von Neumann 環における非可換 Hardy 空間について

大 和 田　智 義

概　要

von Neumann 環 M の σ-弱閉部分環として，非可換 Hardy 空間の概念が複数存在するが，ここでは Arveson スペクトルを用いて与えられる解析解析的部分環および接合積の部分環である解析的接合積を扱う．特に，解析的接合積を含む σ-弱閉部分環の構造解析を詳細に解説することで，これら 2 つの非可換 Hardy 空間の関係を述べている．実際に，Solel は解析的部分環を含む σ-弱閉部分環は，ふたたび解析的部分環であることを示しているが，解析的接合積を含む σ-弱閉部分環については一般に解析的接合積にならないことを示した．また，局所コンパクト可換群として $\mathbb{R}$, あるいは可換な離散群として $\mathbb{Z}$ を考えたとき，これらに関する解析的接合積は，その双対作用により解析的部分環となるが知られていたが，ここではこれらの結果を一般の局所コンパクト可換群の場合に拡張するとともに，解析的部分環が解析的接合積となるための必要十分条件を与えた．さらに，解析的部分環は常に解析的接合積となるかを問題とし，否定的な結果を与えている．

はじめに

このたびは，日本大学経済学部の松岡勝男教授の退職記念号に寄稿する機会を与えていただき，心より感謝いたします．松岡先生と私は，本来であれば専門分野が異なるため，知り合う機会がなかった可能性もありますが，私の恩師であります，新潟大学名誉教授の斎藤吉助先生を通じて初めてお会いした際に，お互いに甘味が好物であることに意気投合して以来，大変良くしていただいております．私と松岡先生をつなぐ数学的背景として，Hardy 空間の理論があったことは疑う余地がありません．そこで本稿では，松岡先生へ感謝の意を込めて，作用素環論における非可換な Hardy 空間に関する幾つかの話題について紹介させていただければと思います．この場をお借りして，これからますますのご活躍を祈りつつ，あらためてこれまでのご厚意に感謝申し上げます．

1　序　論

単位円 $\mathbb{T}$ 上の Hardy 空間 $H^p(\mathbb{T})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ の定義については幾つかの流儀が知られている．例えば，$L^p(\mathbb{T})$ の元 f に対する Fourier 級数展開

$$f(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta$$

において f のスペクトル $\mathrm{Sp}(f)$ を

$$\mathrm{Sp}(f) = \{n \in \mathbb{Z} \mid c_n \neq 0\}$$

により与えるとき $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$ とおけば，Hardy 空間 $H^p(\mathbb{T})$ は

$$H^p(\mathbb{T}) = \{f \in L^p(\mathbb{T}) \mid \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{Z}_+\}$$

によって定義される．Hardy 空間の理論を作用素環論として取り扱う，いわゆる非可換 Hardy 空間の研究は 1958 年の Helson-Lowdenslager [3] による正則行列値関数からなる空間の研究を起源とする．その後，先の流儀に従う非可換 Hardy 空間として，von Neumann 環 M および M の σ-弱連続一径数 $*$-自己同型群 $\alpha = \{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ に関する解析的部分環 $H^\infty(\alpha)$ が

$$H^\infty(\alpha) = \{x \in M \mid \mathrm{Sp}_\alpha(x) \subset \mathbb{Z}_+\}$$

と導入されて，不変部分空間の構造や部分環としての極大性，そして $H^\infty(\alpha)$ を含む部分環の構造など多くの結果が得られている．ここで $\mathrm{Sp}_\alpha(x)$ は M の元 x の α に関する Arveson スペクトルとする．その後この理論は，局所コンパクト可換群 G に関する M の σ-弱連続一径数 $*$-自己同型群 $\alpha = \{\alpha_g\}_{g\in G}$ および G の双対群 $\hat{G}$ の正半群 $\hat{G}_+$ について

$$H^\infty(\alpha) = \left\{x \in M \mid \mathrm{Sp}_\alpha(x) \subset \hat{G}_+\right\}$$

と拡張された (cf. [4, 7–9, 11–16]).

一方で，von Neumann 環 N と局所コンパクト可換群 G の双対群 $\hat{G}$ に関する σ-弱連続一径数 $*$-自己同型群 $\hat{\alpha} = \{\hat{\alpha}_{\hat{g}}\}_{\hat{g}\in\hat{G}}$ について，N の $\hat{\alpha}$ に関する接合積 $N \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$ は，$\hat{\alpha}$ が内部的，すなわち各 $\hat{g} \in \hat{G}$ に対して，N のユニタリ作用素 $u_{\hat{g}}$ が存在して $\hat{\alpha}_{\hat{g}}(x) = u_{\hat{g}} x u_{\hat{g}}^*$ であるとき，N と $L^\infty(G)$ のテンソル積 $N \otimes L^\infty(G)$ と同型となる．このとき，N の $\hat{\alpha}$ に関する解析的接合積 $N \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}_+$ は $N \otimes H^\infty(G)$ と同型であることから，解析的接合積 $N \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}_+$ は Hardy 空間 $H^\infty(G)$ の非可換版と考えられる．

