ウェーブレット解析の基礎

出　禾　光　夫*

概　要

本稿では，MRA(多重解像度解析) およびそれに基づくウェーブレットの構成方法について解説する．さらに，その構成方法にしたがって，いくつかの有名なウェーブレットを構成する．また，MRA に基づかないウェーブレットの例，多変数関数のウェーブレットの構成についても解説する．

1　MRA に基づくウェーブレットの構成

1.1　はじめに

本稿においては，特に断らない限り，関数として実数全体で定義された複素数値の可測関数を考える．本稿全体で用いる数式の定義などをまとめておく．

1. 原則として，記号 φ, ψ はそれぞれスケーリング関数，ウェーブレットを表す場合にのみ用いる．
2. 関数 f の Fourier 変換とその逆変換をそれぞれ以下のように表す．

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx,$$
$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

Fourier 変換については，$\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ と書くことも多い．

3. $\mathbb{R}$ で定義された関数 f と整数 j, k に対して，

$$f_{j,k}(x) = 2^{j/2}f(2^jx - k) \quad (x \in \mathbb{R})$$

と定める．

* 東京都市大学共通教育部自然科学系 (Tokyo City University, Faculty of Liberal Arts and Sciences), E-mail: izuki@tcu.ac.jp

4. 関数 $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して，L^2-内積を

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

と書く．

5. $L^2(-\pi, \pi)$ は，周期 2π の可測関数 f で，

$$\|f\|_{L^2(-\pi,\pi)} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty$$

を満たすもの全体からなる集合である．

6. 関数列 $\{g_j\}$ に対し，その有限 1 次結合で表される関数全体を $\mathrm{span}\{g_j\}$ と書く．

Fourier 変換に関連したよく用いる等式をまとめておきたい．

1. $\langle f, g \rangle_{L^2} = \dfrac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2}$ (Plancherel の定理)．
2. $\mathcal{F}[f_{j,k}](\xi) = 2^{-j/2} e^{-i\xi \cdot 2^{-j}k} \hat{f}(2^{-j}\xi)$，特に

$$\mathcal{F}[f_{0,k}](\xi) = \mathcal{F}[f(\cdot - k)](\xi) = e^{-ik\xi}\hat{f}(\xi),$$
$$2^{-j/2}\mathcal{F}[f_{j,0}](\xi) = \mathcal{F}[f(2^j \cdot)](\xi) = 2^{-j}\hat{f}(2^{-j}\xi).$$

以上を踏まえ，本稿で重要な役割を果たす関数であるウェーブレットと MRA(multi-resolution analysis, 多重解像度解析) と呼ばれる閉部分空間族を定義し，本稿の全体的な流れを説明しておきたい．

定義 1.1 (ウェーブレット)． 関数 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ がウェーブレットであるとは，$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底であることをいう．

多くの重要なウェーブレットは，MRA と呼ばれる $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間族に基づいて構成される．

定義 1.2 (MRA)． $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間族 $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ が MRA であるとは，次の 5 条件をみたすことをいう．

(I) $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ は包含関係について単調増大列である．すなわち，すべての $j \in \mathbb{Z}$ に対して，$V_j \subset V_{j+1}$ である．

(II) $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.

(III) $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$.

(IV)　各 $j \in \mathbb{Z}$ について，$f \in V_j$ と $f(2x) \in V_{j+1}$ は同値である．

(V)　ある $\varphi \in V_0$ が存在し，$\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は V_0 の正規直交基底となる．

(V) に現れる関数 φ を，MRA$\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ のスケーリング関数という．

上記の形で MRA を定義することが一般的ではあるが，実際に議論を進めていく上で次のような問題が生じる．

1. 閉部分空間族 $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ が与えられたとき，一般に (II), (III) を確認する作業が困難である．
2. 関数 φ が与えられたとき，条件 (IV), (V) に着目し，

$$V_j = \overline{\mathrm{span}\{\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}} \quad (j \in \mathbb{Z}) \tag{1.1}$$

と定めてみる．このときに $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ が MRA となるための関数 φ が満たすべきわかりやすい条件はないだろうか．

こうした問題点も踏まえ，この後の章で MRA の定義の見直しを行う．より具体的には，次が成り立つことを示す．

1. 条件 (I), (IV), (V) から (III) が導かれる．
2. 条件 (I), (IV), (V)，および φ にあるわかりやすい条件を追加すると，(II) が導かれる．

スケーリング関数 φ をもつ MRA が与えられたとき，それに基づいて

$$\psi(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \varphi(2x+m+1), \quad a_m = (-1)^m \langle \varphi_{0,m}, \varphi(\cdot/2)\rangle_{L^2} \tag{1.2}$$

と定めると，ψ はウェーブレットとなる．また，次も成立している．

1. 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して，$V_j \subset V_{j+1}$ より，V_{j+1} における V_j の直交補空間 W_j をとることができる．このとき，$\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は W_j の正規直交基底である．
2. 各 $M \in \mathbb{Z}$ に対し，$\{\varphi_{M,k}, \psi_{j,k} : j \geq M, k \in \mathbb{Z}\}$ も $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底となる．

ウェーブレットの定義から $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底であるが，これをウェーブレット基底と呼ぶことが多い．これに対し，$\{\varphi_{M,k}, \psi_{j,k} : j \geq M, k \in \mathbb{Z}\}$ は truncated wavelet basis と呼ばれている．

この後の定理 1.16 で，式 (1.2) でウェーブレットが与えられることを示す．そのために，ローパスフィルターと呼ばれる関数を導入し，V_0, V_{-1}, W_{-1}, W_0 の構造を明らかにしていく．

MRA に基づいて構成される幾つかの有名なウェーブレットの例を紹介しておきたい．ウェーブレットの定義から，もしある関数 ψ がウェーブレットであるならば，その整数による平行移動も同一視して考えることができる．このことから，スケーリング関数 φ がコンパクトな台をもつ場合は，式 (1.2) で ψ を定めた後で，適切に平行移動させることによって φ と ψ の台の位置を揃えることができる．

例 1.3. 関数 $\varphi = \chi_{[0,1)}$ に対し，$\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ を (1.1) で定める．このとき，$\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ は φ をスケーリング関数とする MRA となる．この φ から構成されるウェーブレット $\psi = \chi_{[1/2,1)} - \chi_{[0,1/2)}$ を Haar ウェーブレットという．これは最もわかりやすいウェーブレットといっても過言ではない有名な例である．特徴として，コンパクトな台をもち，連続ではないことが挙げられる．

例 1.4. 関数 $\varphi(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$ に対し，$\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ を (1.1) で定める．このとき，$\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ は φ をスケーリング関数とする MRA となる．この関数 φ は，古典的なサンプリング定理にも登場する有名な関数でもある．この φ から，ウェーブレット ψ を

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2}\chi_{(-2\pi,-\pi]\cup(\pi,2\pi]}(\xi)$$

で与えることができる．このウェーブレットを Shannon ウェーブレットという．特徴として，帯域制限であること，つまり $\hat{\psi}$ の台が有界であることが挙げられる．しかしながら，この後に登場するウェーブレットと比べると，ψ そのものの減少度はさほど良くない．

例 1.5. 帯域制限性をもち，Schwartz クラスに属する関数 φ をスケーリング関数とする MRA が存在する．この φ から構成されるウェーブレット ψ も帯域制限性をもち，Schwartz クラスに属する．このとき，φ, ψ をそれぞれ Meyer スケーリング関数，Meyer ウェーブレットという．

Meyer ウェーブレットは Schwartz クラスに属するものの，コンパクトな台をもたない．もし無限回微分可能という滑らかさと台のコンパクト性という減少度の両方を併せもつウェーブレットが存在すれば便利かもしれないが，そのようなウェーブレットは存在しない．しかしながら，Daubechies によって次のような例が構成できることが示されている．

例 1.6. 与えられた自然数 N に対し，$C^{r(N)}$ 級の滑らかさをもち，$\mathrm{supp}\varphi = [0, 2N-1]$ を満たす φ をスケーリング関数とする MRA が存在する．これに基づいて，同じく $C^{r(N)}$ 級の滑らかさをもち，$\mathrm{supp}\psi = [0, 2N-1]$ を満たすウェーブレット ψ が得られる．但し，$r(N)$ は N に関して単調増加であり，$r(N) > 0$, $r(N) \to \infty$ $(N \to \infty)$ を満たす．

1.2　ローパスフィルター

本章においては，特に断らない限り，$\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ はスケーリング関数 φ をもつ MRA であるとする．

条件 (V) より $\varphi \in V_0$ であり，さらに条件 (IV), (I) から $\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\cdot}{2}\right) \in V_{-1} \subset V_0$ である．再び条件 (V) より，$\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は V_0 の正規直交基底であるから

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi_{0,k}(x)$$

と展開できる．但し，$\alpha_k = \langle \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\cdot}{2}\right), \varphi_{0,k}\rangle_{L^2}$ である．この展開式において，両辺 Fourier 変換をと

ると

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_\varphi(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$$

となる．但し，$m_\varphi(\xi) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{-ik\xi}$ と定めた．この関数 m_φ をローパスフィルターという．m_φ が周期 2π をもつことは明らかである．また，

$$\|m_\varphi\|_{L^2(-\pi,\pi)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2\right)^{1/2} = \left\|\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\cdot}{2}\right)\right\|_{L^2} < \infty$$

より，$m_\varphi \in L^2(-\pi,\pi)$ となる．ローパスフィルターは Daubechies のウェーブレットの構成など，ウェーブレット理論におけるいくつかの場面で重要な役割を果たす．以上の議論を踏まえ，改めて定義を与えておきたい．

定義 1.7. スケーリング関数 φ に対し，

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_\varphi(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$$

を満たす関数 $m_\varphi \in L^2(-\pi,\pi)$ が存在する．この m_φ をローパスフィルターという．

ローパスフィルターは次の性質をもつ．

定理 1.8 (Smith–Barnwell の等式)**.** $|m_\varphi(\xi)|^2 + |m_\varphi(\xi+\pi)|^2 = 1$ が成立する．

この定理から，特に以下のこともわかる．

1. $m_\varphi(\xi)$ と $m_\varphi(\xi+\pi)$ は同時に 0 にならない．
2. $|m_\varphi(\xi)| \leq 1$.

