

平均垂直応力に依存する係数をもつ弾性体の数学解析

伊 藤 弘 道

概 要

松岡勝男先生は筆者と同じ大学の出身であり、近年では筆者の所属する大学において非常勤講師として学生を指導していただいた。松岡勝男先生のご定年退職を祝し、感謝の念を込めて小稿を寄稿させていただく。本稿では、様々な場面で多用される“圧力”という言葉の意味を再考し、多孔質材料に関する“圧力”に依存する材料係数をもつ弾性体の数学解析についての筆者の近年の研究成果を紹介する。

I 圧力とは何か

偏微分方程式は数学における解析学の一分野に位置付けられるが、様々な現象を記述するものであり、例えば流体力学における Navier-Stokes 方程式や固体力学における弾性体方程式などがある。これらの方程式においても圧力という用語は頻出するが、その意味については曖昧さがあると言わざるを得ない状況である。この点については、古くから指摘され続けていることではあるが、例えば [14] や [12] 参照、まずはその問題点を整理する。筆者の知る限り、圧力にまつわる用語は、熱力学的圧力 (thermodynamic pressure), 機械的圧力 (mechanical pressure), 平均垂直応力 (mean normal stress), 静水圧 (hydrostatic pressure), 蒸気圧 (vapor pressure), 電気浸透圧 (electro-osmotic pressure), 接触圧力 (contact pressure) などが多様な場面で出現し、特にはじめの4つに対しては、しばしばそれらの意味が混同・誤用されていることに遭遇する。

1 非圧縮 Navier-Stokes 方程式

まず、アメリカのクレイ数学研究所が発表したミレニアム懸賞問題の1つとしても有名な、非圧縮性粘性流体の運動を表す以下の非圧縮 Navier-Stokes 方程式を紹介する。

$$(N) \begin{cases} \rho \partial_t \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

(N) の第1式は運動量保存則から導かれる平衡方程式、第2式は質量保存則から導出される連続の方程式を表す。ここで、 \mathbf{v} は流体の速度ベクトル、 p は流体中の“圧力”、 \mathbf{f} は流体に作用する外力の総和、

ρ は流体の質量密度を表す正定数, η は剪断粘性係数 (正定数) を表す, という説明が一般的であるが, ここでの圧力 p が何を表しているかを考える.

非圧縮性粘性流体の運動方程式系 (N) は, 連続の方程式, 運動量方程式, エネルギー方程式, 状態方程式から構成される圧縮性流体の運動方程式の近似式として導出される (例えば [1], [12], [15] など参照). 非圧縮性は変形の前後で連続体の密度が変化しないという性質を表し, 流体の場合は流れが音速よりも十分小さい場合に実現されると言われている. 熱力学的圧力は, 熱力学的な考察から状態方程式や熱力学の第 1 法則から得られる, 温度を決定する応答関係に現れる圧力であり, 言い換えれば, 温度は体積と圧力を含む応答関数で与えられる. よって, (N) における p が熱力学的圧力であるとは言い難く, 数学解析をおこなうため未知関数と方程式の数を揃えるためのパラメータ (Lagrange 乗数) と考える方が自然であると考えられる. この点をさらに詳しく考察する.

流体力学の定評のある教科書 [1] には, 定常状態の流体の応力テンソルは

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (I.1)$$

と表され, ここで p は静水圧と呼ばれる, と記されている. この場合, $p = -1/3(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ であるので, この p は平均垂直応力でもある (平均垂直応力の定義は明確である). この p は Euler によって導入された圧力であり, 熱力学的に定義される平衡圧と等価であることがわかる (詳しくは, [12] 参照). Euler の与えた (I.1) には粘性応力は含まれず, 流体に粘性, すなわち内部摩擦が存在しないという完全流体の運動を記述するものである. ここで, [14] において 2 つの問題点が指摘されている. 1 つは, 静止している流体とは対照的に, 流れている流体では圧力が何を意味しているのかわからないということ, もう 1 つは, 静止している場合であっても, (N) とは異なる非 Newton 流体のような一般の非線形流体については何も言及されていないことである. 2 つ目の点については, 実際, [14] において, 定常状態であっても平均垂直応力と p が一致しない例が与えられている.