本稿では，これら 2 つの非可換な Hardy 空間として，解析的部分環および解析的接合積の関係を詳細に解説することを目的とする．

2　非可換 Hardy 空間の定義と基本的性質

本章では，von Neumann 環の非可換 Hardy 空間として，解析的部分環および解析的接合積の定義を与える．まずは，von Neumann 環の定義から始める．複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体が作る環を $B(\mathcal{H})$ とするとき，$B(\mathcal{H})$ は対合 $x \to x^*$ をもつ Banach 環である．$B(\mathcal{H})$ の部分環 M の任意の元 x について $x^* \in M$ を満たすとき，M は $*$ 演算で閉じているといい，$*$ 演算で閉じている環を $*$ 環という．$B(\mathcal{H})$ の元 x をとるとき，任意の $\mathcal{H}$ の元 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ および $\eta_1, \eta_2, \cdots$ で $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\xi_n\|^2 < \infty$，$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\eta_n\|^2 < \infty$ を満たすものに対して，

$$x \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(x\xi_n, \eta_n)|$$

は半ノルムとなる．この半ノルムによって定義される局所凸位相を σ-弱位相と呼ぶ．単位元 I を含む $B(\mathcal{H})$ の $*$ 部分環 M が σ-弱位相で閉じているとき，M を von Neumann 環と呼ぶ．$B(\mathcal{H})$ の部分集合 S に対して，S の commutant S' を $S' = \{y \in B(\mathcal{H}) \mid \forall x \in S, xy = yx\}$ により定義するとき，良く知られているように M が von Neumann 環であることと，$M = M''$ であることは同値である．von Neumann 環 M に対して，$M \cap M'$ を M の中心と呼び，記号 $Z(M)$ で表し，特に $Z(M) = \mathbb{C}I$ であるとき，M を factor と呼ぶ.

次に，von Neumann 環の部分環として，非可換 Hardy 空間を定義する．以後，特に断らない限り，G を局所コンパクト可換群とするが，必要に応じてコンパクト可換群とする場合があることに注意する．$\hat{G}$ を G の双対群, m を G のハール測度とし，$L^1(G)$ の元 f のフーリエ変換を

$$\hat{f}(\hat{h}) = \int_G \langle g, \hat{h} \rangle f(g)\, dm(g) \quad (\hat{h} \in \hat{G})$$

とする．また，$\hat{G}$ は正半群 $\hat{G}_+$ をもつものとする．ここで正半群 $\hat{G}_+$ とは，$\hat{G}_+ + \hat{G}_+ \subset \hat{G}_+$ および以下の (i), (ii), (iii) を満たすものとする．

(i) $\hat{G}_+ \cap \hat{G}_+ = \{\hat{0}\}$
(ii) $\hat{G}_+$ はその内点の閉包
(iii) $\hat{G}_+ \cup \hat{G}_+ = \hat{G}$

このとき，$\hat{g}, \hat{h} \in \hat{G}$ に対して $\hat{g} \geq \hat{h}$ であることを $\hat{g} - \hat{h} \in \hat{G}_+$ により定義すれば，$\hat{G}$ は順序 $\geq$ による全順序集合となる．これらの最も基本的な例として，$G = \hat{G} = \mathbb{R}$ のとき，正半群 $\hat{G}_+$ は $[0, \infty)$ である (以後，$[0, \infty)$ を $\mathbb{R}_+$ で表す)．また，G がコンパクト可換群 $\mathbb{T}$ であるとき，その双対群および正半群はそれぞれ $\hat{G} = \mathbb{Z}$，$\hat{G}_+ = \mathbb{Z}_+$ であることに注意する．

M を von Neumann 環とし，$\alpha = \{\alpha_g\}_{g\in G}$ を M の σ-弱連続一径数 $*$-自己同型群とするとき，α を G の M への作用といい，(M, α, G) の組を G 上の共変系とよび，M の α に関する不動点環 $\{x \in M \mid \alpha_g(x) = x\ (g \in G)\}$ を M^α で表す．任意の $f \in L^1(G)$ に対して，$\alpha(f)$ を

$$\alpha(f)(x) = \int_G f(g)\alpha_g(x)\ dm(g) \qquad (x \in M)$$

により定義する．M の元 x をとり固定するとき

$$I_\alpha(x) = \left\{f \in L^1(G) \mid \alpha(f)(x) = 0\right\}$$

とすれば，$I_\alpha(x)$ は $L^1(G)$ の閉イデアルになる．このとき，x の α に関する Arveson スペクトル $\mathrm{Sp}_\alpha(x)$ は

$$\mathrm{Sp}_\alpha(x) = \left\{\hat{p} \in \hat{G} \mid \hat{f}(\hat{p}) = 0\ (f \in I_\alpha(x))\right\}$$