定理 1.8 の証明のために，次の補題を用いる．この補題は，ここでの証明に限らず，ウェーブレット理論において様々な場面で活躍する．

補題 1.9 (Fourier 変換を用いた正規直交系の判定)**.** $g \in L^2(\mathbb{R})$ に対し，次の 2 条件は同値である．

(1) $\{g_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交系である．

(2) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi+2k\pi)|^2 = 1$.

証明. $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ に対し，$k = -k_1 + k_2$ とおく．簡単な変数変換と Plancherel の定理，および最後の等式において Lebesgue の収束定理を用いると

$$
\begin{aligned}
\langle g_{0,k_1}, g_{0,k_2}\rangle_{L^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi)\overline{\mathcal{F}[g_{0,k}](\xi)}\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi)|^2\, e^{ik\xi}\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{2j\pi}^{2(j+1)\pi} |\hat{g}(\xi)|^2\, e^{ik\xi}\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} |\hat{g}(\xi+2j\pi)|^2\, e^{ik\xi}\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi+2j\pi)|^2\right) e^{ik\xi}\,d\xi \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

が得られる．

(2) を仮定すると，(1.3) の最左辺と最右辺を比較することにより，直ちに (1) が成り立つことがわかる．

一方，(1) を仮定し，$F(\xi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi+2j\pi)|^2$ とおく．(1.3) の最左辺と最右辺を比較すると，$\delta_{0,k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)e^{ik\xi}d\xi$ となることがわかる．これは，$F(\xi)$ の Fourier 係数が 0 番目のみ 1 であり，他がすべて 0 であることを示している．したがって，$F(\xi) = 1\cdot e^{i\cdot 0\cdot\xi} = 1$ となる．[1] □

定理 1.8 の証明.　$\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は正規直交系だから，補題 1.9 より，

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(2\xi+2k\pi)|^2 = 1,\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}((\xi+\pi)+2k\pi)|^2 = 1
$$

が成り立つ．一方，$\hat{\varphi}(2\xi) = m_\varphi(\xi)\varphi(\xi)$ より，各 $k\in\mathbb{Z}$ に対して

$$
|\hat{\varphi}(2\xi+2k\pi)|^2 = |m_\varphi(\xi+k\pi)|^2\, |\hat{\varphi}(\xi+k\pi)|^2
$$

となる．これと m_φ の周期性より，

[1] ここで用いた Fourier 級数についての議論は，[1, 定理 A6, 275 ページ] で詳しく解説されている．

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_\varphi(\xi + k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + k\pi)|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_\varphi(\xi + 2k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 \\
&\qquad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_\varphi(\xi + (2k+1)\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + (2k+1)\pi)|^2 \\
&= |m_\varphi(\xi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 + |m_\varphi(\xi+\pi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + (2k+1)\pi)|^2 \\
&= |m_\varphi(\xi)|^2 + |m_\varphi(\xi+\pi)|^2
\end{aligned}
$$

を得る． □

1.3 V_0, V_{-1}, W_{-1}, W_0 の構造

本章では，ウェーブレットの構成のために必要となる 4 つの閉部分空間の構造を明らかにしていく．

定理 1.10 (V_0 の構造)**.** $V_0 = \left\{\mathcal{F}^{-1}[\ell\hat{\varphi}] : \ell \in L^2(-\pi,\pi)\right\}$.

証明. $g \in V_0$ を任意にとると，$g(x) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\varphi_{0,k}(x)$ と展開することができる．両辺 Fourier 変換をとると，$\hat{g}(\xi) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi}\hat{\varphi}(\xi)$ となる．したがって，$\ell(\xi) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi}$ とおくと，$g \in \left\{\mathcal{F}^{-1}[\ell\hat{\varphi}] : \ell \in L^2(-\pi,\pi)\right\}$ であることが示される．

逆に，$\ell \in L^2(-\pi,\pi)$ を任意にとり，$g = \mathcal{F}^{-1}[\ell\hat{\varphi}]$ とおく．$\ell(\xi) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{-ik\xi}$ と展開し，上の議論の逆をたどれば，g が V_0 の正規直交基底 $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ で展開できることがわかるので，$g \in V_0$ が得られる． □

定理 1.10 を使うと，定理 1.11 を簡単に示すことができる．

定理 1.11 (V_{-1} の構造)**.** $V_{-1} = \left\{\mathcal{F}^{-1}\left[m(2\,\cdot)\hat{\varphi}(2\cdot)\right] : m \in L^2(-\pi,\pi)\right\}$.

証明. $f \in V_{-1}$ を任意にとると，$f(2\cdot) \in V_0$ である．定理 1.10 より，ある $\ell \in L^2(-\pi,\pi)$ を用いて，$f(2x) = \mathcal{F}^{-1}[\ell\varphi](x)$ と書くことができる．両辺 Fourier 変換をとると，$\dfrac{1}{2}\hat{f}\left(\dfrac{\xi}{2}\right) = \ell(\xi)\varphi(\xi)$ となる．

これより，$\hat{f}(\xi) = 2\ell(2\xi)\hat{\varphi}(2\xi)$ となり，$f \in \left\{\mathcal{F}^{-1}\left[m(2\cdot)\hat{\varphi}(2\cdot)\right] : m \in L^2(-\pi,\pi)\right\}$ が成立する．

一方，$m \in L^2(-\pi,\pi)$ を任意にとり，$g = \mathcal{F}^{-1}[m(2\cdot)\hat{\varphi}(2\cdot)]$ とおく．両辺 Fourier 変換をとると，$\hat{g}(\xi) = m(2\xi)\hat{\varphi}(2\xi)$ となり，$\hat{g}\left(\dfrac{\xi}{2}\right) = m(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ を得る．よって，定理 1.10 より，$\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{g}\left(\dfrac{\cdot}{2}\right)\right] \in V_0$ となる．これより，$2g(2\cdot) \in V_0$，すなわち $g \in V_{-1}$ が得られる．□

V_0, V_{-1} の構造から，次が導かれる．[2]

定理 1.12 (W_{-1} の構造)**.**

$$W_{-1} = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = e^{i\xi}s(2\xi)\overline{m_\varphi(\xi+\pi)}\hat{\varphi}(\xi),\ s \in L^2(-\pi,\pi)\right\}.$$

証明. まずは $f \in W_{-1}$ を任意にとり，f が右側の集合に属することを示す．$W_{-1} \subset V_0$ より，$f \in V_0$ である．よって V_0 の構造より，ある $\ell \in L^2(-\pi,\pi)$ を用いて，$f = \mathcal{F}^{-1}[\ell\varphi]$ と表すことができる．一方，$m \in L^2(-\pi,\pi)$ を任意にとり，$g = \mathcal{F}^{-1}[m(2\cdot)\hat{\varphi}(2\cdot)]$ とおくと，V_{-1} の構造から $g \in V_{-1}$ である．したがって，f と g は直交する．これと，Plancherel の定理，$\hat{\varphi}(2\cdot) = m_\varphi\hat{\varphi}$，$\ell, m, m_\varphi$ の周期性，および補題 1.9 より

$$\begin{aligned}
0 &= 2\pi\langle f, g\rangle_{L^2} \\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}^{-1}[\ell\varphi](x)\overline{\mathcal{F}^{-1}[m(2\cdot)\hat{\varphi}(2\cdot)](x)}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\ell(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\overline{m(2\xi)m_\varphi(\xi)\hat{\varphi}(\xi)}\,d\xi \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi+2k\pi}^{\pi+2k\pi}|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,\ell(\xi)\overline{m(2\xi)m_\varphi(\xi)}\,d\xi \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|\hat{\varphi}(\xi+2k\pi)|^2\,\ell(\xi)\overline{m(2\xi)m_\varphi(\xi)}\,d\xi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\ell(\xi)\overline{m(2\xi)m_\varphi(\xi)}\,d\xi
\end{aligned}$$

が得られる．さらに，最右辺において，積分区間を $[-\pi,0]$, $[0,\pi]$ の 2 つに分け，被積分関数の周期性に注目して置換積分することによって

$$0 = \int_{-\pi}^{0}\overline{m(2\xi)}\left\{\ell(\xi)\overline{m_\varphi(\xi)} + \ell(\xi+\pi)\overline{m_\varphi(\xi+\pi)}\right\}\,d\xi$$

を得る．定理 1.8 より，$m_\varphi(\xi)$ と $m_\varphi(\xi+\pi)$ が同時に 0 にならないことに注意して，関数 λ を

[2] 4 つの構造の証明の中では，W_{-1} が一番大変かもしれない．

$$\lambda(\xi+\pi)=\begin{cases}-\dfrac{\ell(\xi)}{\overline{m_\varphi(\xi+\pi)}} & (\xi\in\{\xi : m_\varphi(\xi)=0\})\\ \dfrac{\ell(\xi+\pi)}{\overline{m_\varphi(\xi)}} & (\xi\in\{\xi : m_\varphi(\xi)\neq 0\})\end{cases}$$

によって定める．このとき，次が成立する：

1. $\ell(\xi)=\ell(\xi+2\pi)=\lambda(\xi+2\pi)\overline{m_\varphi(\xi+\pi)}$.
2. $\ell(\xi+\pi)=\lambda(\xi+\pi)\overline{m_\varphi(\xi)}$.
3. $\lambda(\xi)=-\lambda(\xi+\pi)=\lambda(\xi+2\pi)$.