次に, [14] で挙げられている, 圧縮性流体における熱力学的圧力, 非圧縮性流体における非圧縮性の制約に伴う Lagrange 乗数と平均垂直応力の関係について, 連続体力学で用いられる様々なモデルを例を示しながら考察する. 古典的な Euler 流体の Cauchy 応力 T は

$$T = -p(\rho, \theta)I \quad (I.2)$$

と表される, ここで θ は温度, I は恒等テンソルを表す. この構成関係式 (I.2) の定義による熱力学的圧力 $p(\rho, \theta)$ は, 上述のように偶然, 平均垂直応力でもある. しかし, 次の構成関係式

$$T = -p(\rho, \theta)I + \lambda(\rho, \theta)\text{tr}(D)I + 2\mu(\rho, \theta)D, \quad D_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (I.3)$$

ここで $D = (D_{ij})_{i,j=1,2,3}$ は歪み速度テンソル, で与えられる古典的な圧縮性線形粘性流体を考えると, $p(\rho, \theta)$ は平均垂直応力とは異なる. 機械的圧力は平均垂直応力と同義で用いられることが多いが,

一般に平衡状態（静止状態）での圧力である熱力学的圧力とは明らかに異なるものである．(I.3) で表される圧縮性 Navier-Stokes 流体の場合、

$$\text{tr}(T) = -3p(\rho, \theta) + (3\lambda(\rho, \theta) + 2\mu(\rho, \theta))\text{tr}D$$

となるため、熱力学的圧力 $p(\rho, \theta)$ は $3\lambda(\rho, \theta) + 2\mu(\rho, \theta) = 0$ であるときのみ、平均垂直応力となる．この $3\lambda(\rho, \theta) + 2\mu(\rho, \theta) = 0$ という条件は Stokes の仮定と呼ばれており、長年に渡って使用されてきた．しかし、[14] やその参考文献においてこの仮定が支持できないことが実験結果からも示されており、[12] においても単原子気体以外の流体についての同様の記述がある．非圧縮性 Navier-Stokes 流体 (N) の場合、Cauchy 応力は

$$T = -pI + 2\mu D \quad (\text{I.4})$$

で与えられ、(I.4) に現れる p （非圧縮性の制約の結果生じる Lagrange 乗数）は平均垂直応力であることがわかる．これは、流体が密度変化を起こさず等速運動のみ可能であるため、 $\text{tr}D = 0$ を意味し、これは質量保存則から導かれる $\text{div}v = 0$ の条件と等価である．しかし、これがすべての流体について適当であるわけではないことは、次の式で与えられる非線形流体における応力を考えれば明らかである．

$$T = -pI + \alpha D + \beta D^2 \quad (\text{I.5})$$

ここで、 α と β は $1/2[(\text{tr}D)^2 - \text{tr}D^2]$ と $\det D$ の関数である．このような流体では、Lagrange 乗数 p は平均垂直応力とは異なる．(I.5) と同様に、Cauchy 応力 T が次式

$$T = -pI + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 \quad (\text{I.6})$$

で与えられる非圧縮性の非線形固体の場合を考える．ここで、 $B = FF^T$ は左 Cauchy-Green 変形テンソル、 F は変形勾配テンソル、 α_1 と α_2 は $\text{tr}B$ と $1/2[(\text{tr}B)^2 - \text{tr}B^2]$ の関数である．この場合も Lagrange 乗数 p は平均垂直応力ではないことがわかる．

このように、様々な流体や固体の数値モデルを考える際には、物体の構成則に現れる圧力が熱力学的圧力を指すのか、平均垂直応力を指すのか、Lagrange 乗数を指すのか、を知ることが重要である．なぜなら、例えば、流体の粘性が圧力に依存する場合は、それが熱力学的圧力なのか平均垂直応力なのかによって、粘性が密度に依存するのか速度勾配に依存するのかというようなより大きな違いとなるからである．

2 線形弾性体方程式

固体における基礎方程式も、連続体という広い視座に立てば、流体の場合と同様に、質量保存則、運動量保存則、エネルギー保存則、状態方程式から定式化される（例えば [2], [10], [11], [15] 参照）．いわゆる線形弾性体方程式は、微小歪みの範疇において、圧縮性の等方弾性体に対して、および温度変化