により定義される．Arveson スペクトルの基本的性質としては以下が成立する．(cf. [17, Proposition 14.2]): 任意の $x, y \in M$ および $f \in L^1(G)$ に対して，

(i) $\mathrm{Sp}_\alpha(x) = \{\varnothing\} \Leftrightarrow x = 0$
(ii) $\mathrm{Sp}_\alpha(\alpha_g(x)) = \mathrm{Sp}_\alpha(x)\ (g \in G)$
(iii) $\mathrm{Sp}_\alpha(xy) \subseteq \overline{\mathrm{Sp}_\alpha(x) + \mathrm{Sp}_\alpha(y)}$
(iv) $\mathrm{Sp}_\alpha(\alpha(f)(x)) \subseteq \mathrm{supp}\hat{f} \cap \mathrm{Sp}_\alpha(x)$, ここで $\mathrm{supp}\hat{f}$ は $\hat{f}$ の $\hat{G}$ における台とする.

$\hat{G}$ の任意の部分集合 E に対して，M の α および E に関するスペクトル部分空間 $M^\alpha(E)$ を

$$M_0^\alpha(E) = \{x \in M \mid \mathrm{Sp}_\alpha(x) \subseteq E\}.$$

の σ-弱閉包として定義する．特に，E が $\hat{G}$ の閉集合ならば，$M^\alpha(E) = M_0^\alpha(E)$ である (cf. [17, Proposition 14.3])．このとき，非可換 Hardy 空間として，M の α および $\hat{G}_+$ に関する解析的部分環 $H^\infty(\alpha)$ を

$$\begin{aligned} H^\infty(\alpha) &= M^\alpha(\hat{G}_+) \\ &= \left\{x \in M \mid \mathrm{Sp}_\alpha(x) \subseteq \hat{G}_+\right\}. \end{aligned}$$

により与えれば，$H^\infty(\alpha)$ は単位元を含む M の σ-弱閉部分環であり，$H^\infty(\alpha) + H^\infty(\alpha)^*$ が M で σ-弱稠密かつ

$$H^\infty(\alpha) \cap H^\infty(\alpha)^* = M^\alpha(\{\hat{0}\}) = M^\alpha$$

を満たす (cf. [5])．また，$\hat{G}$ の任意の元 $\hat{h}$ に対して，次が成立することも知られている．

$$M^\alpha(\{\hat{h}\}) = \left\{ x \in M \mid \alpha_g(x) = \langle g, \hat{h} \rangle x \ (g \in G) \right\}.$$

例 2.1. $G = \mathbb{T}, \ \hat{G} = \mathbb{Z}$ のとき，正半群は $\hat{G}_+ = \mathbb{Z}_+$ である．*von Neumann* 環 M を $L^\infty(\mathbb{T})$ とするとき M の任意の元 f に対して

$$(\alpha_{e^{it}}(f))(e^{is}) = f(e^{i(t+s)})$$

とすれば，$\alpha = \{\alpha_{e^{it}}\}_{e^{it} \in \mathbb{T}}$ は $G = \mathbb{T}$ の M への作用であり，このとき解析的部分環 $H^\infty(\alpha)$ は古典的 *Hardy* 空間 $H^\infty(\mathbb{Z})$ と一致して，$M^\alpha = \mathbb{C}1$ となる．

次に，もう一つの非可換 Hardy 空間として，接合積の σ-弱閉部分環として解析的接合積の定義を与える．N をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環とする．このとき，N の元 x に対して，ヒルベルト空間 $L^2(\hat{G}, \mathcal{H}) = \left\{ f : \hat{G} \to \mathcal{H} \mid \int_{\hat{G}} \|f(\hat{g})\|^2 \, dm(\hat{g}) < \infty \right\}$ 上の作用素 $\pi_\alpha(x), \ \lambda(\hat{g})$ をそれぞれ

$$\{\pi_\alpha(x)\xi\}(\hat{g}) = \alpha_{-\hat{g}}(x)\xi(\hat{g}) \quad (\xi \in L^2(\hat{G}, \mathcal{H}), \ \hat{g} \in \hat{G}),$$

および

$$\{\lambda(\hat{g})\xi\}(\hat{h}) = \xi(\hat{h} - \hat{g}) \quad (\xi \in L^2(\hat{G}, \mathcal{H}), \ \hat{h}, \hat{g} \in \hat{G})$$