特に，λ は周期 2π であり，さらに

$$\begin{aligned}|\lambda(\xi)|^2&=|\lambda(\xi)|^2\left(\overline{|m_\varphi(\xi)|^2+|m_\varphi(\xi+\pi)|^2}\right)\\&=\left|\lambda(\xi+\pi)\overline{m_\varphi(\xi)}\right|^2+\left|\lambda(\xi+2\pi)\overline{m_\varphi(\xi+\pi)}\right|^2\\&\leq|\ell(\xi+\pi)|^2+|\ell(\xi)|^2\end{aligned}$$

より，$\lambda\in L^2(-\pi,\pi)$ であることがわかる．したがって，$s(\xi)=e^{-i\xi/2}\lambda(\xi/2)$ と定めると，$s\in L^2(-\pi,\pi)$ となる．また，$\lambda(\xi)=e^{i\xi}s(2\xi)$ より，$\ell(\xi)=e^{i\xi}s(2\xi)\overline{m_\varphi(\xi+\pi)}$ と表される．ゆえに，f が結論の右側の集合に属することがわかる．

一方，逆に右側の集合に属する関数が W_{-1} に属することを示す．$s\in L^2(-\pi,\pi)$ を任意にとり，関数 f を $\hat{f}(\xi)=e^{i\xi}s(2\xi)\overline{m_\varphi(\xi+\pi)}\hat{\varphi}(\xi)$ によって定める．$\ell(\xi)=e^{i\xi}s(2\xi)\overline{m_\varphi(\xi+\pi)}$ とおくと，$\ell\in L^2(-\pi,\pi)$ であり，$\hat{f}=\ell\hat{\varphi}$ と表せる．よって，V_{-1} の構造より，$f\in V_0$ であることがわかる．したがって，$g\in V_{-1}$ を任意にとり，f と g が直交することを示せば $f\in W_{-1}$ であることが証明される．V_{-1} の構造より，ある $m\in L^2(-\pi,\pi)$ を用いて，$\hat{g}(\xi)=m(2\xi)\hat{\varphi}(2\xi)=m(2\xi)m_\varphi(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ と表せる．Plancherel の定理より，

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{L^2}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi\\&=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,\overline{m_\varphi(2\xi)m_\varphi(\xi)}H(\xi)\,d\xi\end{aligned}$$

を得る．但し，$H(\xi)=\dfrac{1}{2\pi}e^{i\xi}s(2\xi)\overline{m(2\xi)}$ である．H は $H(\xi-\pi)=-H(\xi)$ を満たし，周期 2π をもつ．m_φ と H の周期性および補題 1.9 より

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \overline{m_\varphi(2\xi) m_\varphi(\xi)} H(\xi)\, d\xi \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi+2k\pi}^{\pi+2k\pi} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \overline{m_\varphi(2\xi) m_\varphi(\xi)} H(\xi)\, d\xi \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 \overline{m_\varphi(2\xi) m_\varphi(\xi)} H(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{m_\varphi(2\xi) m_\varphi(\xi)} H(\xi)\, d\xi
\end{aligned}
$$

を得る．最右辺において，積分区間を $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$ の 2 つに分け，被積分関数の周期性に注目して置換積分すると，この定積分の値が 0 になることがわかる．ゆえに，$\langle f, g \rangle_{L^2} = 0$ が導かれる． □

W_{-1} の構造から W_0 の構造を得るために，両者の関係を調べておきたい．そのために，各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して，作用素

$$J_j f(x) = f(2^j x)$$

を導入する．すべての $j \in \mathbb{Z}$ に対して，$2^{j/2} J_j$ は $L^2(\mathbb{R})$ 上で等長である．また，MRA の定義 (IV) より，$J_j(V_0) = V_j$, $J_j(V_1) = V_{j+1}$ が成り立つことに注意しておく．

補題 1.13 (W_j の構成)**.** 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して，次が成り立つ．

(1) $W_j = J_j(W_0)$.

(2) $g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して，$g \in W_0$ と $J_j g = g(2^j \cdot) \in W_j$ は同値である．

証明. (2) は (1) から簡単に導かれるので，(1) のみ証明を与える．J_j の性質より，

$$V_{j+1} = J_j(V_1) = J_j(V_0 \oplus W_0) = J_j(V_0) \oplus J_j(W_0) = V_j \oplus J_j(W_0)$$

と分解できる．直交補空間の一意性より，$J_j(W_0) = W_j$ が成り立つ． □

W_{-1} の構造と補題 1.13 より，W_0 の構造が容易に導かれる．

定理 1.14 (W_0 の構造)**.**

$$W_0 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \,:\, \hat{f}(2\xi) = e^{i\xi} s(2\xi) \overline{m_\varphi(\xi + \pi)} \hat{\varphi}(\xi),\ s \in L^2(-\pi, \pi) \right\}.$$

W_j の構成 (補題 1.13) に対し，V_j については次が成り立つ．

補題 1.15 (V_j の構成)**.** 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して，$\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は V_j の正規直交基底である．

証明. 任意の $g \in V_j$ に対して，(IV) より，$g(2^{-j} \cdot) \in V_0$ である．(V) より，$\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は V_0 の正規直交基底なので，$g(2^{-j}x) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle g(2^{-j} \cdot), \varphi_{0,k} \rangle_{L^2} \varphi_{0,k}(x)$ と展開することができる．これを変形す

ると，$g(x)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle g,\varphi_{j,k}\rangle_{L^2}\varphi_{j,k}(x)$ となる．この展開式の成立より，$\{\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が V_j の正規直交基底であることがわかる． □

1.4　スケーリング関数からウェーブレットへ

前節までの内容をまとめると，MRA が与えられたとき，そのスケーリング関数 φ からウェーブレット ψ を直接定める式が得られる．

定理 1.16 (φ から ψ へ)**.**　$\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ をスケーリング関数 φ をもつ MRA とし，m_φ をそのローパスフィルターとする．また，ν は周期 2π の可測関数で，$|\nu|=1$ を満たすとする．このとき

$$\hat{\psi}(\xi)=e^{\frac{i\xi}{2}}\nu(\xi)\overline{m_\varphi\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \tag{1.4}$$

によって関数 ψ を定めると，次が成り立つ．

(1) $\psi\in W_0$ である．

(2) 各 $j\in\mathbb{Z}$ に対し，$\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は W_j の正規直交基底である．

(3) ψ はウェーブレットである．すなわち，$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底である．

(4) 各 $M\in\mathbb{Z}$ に対し，$\{\varphi_{M,k},\psi_{j,k}\ :\ j\geq M, k\in\mathbb{Z}\}$ も $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底となる．

注意 1.17.　(1.4) において $\nu\equiv 1$ ととれば，(1.2) が得られる．

定理 1.16 (3) (4) の証明のために，次の補題を準備しておく．

補題 1.18.　$\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ を MRA とし，各 $j\in\mathbb{Z}$ に対して，V_{j+1} における V_j の直交補空間を W_j とする．このとき，次が成立する．

(1) 各 $j\in\mathbb{Z}$ に対して，$V_{j+1}=\displaystyle\bigoplus_{l=-\infty}^{j}W_l$.

(2) $L^2(\mathbb{R})=\displaystyle\bigoplus_{l=-\infty}^{\infty}W_l$.

証明. [3]　(1), (2) ともに，$\supset$ の成立は明らかである．$\subset$ の成立を示すには，直交補空間に注目し，以下を示せばよい：

---

[3] 以下の議論は厳密性を欠いた直感的なものであるが，直交分解と条件 (I), (II), (III) より，(1), (2) の等式の成立がごく自然に解釈できる：V_{j+1} の直交分解を繰り返していくと，最終的には (I), (III) より $V_{j+1}=W_j\oplus V_j=W_j\oplus(W_{j-1}\oplus V_{j-1})=\cdots=\displaystyle\bigoplus_{l=-\infty}^{j}W_l$ が得られそうである．さらに，最左辺と最右辺において $j\to\infty$ とすれば，(II) より $L^2(\mathbb{R})=\displaystyle\bigoplus_{l=-\infty}^{\infty}W_l$ も成り立つのではないかと予想できる．

(1)' $V_{j+1} \ominus \bigoplus_{l=-\infty}^{j} W_l = \{0\}$.

(2)' $\left(\bigoplus_{l=-\infty}^{\infty} W_l \right)^{\perp} = \{0\}$.

(1)', (2)' が示されれば，(1), (2) がそれぞれ成り立つ．

まずは，(1)' を示す．任意の $f \in V_{j+1} \ominus \bigoplus_{l=-\infty}^{j} W_l$ に対し，$f \in V_{j+1} \ominus W_j = V_j$ である．さらに，$f \in V_j \ominus W_{j-1} = V_{j-1}$ となる．これを繰り返していくと，$f \in \bigcap_{l=-\infty}^{j} V_l = \bigcap_{l=-\infty}^{\infty} V_l = \{0\}$ を得る．

次に，(2)' を示す．任意の $f \in \left(\bigoplus_{l=-\infty}^{\infty} W_l \right)^{\perp}$ に対して，$f \in L^2(\mathbb{R})$ である．よって，(II) より，$\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ が存在し，$\|f_m - f\|_{L^2} \to 0\ (m \to \infty)$ が成り立つ．ここで各 m に対し，$f_m \in V_{j_m}$ を満たす $j_m \in \mathbb{Z}$ をとる．(1) より，$f_m \in \bigoplus_{l=-\infty}^{j_m - 1} W_l \subset \bigoplus_{l=-\infty}^{\infty} W_l$ であるから，f と f_m は直交することがわかる．このことから

$$\|f_m - f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}^2 + \|f_m\|_{L^2}^2 \geq \|f\|_{L^2}^2$$

となり，$m \to \infty$ とすると，最左辺は 0 に収束する．したがって，$\|f\|_{L^2} = 0$，すなわち $f = 0$ が導かれる．　□

定理 1.16 の証明.

