < \epsilon + 1/n$, $f(x_n) \geq \epsilon$ となる．(III.2) より，すべての $n \in N$ に対して

$$\epsilon \leq f(x_n) < \phi(f(x_n)) \leq g(x_n) < \epsilon + 1/n$$

が成り立つ．よって，$f(x_n) \to \epsilon$，$\phi(f(x_n)) \to \epsilon$ である．ϕ は ϵ で右下半連続だから，補助定理 II.1 より $\epsilon < \phi(\epsilon) \leq \liminf_n \phi(f(x_n)) = \epsilon$ となり矛盾が生じる．以上から，(1) が成り立つことが示せた．

文献 [1] に記した定理 III.1 の (3) ならば (4) の証明には修正すべき点があるので，以下に修正したものを記載する．

補助定理 III.3（[1, Lemma 6] の修正版; [8, 補助定理3.3]）． 定理III.1の (3) のもとで，定理III.1の (4) が成り立つ．

証明. [4, Theorem 1] の証明を参考にする．まず，$A = \{t \in \mathbb{R}_+ : \phi(t) = \infty\}$ とおく．$A = 0$ のときは，(3) の ϕ をそのまま使えばよいので，$A \neq 0$ としてよい．$t_0 = \inf A$ とおき，$\phi(t_0) < \infty$ と $\phi(t_0) = \infty$ の二つの場合に分けて考える．

$\phi(t_0) < \infty$ のとき，関数 $\phi_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ を次式で定義する．

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \phi(t) & t \in [0, t_0] \text{ のとき;} \\ \phi(t_0) + 2(t - t_0) & \text{上記以外のとき.} \end{cases}$$

このとき，任意の $s > 0$ に対して $\phi_1(s) > s$ である．実際，$0 < s \leq t_0$ のとき，ϕ の性質より $\phi_1(s) = \phi(s) > s$ であり，$0 \leq t_0 < s$ のとき，$\phi(t_0) \geq t_0$ に注意すると

$$\phi_1(s) = \phi(t_0) + 2(s - t_0) = (\phi(t_0) - t_0) + (s - t_0) + s > s.$$

また，ϕ_1 は非減少関数だから，ϕ_1 は $(0, \infty)$ で右下半連続である．さらに，$u \in K$ のとき，$f(u) \leq t_0$ であるから（そうでないとすると，$\infty = \phi(f(u)) \leq g(u) < \infty$ となり矛盾が生じる），したがって，任意の $u \in K$ に対して $\phi_1(f(u)) = \phi(f(u)) = \phi(f(u)) \leq g(u)$ となる．

$\phi(t_0) = \infty$ のとき，関数 $\phi_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ を次式で定義する．

$$\phi_2(t) = \begin{cases} \phi(t) & t \in [0, t_0) \text{ のとき}, \\ 2t & \text{上記以外のとき}. \end{cases}$$

このとき, 任意の $s > 0$ に対して $\phi_2(s) > s$ となることは容易に確認できる．ϕ_2 は $(0, t_0)$ で非減少で, $[t_0, \infty)$ で連続だから，$(0, \infty)$ で右下半連続である．さらに，$u \in K$ のとき，$f(u) < t_0$ であるから（そうでないとすると，$\infty = \phi(f(u)) \leq g(u) < \infty$ となり矛盾が生じる），したがって，任意の $u \in K$ に対して $\phi_2(f(u)) = \phi(f(u)) \leq g(u)$ となる． □

なお，定理 III.1 において，仮定 $g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ がないと，(1) ⇒ (2) および (6) ⇒ (2) が成り立たない [1, Example 1, Remark 3].

IV　文献 [3] の結果との関係

本節では，前節の結果と Meir-Keeler 型写像の特徴付けを抽象的な形でまとめた次の定理との関係を説明する．

定理 IV.1（[3, Theorem 2]）．$Q \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ とする．このとき，以下は同値である．

(K1) $(x, y) \in Q \Rightarrow y \leq x$ であり，かつ，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，以下が成り立つ．

$$(x, y) \in Q,\ \epsilon \leq x < \epsilon + \delta \Rightarrow y < \epsilon.$$

(K2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，以下が成り立つ．

$$(x, y) \in Q,\ x < \epsilon + \delta \Rightarrow y < \epsilon.$$

(K3) 非減少関数 $\phi : \mathbb{R}_+ \to [0, \infty]$ が存在して，以下が成り立つ．

$$s > 0 \Rightarrow \phi(s) > s;\ (x, y) \in Q \Rightarrow \phi(y) \leq x. \tag{IV.1}$$

(K4) $(0, \infty)$ 上で右下半連続な関数 $\phi : \mathbb{R}_+ \to [0, \infty]$ が存在して，(IV.1) が成り立つ．

定理 IV.1 の仮定のもとで，$K = Q$ とおき，関数 $f : K \to \mathbb{R}_+$ および $g : K \to \mathbb{R}_+$ を $(x, y) \in K$ に対して，それぞれ $f(x, y) = y$, $g(x, y) = x$ で定義する．さらに，定理 IV.1 の (K1) を仮定する．このとき，$(x, y) \in K$, $g(x, y) = 0$ ならば $x = 0$. よって，$y \leq x$ より $f(x, y) = y = 0$. ゆえに，$g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ が成り立つ．また，K, f, g について定理 III.1 の (1) が成り立つので，定理 III.1 の (2) が成り立つ．これは，定理 IV.1 の (K1) ⇒ (K2) が成り立つことを意味する．同様にして，前節の結果を使えば，定理 IV.1 のその他の同値性も得られる．

逆に，定理 IV.1 を用いて定理 III.1 の一部を得ることも可能である．実際，定理 III.1 の K, f, g が与えられたとき，$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ の部分集合

$$Q = \{(g(u), f(u)) : u \in K\}$$

を定義し，この Q に対して定理 IV.1 を使えば，定理 III.1 の一部が得られる．

参考文献

[1] K. Aoyama and M. Toyoda, *Fixed point theorem for a Meir-Keeler type mapping in a metric space with a transitive relation*, Transylv. J. Math. Mech. **14**, 2022, 1-9.
[2] L. Găvruța, P. Găvruța, and F. Khojasteh, *Two classes of meir-keeler contractions*, arXiv preprint arXiv: 1405. 5034, 2014.
[3] S. Kasahara, *A fixed point theorem of Meir-Keeler type*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **8**, 1980, 131-135.
[4] T.-C. Lim, *On characterizations of Meir-Keeler contractive maps*, Nonlinear Anal. **46**, 2001, 113-120.
[5] A. Meir and E. Keeler, *A theorem on contraction mappings*, J. Math. Anal. Appl. **28**, 1969, 326-329.
[6] T. Suzuki, *Fixed-point theorem for asymptotic contractions of Meir-Keeler type in complete metric spaces*, Nonlinear Anal. **64**, 2006, 971-978.
[7] C. S. Wong, *Characterizations of certain maps of contractive type*, Pacific J. Math. **68**, 1977, 293-296.
[8] 青山耕治，*Meir-Keeler* 型写像の不動点定理，京都大学数理解析研究所講究録 **2240**，印刷中.
[9] 青山耕治，*Meir-Keeler* 型写像の不動点定理と特徴付け，実解析学シンポジウム 2022 報告集 **53**，2023，18-23.