(熱膨張による熱応力など)を無視し, 導出される. 流体の場合の速度ベクトル \mathbf{v} と歪み速度テンソル D の代わりに, 弾性体の場合は変位ベクトル \mathbf{u} と線形化された歪みテンソル $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1,2,3}$

$$\varepsilon_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

を用いることになる. このとき, 歪みテンソルと応力テンソルの関係を与える構成方程式は線形として考えられ (1次元の Hooke の法則の一般化とも言われる), この比例係数を表す弾性テンソルに, 対称性と等方性を考慮すると,

$$T = \lambda \text{tr}(\varepsilon) I + 2\mu \varepsilon \quad (\text{I.7})$$

のように与えられる. ここで, 係数 λ, μ は Lamé 定数とよばれる. λ, μ を定数として, (I.7) と線形化された歪みテンソルの定義式を運動量保存則から導かれる平衡方程式に代入すると, 線形弾性体方程式

$$\rho_0 \partial_{tt} \mathbf{u} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho_0 \mathbf{f} \quad (\text{I.8})$$

が得られる. ここで, 線形弾性体の場合, 微小歪みを考えるため, 密度変化は小さいと考え, すなわち $\rho = \rho_0 + \rho', \rho' \ll \rho_0$ (ρ_0 : 定数) とする. このとき, 平衡方程式と連続の方程式とは独立して考えられる. また, 各方程式に現れる物質微分 of 非線形項を 2 次の微小量として無視して考えたため, (I.8) に至ったのである.

弾性体においても, 熱の影響を取り入れる場合は, 熱力学的圧力を考慮する必要がある. そのとき, 圧力は温度と密度の両方に依存する. また, (I.6) のような非圧縮性の物体を考える際には, 流体の場合と同様, 未定乗数として p を導入するが, それが熱力学的圧力や平均垂直応力と等価となるか注意すべきである.

II 弾性係数が平均垂直応力に依存する数理モデル

1 構成則が陰関数で与えられる弾性体モデル

前節で紹介した線形弾性体を仮定した脆性破壊は現在まで線形破壊力学として体系化されてきた. しかし, き裂を含む線形弾性体を考えると, き裂先端で応力が集中し, これは (I.7) より歪みも発散してしまうため, 線形弾性体の前提条件である微小歪みと矛盾が生じる. Rajagopal 氏 (テキサス A&M 大学) は 2007 年頃 ([13] 参照) にこの不条理を解消し得るより広範な弾性体モデル (Implicit constitutive Theory) を提案した.

連続体における基礎方程式は連続体仮説と力学の原理から導かれるが, 応力 - 歪み構成則には現象論的な考察が必要である. 弾性体モデルの一般的な枠組みの 1 つである Cauchy 弾性体は応力テンソルが変形勾配テンソルの関数である, すなわち $T = f(F)$ で定義され, 線形弾性体 (I.7) もその一種であ

るといえる．しかしこの枠組みでは許容できない単純な現象も存在し（[13] 参照），より広範な枠組みが必要となる．そこで，Rajagopal 氏は陰関数で与えられるような構成則を提案した．これは，等方物質である弾性体の場合， $f(T, B) = 0$ のように表わされる．構成則がみたすべき原理の 1 つに物質客観性の原理があり，そのため f は等方テンソル値関数である．すなわち，任意の直交テンソル Q に対して， $f(QTQ^T, QBQ^T) = Qf(T, B)Q^T$ が成り立つ．これにより， f は以下の表現式をもつことがわかる（[16] 参照）

$$f(T, B) := \alpha_0 I + \alpha_1 T + \alpha_2 B + \alpha_3 T^2 + \alpha_4 B^2 + \alpha_5 (TB + BT) + \alpha_6 (T^2 B + BT^2) + \alpha_7 (B^2 T + TB^2) + \alpha_8 (B^2 T^2 + T^2 B^2) = 0. \quad (\text{II.1})$$

ここで，係数 α_i ($i = 0, 1, \dots, 8$) は ρ , $\text{tr}T$, $\text{tr}B$, $\text{tr}T^2$, $\text{tr}B^2$, $\text{tr}T^3$, $\text{tr}B^3$, $\text{tr}(TB)$, $\text{tr}(T^2 B)$, $\text{tr}(B^2 T)$, $\text{tr}(T^2 B^2)$ に依存する量である．(II.1) の特別な場合として， $B = \beta_0 I + \beta_1 T + \beta_2 T^2$ ，ここで $\beta_i = \beta_i(\rho, \text{tr}T, \text{tr}T^2, \text{tr}T^3)$ ($i = 0, 1, 2$)，が考えられる．従来の Cauchy 弾性体は応力が歪みの関数として与えられるが，歪みが応力の関数（可逆とは限らない）として与えられる方が物理的には自然であり，陰関数の構成則のモデルはそれを含んでいることがわかる．