(1)　ψ の定義と W_0 の構造より，$\psi \in W_0$ であることは容易にわかる．

(2)　(i) まず，$\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が正規直交系であることを示す．スケーリング関数 φ に対して補題 1.9 を用いることにより

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\hat{\psi}(\xi+2k\pi)\right|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| e^{i(\xi+2k\pi)/2}\nu(\xi+2k\pi)\overline{m_\varphi\left(\frac{\xi+2k\pi}{2}+\pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+2k\pi}{2}\right)\right|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+k\pi\right)\right|^2 \left|m_\varphi\left(\frac{\xi}{2}+(k+1)\pi\right)\right|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+2k\pi\right)\right|^2 \left|m_\varphi\left(\frac{\xi}{2}+(2k+1)\pi\right)\right|^2 \\
&\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+(2k+1)\pi\right)\right|^2 \left|m_\varphi\left(\frac{\xi}{2}+(2k+2)\pi\right)\right|^2 \\
&= \left|m_\varphi\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)\right|^2 + \left|m_\varphi\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

を得る．関数 ψ に対して補題 1.9 を用いると，$\{\psi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が正規直交系であることがわかる．

(ii) 次に，$g \in W_0$ を任意にとり，g が $\{\psi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ によって展開できることを示す．W_0 の構造から，ある $s \in L^2(-\pi,\pi)$ を用いて，

$$
\hat{g}(\xi) = e^{\frac{i\xi}{2}} s(\xi)\overline{m_\varphi\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)
$$

と表すことができる．$|\nu(\xi)|=1$ より，特に $\nu(\xi)\neq 0$ であるので，$\hat{g} = \dfrac{s}{\nu}\cdot\hat{\psi}$ と書くことができる．ここで，$\dfrac{s}{\nu} \in L^2(-\pi,\pi)$ であるから，その Fourier 級数展開を $\dfrac{s(\xi)}{\nu(\xi)} = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi}$ と表すことができる．したがって，$\hat{g}(\xi) = \left(\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi}\right)\hat{\psi}(\xi)$ となり，両辺の逆 Fourier 変換をとると，$g(x) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \psi_{0,k}(x)$ が得られる．

(iii) (i), (ii) より，$\{\psi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は W_0 の正規直交基底となる．さらに，各 $j\in\mathbb{Z}$ に対し，$\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が W_j の正規直交基底であることを示す．任意の $g \in W_j$ に対し，W_j の構成から，$g(2^{-j}\cdot) \in W_0$ である．$\{\psi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は W_0 の正規直交基底であるから，

$$
g(2^{-j}x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle g(2^{-j}\cdot), \psi_{0,k}\rangle_{L^2}\psi_{0,k}(x)
$$

と展開できる．$2^{-j}x$ を x に置き換え，右辺の級数の中身を変形することにより

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle g, \psi_{j,k} \rangle_{L^2} \psi_{j,k}(x)$$

を得る．したがって，$\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は W_j の正規直交基底である．

(3) 定理 1.16 (2) と補題 1.18 (2) より示される．

(4) 補題 1.18 より，

$$L^2(\mathbb{R}) = \left(\bigoplus_{l=M}^{\infty} W_l \right) \oplus \left(\bigoplus_{l=-\infty}^{M-1} W_l \right) = \left(\bigoplus_{l=M}^{\infty} W_l \right) \oplus V_M$$

であるから，定理 1.16 (2) と補題 1.15 より結論を得る．

□

1.5　MRA の定義の見直し

定理 1.19 ((III) が成立するための十分条件)**.**　$L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間族 $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ が MRA の定義 1.2 の 5 条件のうち (I), (IV), (V) を満たすならば，(III) が成立する．

証明.　$f \in \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ を任意にとり，$f = 0$ となることを示す．$j, l \in \mathbb{Z}$ を任意にとる．l を固定し，

$$F(x) := 2^{l/2} f(2^l x), \quad F_j(x) := 2^{j/2} F(2^j x) = 2^{(j+l)/2} f(2^{j+l} x)$$

と書くことにする．$f \in V_{-j-l}$ および条件 (IV) より $F_j \in V_0$ であり，$\|F_j\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ も成り立つ．また，条件 (V) より，$F_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle F_j, \varphi_{0,k} \rangle_{L^2} \varphi_{0,k}$ と展開することができる．この両辺の Fourier 変換から，$\hat{F}(\xi) = 2^{j/2} m_j(2^j \xi) \hat{\varphi}(2^j \xi)$ が得られる．但し，$m_j(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle F_j, \varphi_{0,k} \rangle_{L^2} e^{-ik\xi}$ と定めた．m_j は周期 2π をもち，また，$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |m_j(\xi)|^2 d\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle F_j, \varphi_{0,k} \rangle_{L^2}|^2 = \|f\|_{L^2}^2 < \infty$ を満たすので，$m_j \in L^2(-\pi, \pi)$ である．Schwarz の不等式により

$$\begin{aligned} \int_{2\pi}^{4\pi} \left| \hat{F}(\xi) \right| d\xi &\leq 2^{j/2} \left(\int_{2\pi}^{4\pi} \left| \hat{\varphi}(2^j \xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{2\pi}^{4\pi} \left| m_j(2^j \xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{2^{j+1}\pi}^{2^{j+2}\pi} \left| \hat{\varphi}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(2^{-j} \int_{2^{j+1}\pi}^{2^{j+2}\pi} \left| m_j(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

が得られる．ここで，後半の積分については

$$\begin{aligned}
2^{-j}\int_{2^{j+1}\pi}^{2^{j+2}\pi} |m_j(\xi)|^2\,d\xi &= 2^{-j}\sum_{l=0}^{2^j-1}\int_{2^{j+1}\pi+2l\pi}^{2^{j+1}\pi+2l\pi+2\pi} |m_j(\xi)|^2\,d\xi \\
&= 2^{-j}\sum_{l=0}^{2^j-1}\int_0^{2\pi} |m_j(\xi)|^2\,d\xi \\
&= 2\pi\|f\|_{L^2}^2 \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

となる．よって，(1.5), (1.6) より

$$\int_{2\pi}^{4\pi}\left|\hat{F}(\xi)\right| d\xi \le \left(\int_{2^{j+1}\pi}^{\infty}|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}\cdot\sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2}$$

となり，右辺の積分は，$j\to\infty$ とすれば 0 に収束する．したがって，$\hat{F}(\xi)=0$ $(\xi\in[2\pi,4\pi])$ が導かれる．同様に，$\hat{F}(\xi)=0$ $(\xi\in[-4\pi,-2\pi])$ も成り立つ．つまり，$2\pi\le|\xi|\le 4\pi$ に対して

$$0=\hat{F}(\xi)=\mathcal{F}[2^{l/2}f(2^l\cdot)](\xi)=2^{-l/2}\hat{f}(2^{-l}\xi)$$

が成立するので，$\hat{f}(\eta)=0$ $(2^{-l}\cdot 2\pi\le|\eta|\le 2^{-l}\cdot 4\pi)$ となる．したがって，l の任意性より $\hat{f}=0$ となり，$f=0$ が導かれる． □

定理 1.20 ((II) が成立するための十分条件)**.** $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間族 $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ が MRA の定義 1.2 の 5 条件のうち (I), (IV), (V) および次の条件

(VI) ある $a>0$ が存在し，$\hat{\varphi}(\xi)\ne 0$ $(|\xi|<a)$.

を満たすとする．このとき，(II) が成立する．

証明. $L=\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}V_j}$ とおき，$f\in L$ を任意にとる．

(1) まず，任意の $\ell, m\in\mathbb{Z}$ に対して，$f(\cdot+2^{-\ell}m)\in L$ であることを示す．L の定義より，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $N\in\mathbb{Z}$, $h\in V_N$ が存在し，$\|f-h\|_{L^2}<\varepsilon$ が成り立つ．条件 (I) より，$j\ge N$ を満たすすべての $j\in\mathbb{Z}$ に対して，$h\in V_j$ である．よって，補題 1.15 (V_j の構成) より，$h(x)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{j,k}\varphi_{j,k}(x)$ と展開でき，右辺の級数は L^2-ノルムに関して収束している．ここで，$j\ge\max\{N,\ell\}$ を満たす $j\in\mathbb{Z}$ と各 $k\in\mathbb{Z}$ に対して，$Z(j,k)=-2^{j-\ell}m+k$ とおくと，$Z(j,k)\in\mathbb{Z}$ であり，$h(x+2^{-\ell}m)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{j,k}\varphi_{j,Z(j,k)}(x)$ と表せる．したがって，

$h(\cdot + 2^{-\ell}m) \in V_j$ となる．さらに，$\|f(\cdot + 2^{-\ell}m) - h(\cdot + 2^{-\ell}m)\|_{L^2} = \|f - h\|_{L^2} < \varepsilon$ より，$f(\cdot + 2^{-\ell}m) \in L$ が得られる．

(2) 次に，任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して，$f(\cdot + y) \in L$ であることを示す．[4] $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$f \in L^2(\mathbb{R})$ より，$\|f - s\|_{L^2} < \varepsilon$ を満たす単関数 s をとることができる．一方，集合 $\{2^{-\ell}m : \ell, m \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{R}$ で稠密であるから，$\left|y - 2^{-\ell}m\right|$ が十分小さくなるように $\ell, m \in \mathbb{Z}$ をとると，$\|s(\cdot + y) - s(\cdot + 2^{-\ell}m)\|_{L^2} < \varepsilon$ が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}
&\|f(\cdot + y) - f(\cdot + 2^{-\ell}m)\|_{L^2} \\
&\le \|f(\cdot + y) - s(\cdot + y)\|_{L^2} + \|s(\cdot + y) - s(\cdot + 2^{-\ell}m)\|_{L^2} \\
&\qquad + \|s(\cdot + 2^{-\ell}m) - f(\cdot + 2^{-\ell}m)\|_{L^2} \\
&= 2\|f - s\|_{L^2} + \|s(\cdot + y) - s(\cdot + 2^{-\ell}m)\|_{L^2} \\
&< 3\varepsilon
\end{aligned}$$

が得られる．(1) より $f(\cdot + 2^{-\ell}m) \in L$ であるから，$f(\cdot + y) \in L$ であることがわかる．

(3) 最後に，$L^\perp = \{0\}$ を示す．そのために，$g \in L^\perp$ を任意にとり，$g = 0$ であることを示す．$y \in \mathbb{R}$ を任意にとると，(2) より $f(\cdot + y) \in L$ であるから，$f(\cdot + y)$ と g は直交する．したがって

$$\begin{aligned}
0 &= \langle f(\cdot + y), g\rangle_{L^2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(\cdot + y)](\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\xi}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}\,\overline{\hat{g}}\right](y)
\end{aligned}$$

が得られる．よって，$\hat{f}\,\overline{\hat{g}} = 0$ となる．いま，$j \in \mathbb{Z}$ を任意にとると，$\varphi_{j,0} \in V_j \subset L$ である．以下，$f = \varphi_{j,0}$ として考える．条件 (VI) より，$\hat{f}(\xi) = 2^{-j/2}\hat{\varphi}(2^{-j}\xi) \neq 0$ $(|\xi| < 2^j a)$ であるから，$\hat{g}(\xi) = 0$ $(|\xi| < 2^j a)$ となる．$j \in \mathbb{Z}$ の任意性より，$\mathbb{R}$ 上ほとんでいたる所で $\hat{g} = 0$，すなわち $g = 0$ となる． □

注意 1.21. 条件 (VI) を認めると，$0 \neq \hat{\varphi}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx$ となる．一般に，スケーリング関数 φ は $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \lambda$ (λ は絶対値が 1 の複素定数) を満たすことが知られている．それに対し，MRA に

[4] (2) の証明は [3, 補題 6.6] を参考にした．$\mathbb{R}$ の開区間の特性関数の 1 次結合，すなわち，$\displaystyle\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu \chi_{I_\nu}(x)$ (各 I_ν は開区間，a_ν は定数) の形で表される関数を単関数という．

基づいて構成される多くのウェーブレットが $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,dx = 0$ を満たすことも知られている．

2　有名なウェーブレットの例

これまでの内容を踏まえて，1 章で挙げた例のうち，3 つの例を見直していきたい．それぞれスケーリング関数の候補となる関数 φ を用いて，$L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間族 $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ を (1.1) で定める．このとき，$\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ が MRA の各条件を満たすことを確認する．MRA の定義 1.2 の 5 条件すべてを確認する作業は，定理 1.19 および定理 1.20 によって簡略化することができる．この $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ がスケーリング関数 φ をもつ MRA であることが示されたら，式 (1.4) あるいは (1.2) によって，ウェーブレット ψ が得られる．

2.1　Haar ウェーブレット

関数 $\varphi = \chi_{[0,1)}$ を用いて，(1.1) によって閉部分空間族 $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ を定める．これが MRA の定義 1.2 の 5 条件のうち，(I), (IV), (V) および定理 1.20 の条件 (VI) を満たすことを確かめておこう．

(I) 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して，$V_j \subset V_{j+1}$ が成り立つことを示す．ここでは，$\varphi = \chi_{[0,1)}$ の性質を利用した証明を与える．

$f \in V_j$ に対し，$f = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\varphi_{j,k}$ と展開することができる．一方，$\varphi = \chi_{[0,1)}$ より，$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1)$ が成り立つ．これより，各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して，$\varphi_{j,k} = 2^{-1/2}(\varphi_{j+1,2k} + \varphi_{j+1,2k+1})$ となる．したがって，f を $\{\varphi_{j+1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ を用いて展開できることがわかるので，$f \in \overline{\mathrm{span}\{\varphi_{j+1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}} = V_{j+1}$ が得られる．

(IV) 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して，$f \in V_j$ と $f(2x) \in V_{j+1}$ が同値であることは，V_j の定義式 (1.1) から明らかである．

(V) $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が V_0 の正規直交基底であることを示す．各 V_j の定義式 (1.1) から，$\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が V_0 の基底であることは明らかなので，正規直交系であることのみを示せば十分である．

各 $k, l \in \mathbb{Z}$ に対し，$\varphi_{0,k}\overline{\varphi_{0,l}} = \chi_{[k,k+1)}\chi_{[l,l+1)} = \delta_{k,l}\chi_{[k,k+1)}$ である．よって，L^2-内積をとれば，$\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が正規直交系であることが直ちにわかる．

(VI) $\varphi = \chi_{[0,1)}$ の Fourier 変換を求めると，

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_0^1 e^{-ix\xi}dx = \begin{cases} 1 & (\xi = 0) \\ e^{-\frac{i\xi}{2}} \cdot \dfrac{\sin\frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}} & (\xi \neq 0) \end{cases} \tag{2.1}$$

となる．したがって，$\hat{\varphi}(\xi) \neq 0$ $(|\xi| < 2\pi)$ が成り立つ．

よって，$\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ は $\varphi = \chi_{[0,1)}$ をスケーリング関数とする MRA となる．この φ を用いて，式 (1.2) によって得られる ψ を適切に平行移動することで，Haar ウェーブレット $\psi = \chi_{[1/2,1)} - \chi_{[0,1/2)}$ が得られる．

2.2　Shannon ウェーブレット

関数 $\varphi(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$ を用いて，(1.1) によって閉部分空間族 $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ を定める．このとき，条件 (I), (IV), (V), (VI) が成り立つことを示そう．先に

$$\hat{\varphi} = \chi_{(-\pi,\pi]}$$

であることに注意しておくと各条件の確認が楽になる．直接 $\varphi(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$ の Fourier 変換を計算してもかまわないが，Haar ウェーブレットの場合の計算結果 (2.1) を利用し，これを適切に変数変換することで求めることもできる．

(I) 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して，$V_j \subset V_{j+1}$ が成り立つことを示す．V_j の定義式 (1.1) から，任意の $l \in \mathbb{Z}$ に対して，$\varphi_{j,l} \in \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{j+1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}}$ であることを示せば十分である．まずは，ローパスフィルターの候補 [5] となる関数 m_φ を求めておきたい．関数 m_φ を，周期 2π で，

$$m_\varphi(\xi) = \chi_{(-\pi,\pi]}(2\xi) = \chi_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(\xi) \quad (\xi \in (-\pi,\pi])$$

を満たすように定める．このとき，$m_\varphi \in L^2(-\pi,\pi)$ であり，$\chi_{(-\pi,\pi]}(2\xi) = m_\varphi(\xi)\chi_{(-\pi,\pi]}(\xi)$, すなわち，$\hat{\varphi}(2\xi) = m_\varphi(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ が成り立つ．ここで，$m_\varphi(\xi) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{-ik\xi}$ と Fourier 級数展開すると

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{-ik\xi}\right)\hat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi(\cdot - k)\right](\xi)$$

となる．逆 Fourier 変換により，$\dfrac{1}{2}\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi(x-k)$, すなわち，$\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\alpha_k \varphi(2x-k)$ を得る．さらに，x を $2^j x - l$ に置き換えると

$$\varphi(2^j x - l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\alpha_k \varphi(2^{j+1}x - (2l+k)) \in \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{j+1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}}$$

[5] まだこの時点では $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ が MRA であることが証明されていないので，m_φ をローパスフィルターであると断言するのは早過ぎる．

となり，$\varphi_{j,l} \in \overline{\mathrm{span}\{\varphi_{j+1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}}$ が成り立つことがわかる．

(IV) 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して，$f \in V_j$ と $f(2x) \in V_{j+1}$ が同値であることは，V_j の定義式 (1.1) から明らかである．

(V) Haar の場合と同じく，$\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が正規直交系であることのみを示せば十分である．各 $\xi \in \mathbb{R}$ に対して，$\xi + 2\pi k \in (-\pi, \pi]$ となる $k \in \mathbb{Z}$ の存在は一意的なので，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varphi(\xi+2\pi k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\chi_{(-\pi,\pi]}(\xi+2\pi k)\right|^2 = 1$$

となる．したがって補題 1.9 より，$\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は正規直交系である．

(VI) $\hat{\varphi} = \chi_{(-\pi,\pi]}$ より，$\hat{\varphi}(\xi) \neq 0$ $(|\xi| < \pi)$ が成り立つは明らかである．

よって，$\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ は $\varphi(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$ をスケーリング関数とする MRA となる．この φ を用いて，(1.4) で $\nu \equiv 1$ とした式から

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2}\chi_{(-2\pi,-\pi]\cup(\pi,2\pi]}(\xi)$$

が得られる．この式で定まるウェーブレット ψ が Shannon ウェーブレットである．

Shannon スケーリング関数 $\varphi(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$ に関しては，次の結果も有名である．

定理 2.1 (小倉–Shannon のサンプリング定理)**.** $W > 0$ を定数とする．$\mathrm{supp}\hat{f} \subset [-2\pi W, 2\pi W]$ を満たす $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して，

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2W}\right)\varphi(2Wx-k),$$

$$\|f\|_{L^2} = (2W)^{-1/2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f\left(\frac{k}{2W}\right)\right|^2\right)^{1/2}$$