ここで，さらに微小歪みを仮定すると B を $I + 2\varepsilon(\mathbf{u})$ で近似することができ，(II.1) は

$$\beta_0 I + \beta_1 T + \beta_2 \varepsilon + \beta_3 T^2 + \beta_4 (T\varepsilon + \varepsilon T) + \beta_5 (T^2 \varepsilon + \varepsilon T^2) = 0 \quad (\text{II.2})$$

と表され， $\beta_j = \beta_j(\rho, \text{tr}T, \text{tr}T^2, \text{tr}T^3)$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) である．

2 多孔質材料に対する非線形弾性体モデル

次に，岩石やコンクリートのような多孔質材料を記述する数理モデルを紹介する．質量保存則から基準配置における密度 ρ_R と現配置における密度 ρ には $\rho_R = \rho(\det F)$ の関係がある．これを線形化すると， $\rho_R = \rho(1 + \text{tr}\varepsilon)$ となる．この関係式から，多孔質材料のような密度に依存する弾性係数の数理モデルを $\text{tr}\varepsilon$ に依存するモデルとして捉えることができる．しかし，この場合， ε は線形化歪みテンソルであるため，弾性係数の密度依存は線形でなければならないことに注意が必要である．その 1 つのモデルとして，(II.2) の特別な場合でもある，

$$\varepsilon = \alpha(\text{tr}\varepsilon)(\text{tr}T)I + C_1 T \quad (\text{II.3})$$

が挙げられる．ここで，弾性係数 $C_1 > 0$ ，スカラー値関数 α である．(II.3) の両辺の tr をとると

$$\text{tr}\varepsilon = 3\alpha(\text{tr}\varepsilon)(\text{tr}T) + C_1 \text{tr}T \quad (\text{II.4})$$

となる．もし (II.4) において $\text{tr}\varepsilon$ に関して解くことができれば，それを (II.3) に代入すると， β をスカラー値関数として

$$\varepsilon = \beta(\text{tr}T)(\text{tr}T)I + C_1T \quad (\text{II.5})$$

が得られる。ここで、[4]で扱っているように、今、 p を平均垂直応力として定める、つまり $p = -\frac{1}{3}\text{tr}T$ である。そこで、

$$T = -pI + T^*$$

と分解する。このとき、 T^* は偏差応力テンソルとよばれ ([3] 参照)、 $\text{tr}T^* = 0$ が成り立つ。線形化された歪みテンソルに関しても同様に分解すると

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(\text{tr}\varepsilon)I + \varepsilon^*, \quad \text{tr}\varepsilon^* = 0$$

となる。ここで、構成則 (II.5) を分解すると

$$\varepsilon^* = C_1T^*, \quad \text{tr}\varepsilon = -C_2\mathcal{F}(p) \quad (\text{II.6})$$

のように表すことができる。 $C_2 > 0$ は材料によって決まる定数であり、 $\mathcal{F}(p)$ については以下のような様々なモデルが考えられる。

1. $\mathcal{F}(p) = p$, $C_1 = \frac{1}{2\mu}$, $C_2 = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}$: 線形弾性体 (I.7)
2. $\mathcal{F}(p) = \frac{p}{1 + \kappa + \frac{2}{\pi}\arctan(rp + s)}$, $\kappa > 0$, $r > 0$, $s \in \mathbb{R}$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ ([4] 参照)
3. $\mathcal{F}(p) = \frac{p}{1 - p/\tau_{cr}}$, $\tau_{cr} \in \mathbb{R}$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ ([5] 参照)

この3.のモデルは (II.3) の α として $\alpha(\text{tr}\varepsilon) = E_2(1 + \lambda_2\text{tr}\varepsilon)$ (ただし、 E_2 , λ_2 は定数) を代入したものに对应している。実際、このとき

$$\varepsilon = C_1T^* + \frac{E_2 + C_1/3}{1 - 3E_2\lambda_2\text{tr}T}(\text{tr}T)I$$