が成立する．

注意 2.2. φ が Shannon スケーリング関数の場合，そのローパスフィルターの特性から (1.4) で例外的に $\nu(\xi) = e^{-i\xi/2}$ とおくことができ，

$$\hat{\psi}(\xi) = \chi_{(-2\pi,-\pi]\cup(\pi,2\pi]}(\xi)$$

によってウェーブレット ψ が得られることが知られている．このウェーブレット ψ も Shannon ウェーブレットと呼ばれることがある．このウェーブレットは後述のユニモジュラーウェーブレット (定理 2.6) における $r = 0$ の場合に相当する．

2.3　Meyer ウェーブレット

まず，$N = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ に対して，次を満たす $\theta \in C_c^N(\mathbb{R})$ をとる．

(a) $\theta(\xi) = 1 \ \left(|\xi| < \frac{2}{3}\pi\right)$

(b) $\theta(\xi) = 0 \ \left(|\xi| \geq \frac{4}{3}\pi\right)$

(c) $|\theta(\xi)|^2 + |\theta(2\pi - \xi)|^2 = 1 \ (0 < \xi < 2\pi)$

(d) $\theta(\xi) = \theta(-\xi) \ (\xi \in \mathbb{R})$

(e) $0 \leq \theta(\xi) \leq 1 \ (\xi \in \mathbb{R})$

特に重要となるのは $N = \infty$ の場合であるが，N が有限の場合も含め，θ の構成法については後述する．このような θ の存在を認めて

$$\varphi = \mathcal{F}^{-1}[\theta]$$

と定め，さらに (1.1) によって閉部分空間族 $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ を定める．このとき，条件 (I), (IV), (V), (VI) が成り立つことを示そう．

(I) 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して，$V_j \subset V_{j+1}$ が成り立つことを示す．関数 m_φ を，周期 2π であり，$m_\varphi(\xi) = \theta(2\xi)$ $(\xi \in [-\pi, \pi))$ を満たすものとする．このとき，$m_\varphi \in L^2(-\pi, \pi)$ であり，$\theta(2\xi) = m_\varphi(\xi)\theta(\xi)$, すなわち，$\hat{\varphi}(2\xi) = m_\varphi(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ が成り立つ．以下，Shannon の場合と全く同様に議論すればよい．

(IV) 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して，$f \in V_j$ と $f(2x) \in V_{j+1}$ が同値であることは，V_j の定義式 (1.1) から明らかである．

(V) Shannon の場合と同じ方針で，補題 1.9 を用いて $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が正規直交系であることを示す．各 $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\varphi(\xi + 2\pi k)\right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\theta(\xi + 2\pi k)\right|^2 \tag{2.2}$$

であり，これが恒等的に 1 であることを示す．いま，$-\dfrac{4}{3}\pi \leq \xi + 2\pi k_0 < \dfrac{2}{3}\pi$ を満たす唯 1 つの $k_0 \in \mathbb{Z}$ をとる．このとき，$\dfrac{2}{3}\pi \leq \xi + 2\pi(k_0 + 1) < \dfrac{8}{3}\pi$ である．

(i) $\xi + 2\pi(k_0 + 1) \geq \dfrac{4}{3}\pi$ のとき，$-\dfrac{2}{3}\pi \leq \xi + 2\pi k_0 < \dfrac{2}{3}\pi$ であり，(2.2) の右辺は $\left|\theta(\xi + 2\pi k_0)\right|^2 = 1$ となる．

(ii) $\dfrac{2}{3}\pi \leq \xi + 2\pi(k_0 + 1) < \dfrac{4}{3}\pi$ のとき，$\eta = \xi + 2\pi(k_0 + 1)$ とおくと，$\dfrac{2}{3}\pi \leq \eta < \dfrac{4}{3}\pi$ より，特に $0 < \eta < 2\pi$ である．また，$-\dfrac{4}{3}\pi \leq \eta - 2\pi < \dfrac{2}{3}\pi$ であるから，(2.2) の右辺は

$$\begin{aligned}\left|\theta(\xi + 2\pi k_0)\right|^2 + \left|\theta(\xi + 2\pi(k_0 + 1))\right|^2 &= \left|\theta(\eta - 2\pi)\right|^2 + \left|\theta(\eta)\right|^2 \\ &= \left|\theta(2\pi - \eta)\right|^2 + \left|\theta(\eta)\right|^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

となる．

以上のことから，補題 1.9 より，$\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が正規直交系であることがわかる．

(VI) $\hat{\varphi}(\xi)=\theta(\xi)=1\ \left(|\xi|<\dfrac{2}{3}\pi\right)$ より，特に $\hat{\varphi}(\xi)\neq 0\ \left(|\xi|<\dfrac{2}{3}\pi\right)$ が成り立つ．

この φ が Meyer スケーリング関数である．Meyer スケーリング関数 φ によって，

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\xi)&=e^{i\xi/2}\overline{m_\varphi\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)\\&=e^{i\xi/2}\left\{\theta(\xi+2\pi)+\theta(\xi-2\pi)\right\}\theta\left(\frac{\xi}{2}\right)\end{aligned}$$

で与えられるウェーブレット ψ が Meyer ウェーブレットである．

φ は $\mathrm{supp}\hat{\varphi}\subset\left[-\dfrac{4}{3}\pi,\dfrac{4}{3}\pi\right]$ を満たすので帯域制限であり，ψ についても

$$\mathrm{supp}\hat{\psi}\subset\left\{\xi\in\mathbb{R}\,:\,\frac{2}{3}\pi\leq|\xi|\leq\frac{8}{3}\pi\right\}$$

が成り立つ．また，$N=\infty$ の場合は，$\theta\in C_c^\infty(\mathbb{R})\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ より，$\varphi=\mathcal{F}^{-1}[\theta]\in\mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ が成り立つ．

最後に，(a)–(e) を満たす $\theta\in C_c^N(\mathbb{R})$ の構成法について述べる．

1. まず，$N\in\mathbb{N}_0$ の場合を考える．係数 $c_0,c_1,\ldots,c_N$ を適当に選ぶと，多項式 $p_N(\xi)=\xi^{N+1}(c_0+c_1\xi+\ldots+c_N\xi^N)$ は $p_N(\xi)+p_N(1-\xi)=1$ を満たすように定められる．例えば，

$$\begin{aligned}p_0(x)&=x,\\p_1(x)&=x^2(3-2x),\\p_2(x)&=x^3(10-5x+6x^2),\\p_3(x)&=x^4(35-84x+70x^2-20x^3),\\p_4(x)&=x^5(126-420x+540x^2-315x^3+70x^4)\end{aligned}$$

と定めるとよい．さらに，

$$\beta(\xi)=\begin{cases}0 & (\xi<0)\\ p_N(\xi) & (0\leq\xi\leq1)\\ 1 & (\xi>1)\end{cases},$$

$$\theta(\xi)=\begin{cases}1 & \left(|\xi|\leq\dfrac{2}{3}\pi\right)\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\beta\left(\dfrac{3}{2\pi}|\xi|-1\right)\right) & \left(\dfrac{2}{3}\pi<|\xi|\leq\dfrac{4}{3}\pi\right)\\ 0 & \left(|\xi|>\dfrac{4}{3}\pi\right)\end{cases}\tag{2.3}$$

と定める．

2.　$N = \infty$ の場合は

$$\gamma(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\chi_{(0,\infty)}(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$\tilde{\gamma}(x) = \gamma(x)\gamma(1-x),$$
$$\beta(\xi) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}(t)\,dt\right)^{-1} \int_{-\infty}^{\xi} \tilde{\gamma}(t)\,dt$$

と定め，この β を使って，(2.3) によって θ を定めればよい．

Meyer ウェーブレットは，無限回微分可能かつ Schwartz クラスに属するように構成することができる．しかしながら，無限回微分可能であり，かつコンパクトな台をもつようなウェーブレットは存在しない．実際には，より厳しい次の結果が成立する．

定理 2.3.　次の 2 条件を同時に満たすウェーブレット ψ は存在しない．

(1) ψ は無限回微分可能である．

(2) ψ は指数関数的減少度をもつ．すなわち，ある $C, r > 0$ が存在し，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，$|\psi(x)| \le Ce^{-r|x|}$ が成り立つ．

この定理の証明のために次の補題を用いる．

補題 2.4.　関数 h に対し，$\{h_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交系であるとする．また，s を 0 以上の整数とする．このとき，次の条件：

(1) h は C^s 級である．

(2) $h^{(s)}$ は有界である．

(3) 関数 $x^s h(x)$ は $L^1(\mathbb{R})$ に属する．

を仮定すると，すべての $l = 0,\, 1,\, \ldots,\, s$ に対して $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^l h(x)\,dx = 0$ が成り立つ．

補題 2.4 の証明.　$k,\, p \in \mathbb{Z}$ を任意にとる．また，$j \in \mathbb{Z}$ は $j \ge \max\{1,\, -p\}$ を満たすものとする．このとき

$$\begin{aligned} 0 &= 2^{j/2}\langle h_{j,2^{j+p}k}, h\rangle_{L^2} && (2.4)\\ &= 2^{j/2}\int_{-\infty}^{\infty} 2^{j/2}h(2^j x - 2^{j+p}k)\overline{h(x)}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\overline{h(2^{-j}y + 2^p k)}\,dy && (2.5) \end{aligned}$$

が成り立つ．[6]

[6] (2.4) は $\{h_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ が正規直交系であること，および $j \ne 0,\, 2^{j+p}k \in \mathbb{Z}$ であることからしたがう．一方，(2.5) においては，$2^p k$ は必ずしも整数である必要はない．

以下，s に関する帰納法によって補題を証明する．

まず，$s=0$ の場合に補題が成立することを示す．すなわち，$s=0$ について (1), (2), (3) を仮定し，$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = 0$ が成り立つことを示す．h は有界かつ連続であり，さらに $h \in L^1(\mathbb{R})$ であるから，(2.5) において $j \to \infty$ とすれば，Lebesgue の収束定理より，