となるので、 $\mathcal{F}(p) = \frac{p}{1 - p/\tau_{cr}}$ の形で表されている。しかし、この数学解析は困難である。なぜなら、 $\mathcal{F}(p)$ の有界性や単調性が欠落するため標準的な解の存在定理が適用できないからである ([6] 参照)。そこで、[5] では $\mathcal{F}(p)$ に閾値近似モデルを適用することによって、対応する非線形楕円型偏微分方程式の境界値問題の適切性が証明された。具体的には、不連続関数を $0 < \underline{\tau} < \bar{\tau} < \infty$ なる閾値 $\underline{\tau}$, $\bar{\tau}$ を用いることによって正則化した、 $\mathcal{F}(p)$ の閾値近似モデル

$$\tilde{\mathcal{F}}(p) = \begin{cases} \frac{p}{1 - p/\tau_{cr}} & \text{if } 1 - \frac{1}{\underline{\tau}} < \frac{p}{\tau_{cr}} < 1 - \frac{1}{\bar{\tau}}, \\ \bar{\tau}p & \text{if } \frac{p}{\tau_{cr}} \geq 1 - \frac{1}{\bar{\tau}}, \\ \underline{\tau}p & \text{if } \frac{p}{\tau_{cr}} \leq 1 - \frac{1}{\underline{\tau}}, \end{cases}$$

を考えた。

本稿では, [8] における研究成果を基に, 非貫通条件を課したき裂をもつ問題に対して, 擬単調変分不等式に対する理論を (II.6) のような構成則で表される非線形弾性体における境界値問題へ適用する。

III き裂問題の数学解析

1 問題設定

ここで, 本稿で扱う問題を述べる. Ω を \mathbb{R}^3 における有界領域とする. Ω の境界 $\partial\Omega$ は 2 つの部分 Γ_N, Γ_D からなるものとし, $\partial\Omega = \overline{\Gamma_N} \cup \overline{\Gamma_D}$ かつ $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ かつ $\Gamma_D \neq \emptyset$ であるとする. また, $\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ で表す.

次に, Ω は曲面 Σ によって, 2 つの Lipschitz 領域 Ω^+, Ω^- にわけられるものとし, $\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^- \cap \overline{\Gamma_D} \neq \emptyset$ とする. $\Gamma_c \subset \Sigma$ が Ω に内在するき裂を表すものとし, Γ_c の Ω^\pm 側の面を区別し, それぞれ Γ_c^\pm と表すが, 単位法線ベクトル $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ は 1 つの方向, 例えば Ω^- から Ω^+ に向かう方向, に固定する. そこで, $\Omega_c = \Omega \setminus \overline{\Gamma_c}$ と表し, その境界は $\partial\Omega_c = \partial\Omega \cup \overline{\Gamma_c^+} \cup \overline{\Gamma_c^-}$ である.

ここでは定常問題を考えるため, 空間変数 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ のみを独立変数とし, 変位ベクトルを $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)(\mathbf{x})$ とする. 今, 既知の物体力 $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \Omega_c$) と表面力 $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \Gamma_N$) に対して, 以下の $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ の境界値問題 (*) を考える.

$$(*) \left\{ \begin{array}{ll} -\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}^* + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i, \quad i = 1, 2, 3, & \text{in } \Omega_c, \\ C_1 T^* - \varepsilon^*(\mathbf{u}) = 0, \quad C_2 \mathcal{F}(p) + \text{tr} \varepsilon(\mathbf{u}) = 0 & \text{in } \Omega_c, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_D, \\ T\mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{on } \Gamma_N, \\ T\mathbf{n} - (T\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_c^\pm, \\ [T\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}] := T\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_c^+} - T\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_c^-} = 0 & \text{on } \Gamma_c, \\ [[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] \geq 0, \quad T\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \leq 0, \quad (T\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})[[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]] = 0 & \text{on } \Gamma_c. \end{array} \right.$$

ここで, 問題 (*) における第 1 式は外力 \mathbf{f} がかけられた定常な場合の平衡方程式, 第 2 式は (II.6) で紹介した応力 - 歪みの構成則である. $C_2 \rightarrow 0$ とすると第 2 式は非圧縮条件となるため, この第 1 式と第 2 式は非圧縮性の物体の Stokes 方程式

$$-\frac{1}{2C_1} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega_c$$

となる. 問題 (*) における第 3 式は Γ_D 上で物体が固定されている Dirichlet 条件, 第 4 式は Γ_N 上に表面力 \mathbf{g} を課した Neumann 条件をそれぞれ表している. 問題 (*) における第 5 式~第 7 式では, き裂