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\overline{h(2^p k)}\,dy$$

となる．$\{2^p k\}_{k,p\in\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{R}$ で稠密であり，h は連続であるから，$h(x_0) \neq 0$ となる $x_0 \in \mathbb{R}$ においても $0 = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\overline{h(x_0)}\,dy$ となる．したがって，$0 = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\,dy$ を得る．

次に，$s-1$ 以下の場合に補題が成立することを仮定し，s の場合についても補題が成立することを示す．すなわち，$s-1$ 以下の場合に補題が成立すること，および s の場合に (1), (2), (3) を仮定し，$\int_{-\infty}^{\infty} x^s h(x)\,dx = 0$ が成り立つことを示す．$k, p \in \mathbb{Z}$ を任意にとる．また，$j \in \mathbb{Z}$ は $j \geq \max\{1, -p\}$ を満たすものとし，$a = 2^p k$ とおく．点 a において，Taylor の定理より

$$h(x) = \sum_{l=0}^{s-1} \frac{h^{(l)}(a)}{l!}(x-a)^l + R_s(x-a) \tag{2.6}$$

が成り立つ．但し

$$R_s(x-a) = \frac{1}{(s-1)!}(x-a)^s \int_0^1 (1-\theta)^s h^{(s)}(a+\theta(x-a))\,d\theta$$

である．各 $y \in \mathbb{R}$ に対し，(2.6) において x を $2^{-j}y + a$ におきかえると

$$h(2^{-j} + a) = \sum_{l=0}^{s-1} \frac{h^{(l)}(a)}{l!}(2^{-j}y)^l + R_s(2^{-j}a)$$

を得る．これと (2.5)，および帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \left(\overline{\sum_{l=0}^{s-1} \frac{h^{(l)}(a)}{l!}(2^{-j}y)^l + R_s(2^{-j}a)} \right) dy \\
&= \sum_{l=0}^{s-1} \frac{\overline{h^{(l)}(a)}}{l!} \cdot 2^{-jl} \int_{-\infty}^{\infty} y^l h(y)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\overline{R_s(2^{-j}y)}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\overline{R_s(2^{-j}y)}\,dy
\end{aligned}$$

を得る．両辺に 2^{js} をかけて，さらに計算を続けると

$$
\begin{aligned}
0 &= 2^{js}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)\overline{\left\{\frac{1}{(s-1)!}(2^{-j}y)^s\int_0^1(1-\theta)^s h^{(s)}(a+\theta\cdot 2^{-j}y)\,d\theta\right\}}\,dy \\
&= \frac{1}{(s-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}y^s\psi(y)\left\{\int_0^1(1-\theta)^s\overline{h^{(s)}(a+\theta\cdot 2^{-j}y)}\,d\theta\right\}dy
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで，$h^{(s)}$ は有界かつ連続であり，$x^s h(x)\in L^1(\mathbb{R})$ であるから，両辺 $j\to\infty$ とすれば，Lebesgue の収束定理より

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{(s-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}y^s\psi(y)\left\{\int_0^1(1-\theta)^s\overline{h^{(s)}(a)}\,d\theta\right\}dy \\
&= \frac{1}{s!}\cdot\overline{h^{(s)}(a)}\int_{-\infty}^{\infty}y^s\psi(y)\,dy
\end{aligned}
$$

となる．したがって，$h^{(s)}(a)\neq 0$ が成立すれば，結論として $0=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}y^s\psi(y)\,dy$ が導かれる．最後に，$h^{(s)}(a)\neq 0$ であることを背理法で示す．もし仮に，$0=h^{(s)}(a)=h^{(s)}(2^pk)$ であるとすると，$p,k\in\mathbb{Z}$ の任意性と $h^{(s)}$ の連続性から，恒等的に $h^{(s)}=0$ となる．さらに Fourier 変換をとると，$\xi^s\hat{h}(\xi)=0$ となる．したがって，ほとんどいたるところで $\hat{h}=0$ となるから，$h=0$ が導かれる．これは，$\{h_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ が正規直交系であることに矛盾する．　□

定理 2.3 の証明． 背理法で証明する．定理 2.3 の (1), (2) を満たすウェーブレット ψ が存在すると仮定する．(2) より，$\hat{\psi}$ は $\{z\in\mathbb{C}:|\mathrm{Im}z|<r\}$ 上の解析関数 $F(z)$ へ拡張でき，$F(\xi)=\hat{\psi}(\xi)$ $(\xi\in\mathbb{R})$ を満たす．一方，補題 2.4 より，0 以上のすべての整数 s に対して，$\hat{\psi}^{(s)}(0)=0$ となるから，$F^{(s)}(0)=0$ となることがわかる．したがって，$F(z)$ の $\{z\in\mathbb{C}:|z|<r\}$ における Taylor 展開を考えると，$F(z)=0$ $(|z|<r)$ が得られる．よって，一致の定理より，$F(z)=0$ $(|\mathrm{Im}z|<r)$ となる．ゆえに，$\hat{\psi}=0$，すなわち $\psi=0$ となってしまい，ψ がウェーブレットであることに矛盾する．　□

2.4　ユニモジュラーウェーブレット

本節では，$\hat{\psi}$ が特性関数であるという特殊な帯域制限性をもつウェーブレット ψ について解説する．本節で紹介するウェーブレットはユニモジュラーウェーブレットと呼ばれており，その中にはいかなる MRA からも構成されないものが存在する．ユニモジュラーウェーブレットはそのフーリエ変換が非常にわかりやすいという関数としての興味深さはあるものの，残念ながら応用上役立つウェーブレットの多くは MRA から構成されている．その理由として，以下の 2 点が挙げられる．

1. ウェーブレットを用いて種々の関数空間の特徴付けや基底を与えるためには，その空間に応じた良い性質をもつウェーブレットを用いる必要がある．良い性質として，十分な滑らかさ，適度な減少度，台のコンパクト性，帯域制限性，モーメント条件などが挙げられる．その一方で，ウェー

ブレット ψ が MRA から構成できる関数であるための十分条件として次のような条件などが知られている ([4, 7, 9]).

（a）ある $\eta > 1$ について，$(1+|\cdot|)^{\eta/2}\psi$, $(1+|\cdot|)^{\eta/2}\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$ を満たす.

（b）ψ はコンパクトな台をもつ.

（c）ψ は帯域制限かつ $|\hat{\psi}|$ は連続である.

2. 局所化されたウェイトをもつ重み付き関数空間の特徴付けや基底の構成のためには，通常のウェーブレット基底ではなく，スケーリング関数とウェーブレットの両方を用いて構成される truncated wavelet basis を用いる必要がある ([8]).

では，ユニモジュラーウェーブレットを導入しよう．自然数 r に対して，以下の集合を定義する．

1. $I^r = \left[\dfrac{2^r\pi}{2^{r+1}-1}, \pi\right]$.
2. $J^r = \left[2^r\pi, 2^r\pi + \dfrac{2^r\pi}{2^{r+1}-1}\right] = 2^r\left[\pi, \dfrac{2^{r+1}\pi}{2^{r+1}-1}\right]$.
3. $K_r^+ = I^r \cup J^r$.
4. $K_r = K_r^+ \cup (-K_r^+)$.

上で定めた集合について，次が成り立つ.

補題 2.5. (1) 各 $j \in \mathbb{Z}$ について，$2^j K_r$ は互いに境界以外では重ならない.

(2) $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} 2^j K_r$.

証明. (1) $K_r = (I^r \cup J^r) \cup (-(I^r \cup J^r))$ より，各 $j \in \mathbb{Z}$ について，$2^j I^r$, $2^j J^r$ が互いに境界以外では重ならないことを示せばよい.

$$
\begin{aligned}
2^j I^r &= \pi\left[\frac{2^{r+j}}{2^{r+1}-1}, 2^j\right], \\
2^{j-r} J^r &= \pi\left[2^j, \frac{2^{r+j+1}}{2^{r+1}-1},\right], \\
2^{j+1} I^r &= \pi\left[\frac{2^{r+j+1}}{2^{r+1}-1}, 2^{j+1}\right], \\
2^{j+1-r} J^r &= \pi\left[2^{j+1}, \frac{2^{r+j+2}}{2^{r+1}-1}\right], \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

より結論が正しいことがわかる.