Γ_c 上における条件を与えている. まず, 第5式はき裂面上での摩擦力 ($T\mathbf{n}$ の接成分) がゼロであることを表している. 第6式はき裂面に対する垂直応力がき裂を通じて連続に働いていることを意味し, 第7式はいわゆる非貫通条件 (詳細は [9] 参照) を記述している. これはき裂の上下面が貫通することはない, つまり以下の2つの場合に分類されることを表している.

- き裂が開口する場合: $[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] > 0, T\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0,$
- き裂が固着する場合: $[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] = 0, T\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \leq 0.$

また, 一般に $[[\mathbf{u}]] \neq \mathbf{0}$ であることに注意する.

次に, この問題 (*) の弱形式化をおこなう. 以後, 実対称テンソル空間を $\mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}$ で表す. 今, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega_c; \mathbb{R}^3), \mathbf{g} \in L^2(\Gamma_N; \mathbb{R}^3)$ とする. 次に, 以下の記号を導入する

$$\mathcal{K} = \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega_c; \mathbb{R}^3) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_D, \quad [[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]] \geq 0 \text{ on } \Gamma_c \},$$

$$\mathcal{T} = \{ T \in L^2(\Omega_c; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}) \mid \text{tr}T = 0 \}.$$

問題 (*) の弱形式とは, 以下の変分形式 (III.1)–(III.2) をみたく, 変位ベクトル $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$, 偏差応力テンソル $T^* \in \mathcal{T}$, 平均垂直応力 $p \in L^2(\Omega_c; \mathbb{R})$ の3つを求める問題である. ここで, 変分形式は

$$\int_{\Omega_c} (T^* \cdot \varepsilon^*(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - p \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{v})) \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega_c} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \, dS_{\mathbf{x}}, \quad (\text{III.1})$$

$$\int_{\Omega_c} (C_1 T^* - \varepsilon^*(\mathbf{u})) \cdot S^* \, d\mathbf{x} = 0, \quad \int_{\Omega_c} (C_2 \mathcal{F}(p) + \text{tr}\varepsilon(\mathbf{u})) q \, d\mathbf{x} = 0, \quad (\text{III.2})$$

が任意の $\mathbf{v} \in \mathcal{K}, S^* \in \mathcal{T}, q \in L^2(\Omega_c; \mathbb{R})$ に対して成り立つことを意味する. ここでは, テンソルに関するスカラー積 $T \cdot S = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} S_{ij}$ を用いている. (III.2) は問題 (*) の第2式から直ちに導かれるが, 問題 (*) から (III.1) の導出については [9, Section 1.4.4] を参照するとよい. さらに, (III.2) の (S^*, q) の代わりに $(T^* - S^*, p - q)$ を代入し, (III.1) を加えると

$$\int_{\Omega_c} \left(C_1 T^* \cdot T^* - T^* \cdot \varepsilon^*(\mathbf{v}) - (C_1 T^* - \varepsilon^*(\mathbf{u})) \cdot S^* + C_2 \mathcal{F}(p)(p - q) \right. \\ \left. + p \text{tr}\varepsilon(\mathbf{v}) - \text{tr}\varepsilon(\mathbf{u})q \right) \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega_c} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \, dS_{\mathbf{x}}. \quad (\text{III.3})$$

のように1つの不等式にまとめられる. 逆に, (III.3) において $\mathbf{v} = \mathbf{u}, S^* = T^* \pm R^*, q = p \pm \eta$ とすることにより, $S^* = R^*, q = \eta$ とした場合の (III.2) が得られる. その結果, 不等式 (III.1) も導かれる.

2 定理の紹介

問題 (*) の弱形式 (III.3) の数学解析について, [8, Theorem 1] で述べられている定理を紹介する. まず, 関数 $\mathcal{F}(p)$ に対して, 連続性や有界性に関する以下の3つの仮定を課す.

有界性: 次の不等式をみたす定数 $\bar{b} > 0$ が存在する.

$$\|\mathcal{F}(p)\|_{L^2(\Omega_c; \mathbb{R})} \leq \bar{b} \|p\|_{L^2(\Omega_c; \mathbb{R})} \quad (\text{III.4})$$

強圧性: 次の不等式をみたす定数 $\underline{b} \in (0, \bar{b})$ が存在する.

$$\int_{\Omega_c} \mathcal{F}(p)p \, dx \geq \underline{b} \|p\|_{L^2(\Omega_c; \mathbb{R})}^2 \quad (\text{III.5})$$

擬単調性: $p^k \in L^2(\Omega_c; \mathbb{R})$ が $p \in L^2(\Omega_c; \mathbb{R})$ に弱収束し, $\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_c} \mathcal{F}(p^k)(p^k - p) \, dx \leq 0$ ならば,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_c} \mathcal{F}(p^k)(p^k - q) \, dx \geq \int_{\Omega_c} \mathcal{F}(p)(p - q) \, dx \quad \forall q \in L^2(\Omega_c; \mathbb{R}). \quad (\text{III.6})$$

このとき, 問題 (*) の解の存在に関する次の定理を得る.

定理 1 ([8, Theorem 1]). $\mathbf{f} \in L^2(\Omega_c; \mathbb{R}^3)$, $\mathbf{g} \in L^2(\Gamma_N; \mathbb{R}^3)$ とする. $\mathcal{F}(p)$ に対して, (III.4)–(III.6) を仮定する. このとき, 擬単調変分不等式 (III.3) の解

$$\mathbf{u} \in \mathcal{K}, \quad T^* \in \mathcal{T}, \quad p \in L^2(\Omega_c; \mathbb{R})$$

が存在する. さらに, $0 < \theta < \min(1/C_1, 3\underline{b}/(C_2\bar{b}^2))$, $C(\mathbf{f}, \mathbf{g}) := \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega_c; \mathbb{R}^3)}^2 + C_{\text{tr}} \|\mathbf{g}\|_{L^2(\Gamma_N; \mathbb{R}^3)}^2$ (C_{tr} は正定数, 詳細は後述) とすると, 解 (\mathbf{u}, T^*, p) は以下のアプリオリ評価をみたす.

$$C_1(1 - \theta C_1) \|T^*\|_{L^2(\Omega_c; \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + C_2 \left(\underline{b} - \frac{1}{3} C_2 \bar{b}^2 \theta \right) \|p\|_{L^2(\Omega_c; \mathbb{R})}^2 \leq \frac{1}{2\theta} C(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad (\text{III.7})$$

$$\|\varepsilon^*(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega_c; \mathbb{R}^{3 \times 3})} = C_1 \|T^*\|_{L^2(\Omega_c; \mathbb{R}^{3 \times 3})}, \quad \|\text{tr} \varepsilon(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega_c; \mathbb{R})} \leq C_2 \bar{b} \|p\|_{L^2(\Omega_c; \mathbb{R})}. \quad (\text{III.8})$$

定理 1 の証明は以下の手順でおこなわれる (詳細は [8] 参照). まず, 擬単調変分不等式 (III.3) を, 有限な $k \in \mathbb{N}$ 次元の空間における Galerkin 近似と, 小さなパラメータ $\delta > 0$ をもつペナルティ項を導入することによって正則化する.

次に, この正則化された問題の解に対するアプリオリ評価を導出する. その際, $\mathcal{F}(p)$ の性質 (III.4)–(III.6), 重み θ 付きの Young の不等式, Korn–Poincaré の不等式: Γ_D 上で $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ならば, 定数 $C_{\text{KP}} > 0$ が存在して,

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_c; \mathbb{R}^3)}^2 \leq C_{\text{KP}} \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega_c; \mathbb{R}^{3 \times 3}_{\text{sym}})}^2, \quad (\text{III.9})$$

および, (III.9) とトレース作用素の有界性から得られる評価: Γ_D 上で $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ならば, 定数 $C_{\text{tr}} > 0$ が存在して,

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma_N; \mathbb{R}^3)}^2 \leq C_{\text{tr}} \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega_c; \mathbb{R}^{3 \times 3}_{\text{sym}})}^2,$$

を援用している. このアприオリ評価により, Brouwer の不動点定理を用いて, 正則化された非線形方程式の解, すなわち (III.3) の近似解, $(\mathbf{u}^{k,\delta}, (T^{k,\delta})^*, p^{k,\delta})$ の存在が確かめられる.