(2) 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して

$$I_j = 2^j I^r,\ J_j = 2^j J^r,\ L_j = I_j \cup J_{j-r} = 2^j \left[\frac{2^r\pi}{2^{r+1}-1}, \frac{2^{r+1}\pi}{2^{r+1}-1}\right]$$

とおくと

$$(0,\infty) = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} L_j = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (I_j \cup J_{j-r}) = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (I_j \cup J_j) = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} 2^j K_r^+$$

を得る．また，これより

$$(-\infty,0) = -\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} 2^j K_r^+ = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} 2^j(-K_r^+)$$

となり，K_r の定義から結論を得る．　□

定理 2.6. r を自然数とする．$\psi = \dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}^{-1}[\chi_{K_r}]$ と定めると，ψ はウェーブレットである．このウェーブレットをユニモジュラーウェーブレットと呼ぶ．ユニモジュラーウェーブレットが MRA から構成されるウェーブレットであるための必要十分条件は $r = 1$ である．

証明. (1) まずは，ψ がウェーブレットであること，すなわち，関数列 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底であることを示す．そのためには Plancherel の定理より，関数列 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}[\psi_{j,k}]\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底であることを示せばよい．Fourier 変換の性質より $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}[\psi_{j,k}](\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{-j}e^{ik2^{-j}\xi}\chi_{2^jK_r}(\xi)$ が成り立つことに注意しておきたい．これより $\{\mathcal{F}[\psi_{0,k}]\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(K_r)$ の正規直交基底となり，さらに各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して，$\left\{2^{j/2}\mathcal{F}[\psi_{j,k}]\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(2^jK_r)$ の正規直交基底となる．したがって，補題 2.5 より $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}[\psi_{j,k}]\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底となる．
(2) 次に，$r = 1$ であると仮定し，ウェーブレット ψ が MRA から構成されることを示す．そのために，各 $l \in \mathbb{Z}$ に対して

$$V_l = \overline{\mathrm{span}\{\psi_{j,k}\}_{j\le l-1,k\in\mathbb{Z}}}$$

と定義し，$\{V_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ が MRA であることを示せばよい．MRA の条件 (I), (IV) については，この定義から直接示すことができる．以下，条件 (V) に現れるスケーリング関数 φ を構成し，さらにその φ が条件 (VI) を満たすことを示す．まずは，$\{V_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ の定義および条件 (IV) より

$$V_0 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \mathrm{supp}\hat{f} \subset \bigcup_{j=-\infty}^{-1} 2^j K_1 \right\} \tag{2.7}$$

が成り立つことに注意する．ここで

$$\bigcup_{j=-\infty}^{-1} 2^j K_1 = \left[-\frac{4}{3}\pi, -\pi\right] \cup \left[-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right] \cup \left[\pi, \frac{4}{3}\pi\right] =: L$$

とおき，$\varphi = \dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}^{-1}[\chi_L]$ と定める．この φ が条件 (VI) を満たすことは明らかである．また，φ が条件 (V) を満たすスケーリング関数であることについては，まずは補題 1.9 を用いて $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が正規直交系であることが示される．また，(2.7) を用いることにより $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が V_0 の基底であることも示される．

(3) 最後に，$r \geq 2$ の場合を考える．このとき，ユニモジュラーウェーブレット ψ がいかなる MRA からも構成できないことを背理法で示す．仮に，このウェーブレット ψ がスケーリング関数 φ をもつ MRA$\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ から構成されるものであるとする．$\psi \in W_0 \subset V_1$ より，$\psi(\cdot/2) \in V_0$, $\psi(\cdot/4) \in V_{-1} \subset V_0$ となる．$V_0 = \overline{\mathrm{span}\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}}$ より，$[0, 2\pi]$ 上で 2 乗可積分かつ周期 2π の関数 m_1, m_2 を用いて

$$\hat{\psi}(2\xi) = m_1(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \quad \hat{\psi}(4\xi) = m_2(\xi)\hat{\varphi}(\xi) \tag{2.8}$$

と表すことができる．ここで，ψ の定義より，任意の $\xi \in \dfrac{1}{2}K_r$ に対して $\hat{\psi}(2\xi) = \dfrac{1}{2\pi} \neq 0$ より $m_1(\xi) \neq 0$ となる．一方

$$\frac{1}{2}K_r \supset \frac{1}{2}J_r = \left[2^{r-1}\pi, 2^{r-1}\pi + \frac{2^{r-1}\pi}{2^{r+1}-1}\right]$$

であり，m_1 は周期 2π であるから，任意の $\xi \in \left[0, \dfrac{2^{r-1}\pi}{2^{r+1}-1}\right]$ に対して $m_1(\xi) \neq 0$ となる．特に，より狭い区間 $\Lambda = \left[\dfrac{2^{r-2}\pi}{2^{r+1}-1}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ においても $m_1 \neq 0$ となる．点 $\eta \in \Lambda$ を任意にとると，$4\eta \in I^r \subset K^r$, $2\eta \notin K^r$ より，$\hat{\psi}(4\eta) \neq 0$ かつ $\hat{\psi}(2\eta) = 0$ となる．その一方で (2.8) より，$\hat{\psi}(4\eta) = \dfrac{m_2(\eta)}{m_1(\eta)}\hat{\psi}(2\eta)$ が成立するので，矛盾が生じる． □

3　多変数のウェーブレットの構成

本章では，$L^2(\mathbb{R}^n)$ における MRA およびウェーブレットについて議論する．以下，$\mathbb{R}^n$ で定義された関数 $F(x)$ が与えられたとき，$j \in \mathbb{Z}$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して

$$\begin{aligned} F_{j,k}(x) &= 2^{j/2}F(2^j x - k) \\ &= 2^{j/2}F(2^j x_1 - k_1, \ldots, 2^j x_n - k_n) \quad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

と書くことにする．まずは，$L^2(\mathbb{R}^n)$ における MRA を定義しておきたい．

定義 3.1 (MRA). $L^2(\mathbb{R}^n)$ の閉部分空間族 $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ が MRA であるとは，次の 5 条件をみたすことをいう．

(I) $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ は包含関係について単調増大列である．すなわち，すべての $j \in \mathbb{Z}$ に対して，$V_j \subset V_{j+1}$ である．

(II) $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(\mathbb{R}^n)$.

(III) $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$.

(IV) 各 $j \in \mathbb{Z}$ について，$f \in V_j$ と $f(2x) \in V_{j+1}$ は同値である．

(V) ある $\Phi \in V_0$ が存在し，$\{\Phi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ は V_0 の正規直交基底となる．

(V) に現れる関数 Φ を，MRA$\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ のスケーリング関数という．

1 変数の場合と同じく，$L^2(\mathbb{R}^n)$ においても与えられた MRA に付随してウェーブレットを構成することができる．しかしながら，そのウェーブレットの定義には注意が必要である．

定義 3.2. (2^n-1) 個の関数の集合 $\{\Psi^l\}_{l=1}^{2^n-1} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ を考える．関数列

$$\left\{\Psi^l_{j,k} : l = 1, 2, \ldots, 2^n-1,\, j \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{Z}^n\right\}$$

が $L^2(\mathbb{R}^n)$ の正規直交基底であるとき，$\{\Psi^l\}_{l=1}^{2^n-1}$ をウェーブレット集合，各 Ψ^l をウェーブレットという．

$L^2(\mathbb{R})$ の MRA が与えられたとき，テンソル積を使って次のように $L^2(\mathbb{R}^n)$ のウェーブレット集合を構成することができる．[7] $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ はある $L^2(\mathbb{R})$ の MRA のスケーリング関数であるとし，関数 ψ を式 (1.2) で定める．さらに，$\psi^0 = \varphi$, $\psi^1 = \psi$ と書き，添字集合 E を $E = \{0,1\}^n \setminus \{(0,0,\ldots,0)\}$ で定める．そして，$\mathbb{R}^n$ 上の関数 Ψ^e $(e = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in E)$ を

$$\Psi^e(x) = \prod_{m=1}^{n} \psi^{e_m}(x_m) \quad (x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

で定義する．このとき，次が成り立つ：

1. 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して $V_j = \overline{\mathrm{span}\{\Phi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}}$ と定めると，$\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ はスケーリング関数 Φ をもつ $L^2(\mathbb{R})$ の MRA である．
2. 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して，V_{j+1} における V_j の直交補空間を W_j とする．このとき，$\{\Psi^e\}_{e\in E} \subset W_0$ である．

[7] この構成法から，1 変数のウェーブレットを n 変数へ拡張する場合に (2^n-1) 個の関数の集合を考えることが自然であることが理解できる．

3. 関数列 $\{\Psi^e_{j,k}\}_{e\in E, j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}^n}$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ の正規直交基底となる.

一方，十分な滑らかさと減少度をもつ $L^2(\mathbb{R}^n)$ のウェーブレット集合について，1 変数関数のテンソル積を経由しない構成法も知られている（[10] の 5 章).

謝　辞

本稿は,「ウェーブレット基礎セミナー」 (大阪大学 令和 2 年 1 月 4, 5, 6 日) および「第 1 回 MIU 共同研究」 (茨城大学 令和 2 年 2 月 6, 7, 8 日) での講演内容を加筆，修正して執筆しました．貴重な発表の機会をくださった中井英一先生，和田出秀光先生に御礼申し上げます．澤野嘉宏先生には，補題 1.18 の厳密な証明を教えて頂きました．また，中井先生と和田出先生から頂いたご指摘をもとに，定理 1.11 (V_{-1} の構造) の証明を簡潔に改善することができました．萬代武史先生からは Shannon ウェーブレットに関する有益なコメントを頂きました.

参考文献

[1] 新井仁之，フーリエ解析と関数解析学，培風館，2001 年.

[2] 芦野隆一，山本鎮男，ウェーブレット解析–誕生・発展・応用，共立出版，1997 年.

[3] 猪狩惺，実解析入門，岩波書店，1996. (英訳: Real Analysis–with an Introduction to Wavelet Theory. Translations of Mathematical Monographs, 177. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.)

[4] P. Auscher, Solution of two problems on wavelets, J. Geom. Anal. **5** (1995), 181–236.

[5] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.
邦訳：山田道夫，佐々木文夫，ウェーブレット 10 講，シュプリンガーフェアラーク東京，2003 年.

[6] Y. Ha, H. Kang, J. Lee and J. K. Seo, Unimodular wavelets for L^2 and the Hardy space H^2, Michigan Math. J. **41** (1994), 345–361.

[7] E. Hernández and G. Weiss, A First Course on Wavelets, CRC Press, Boca Raton, FL., 1996.
邦訳：芦野隆一，萬代武史，浅川秀一，ウェーブレットの基礎，科学技術出版，1999 年.

[8] P.G. Lemarié-Rieusset, Ondelettes et poids de Muckenhoupt, Studia Math. **108** (1994), 127–147.

[9] P.G. Lemarié-Rieusset, Projecteurs invariants, matrices de dilatation, ondelettes et analyses multi-résolutions, Rev. Mat. Iberoamericana **10** (1994), 283–347.

[10] P. Wojtaszczyk, A Mathematical Introduction to Wavelets, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.