最後に, 上で得られた近似解のアприオリ評価から, $k \rightarrow \infty$ と $\delta \rightarrow 0$ として, 近似解が求める解 (\mathbf{u}, T^*, p) に収束すること, およびアприオリ評価 (III.7)–(III.8) が示される. ここでは, Korn–Poincaré の不等式 (III.9) や $\mathcal{F}(p)$ の擬単調性 (III.6) が重要な役割を果たしている.

本稿では, コンクリートや岩石などの多孔性媒質を記述する弾性体モデルとして, 線形化された歪みテンソルが圧力 (ここでは平均垂直応力の意味) に依存するモデルを考察した. 定理 1 では, $\mathcal{F}(p)$ が (III.4)–(III.6) をみたしていれば, 解の存在が保証されることを示しているが, そうでない場合には, $\mathcal{F}(p)$ を閾値で正則化したモデルを考えることによって, 境界値問題の解の存在性を示すことができる ([5], [6] 参照). また, [7] において, 本稿で取り組んだ (II.3) のモデルを下記のような一般化した圧縮性 Kelvin–Voigt 粘弾性体へ拡張し, 数学解析をおこなった

$$\alpha_1(1 + \lambda_1 \text{tr} T) \varepsilon + \alpha_2(1 + \lambda_2 \text{tr} T) (\partial_t \varepsilon) = T + (\alpha_3 \text{tr} \varepsilon + \alpha_4 \text{tr} (\partial_t \varepsilon)) I.$$

この形式の特別な場合についての閾値モデルを考えた結果, 対応する境界値問題の解の適切性を示した. 今後も多孔質材料を記述する弾性係数が平均垂直応力に依存する様々な数理モデルの定性理論を構築し, 工学への応用を目指す.

参考文献

- [1] G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1967.
- [2] Y.C. ファン (大橋義夫, 村上澄男, 神谷紀生 訳) 『固体の力学/理論』培風館, 1970 年.
- [3] 石川博将 『固体の非線形力学』養賢堂, 2000 年.
- [4] H. Itou, V.A. Kovtunenکو and K.R. Rajagopal, “Well-posedness of the problem of non-penetrating cracks in elastic bodies whose material moduli depend on the mean normal stress”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 136, 2019, pp. 17-25.
- [5] H. Itou, V.A. Kovtunenکو and K.R. Rajagopal, “On an Implicit Model Linear in Both Stress and Strain to Describe the Response of Porous Solids”, *Journal of Elasticity*, Vol. 144, 2021, pp. 107-118.

- [6] H. Itou, V.A. Kovtunenکو and K.R. Rajagopal, “Investigation of implicit constitutive relations in which both the stress and strain appear linearly, adjacent to non-penetrating cracks”, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 32, 2022, pp. 1475-1492.
- [7] H. Itou, V.A. Kovtunenکو and K.R. Rajagopal, “A generalization of the Kelvin-Voigt model with pressure-dependent moduli in which both stress and strain appear linearly”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2023, pp. 1-14, DOI: 10.1002/mma.9417.
- [8] H. Itou, V.A. Kovtunenکو and E.M. Rudoy, “Three-field mixed formulation of elasticity model non-linear in the mean normal stress for the problem of non-penetrating cracks in bodies” , *Applications in Engineering Science*, Vol. 7, 2021, 100060.
- [9] A.M. Khludnev and V.A. Kovtunenکو, *Analysis of Cracks in Solids*, Southampton-Boston: WIT Press, 2000.
- [10] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ (佐藤常三, 石橋善弘 訳) 『弾性理論』東京図書, 1989 年.
- [11] A.E.H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., New York: Dover Publication, 1944.
- [12] 仲座栄三 『物質の変形と運動の理論』ポーターインク, 2005 年.
- [13] K.R. Rajagopal, “Elasticity of elasticity”, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 58, 2007, pp. 309-317.
- [14] K.R. Rajagopal, “Remarks on the notion of “pressure””, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 71, 2015, pp. 165-172.
- [15] L.I. セドフ (大橋義夫 訳) 『連続体力学 1-4』森北出版, 1979 年.
- [16] A.J.M. Spencer, “Theory of Invariants”, in A.C. Eringen (Ed.), *Continuum Physics*, Vol. 1, New York: Academic Press, 1971, pp. 239-353.