により与える．離散群 G の場合も同様に, ヒルベルト空間 $\ell^2(\hat{G}, \mathcal{H}) = \left\{ \xi : \hat{G} \to \mathcal{H} \mid \sum_{\hat{g} \in \hat{G}} \|\xi(\hat{g})\|^2 < \infty \right\}$ 上の作用素 $\pi_\alpha(x), \ \lambda(\hat{g})$ が定義されることに注意する．このとき，$\pi_\alpha(N) = \{\pi_\alpha(x)\}_{x \in N}$ および $\lambda(\hat{G}) = \{\lambda(\hat{g})\}_{\hat{g} \in \hat{G}}$ により生成される von Neumann 環 $\{\pi_\alpha(N), \lambda(\hat{G})\}''$ を N の $\hat{G}$ による α に関する接合積とよび, 記号 $N \rtimes_\alpha \hat{G}$ で表す．また，$\pi_\alpha(N)$ および $\{\lambda(\hat{g})\}_{\hat{g} \in \hat{G}_+}$ により生成される $N \rtimes_\alpha \hat{G}$ の σ-弱閉部分環を N と α で定まる解析的接合積とよび $N \rtimes_\alpha \hat{G}_+$ と表す．G の $L^2(\hat{G}, \mathcal{H})$ 上への表現 $V(\cdot)$ を

$$(V(g)\xi)(\hat{h}) = \langle \hat{h}, g \rangle \xi(\hat{h}) \qquad (g \in G, \ \hat{h} \in \hat{G}, \ \xi \in L^2(\hat{G}, \mathcal{H})).$$

で与えるとき，G の $N \rtimes_\alpha \hat{G}$ 上の作用として $\tilde{\alpha}$ が

$$\tilde{\alpha}_g(x) = V(g)xV(g)^* \qquad (x \in N \rtimes_\alpha \hat{G}, \ g \in G)$$

により与えられる．この $\tilde{\alpha}$ を α の双対作用といい，接合積および双対作用からなる共変系 $(N \rtimes_\alpha \hat{G}, \tilde{\alpha}, G)$ を双対共変系と呼ぶ.

これら 2 つの非可換 Hardy 空間について，以下のことが知られている (cf. [7,10]).

注意 2.2. $G = \hat{G} = \mathbb{R}, \ \hat{G}_+ = \mathbb{R}_+$ とするとき，解析的接合積 $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ は 解析的部分環と一致する．すなわち，$M = N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ とおけば,

$$N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+ = M^{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+) = H^\infty(\tilde{\alpha})$$

である．同様に，$G = \mathbb{T}$, $\hat{G} = \mathbb{Z}$, $\hat{G}_+ = \mathbb{Z}_+$ の場合は，$N \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_+ = H^\infty(\tilde{\alpha})$ が成立する．

これらの結果の一般化として，以下が成立する．

命題 2.3. N を *von Neumann* 環として，α を局所コンパクト可換群，または可換離散群 $\hat{G}$ の N への作用とする．このとき，解析的接合積 $N \rtimes_\alpha \hat{G}_+$ は $M = N \rtimes_\alpha \hat{G}$ の双対作用 $\tilde{\alpha}$ および $\hat{G}_+$ に関する解析的部分環 $H^\infty(\tilde{\alpha})$ と一致する．特に，$\hat{G}$ が離散群でなければ，

$$H^\infty(\tilde{\alpha}) = N \rtimes_\alpha \hat{G} = H_0^\infty(\tilde{\alpha})$$

が成立する．ここで，$H_0^\infty(\tilde{\alpha}) = M^{\tilde{\alpha}}(\hat{G}_+ \backslash \{\hat{0}\})$ とする．

命題 2.3 より，解析的接合積はその双対作用による解析的部分環であるが，次に解析的部分環がいつ解析的接合積となるかを考察する．そのために，少し準備が必要である．

G 上の 2 つの共変系 (M, α, G) および (D, β, G) が同型であるとは，M から D への同型写像 Φ が

$$\Phi \circ \alpha_g = \beta_g \circ \Phi \qquad (g \in G)$$

となるように存在するときをいう．同様に，M, D の部分環をそれぞれ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ とするとき，(M, α, G) および (D, β, G) の部分共変系 $(\mathfrak{A}, \alpha, G)$ および $(\mathfrak{B}, \beta, G)$ に対して M から D の上の同型写像 Φ が存在して，

$$\Phi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B} \text{ かつ } \Phi \circ \alpha_g = \beta_g \circ \Phi \qquad (g \in G),$$

を満たすとき，部分共変系 $(\mathfrak{A}, \alpha, G)$ および $(\mathfrak{B}, \beta, G)$ は同型であるという．

一般に，共変系 (M, α, G) および (D, β, G) が与えられたとき，単に von Neumann 環 M と D が同型であるだけでは，それぞれの部分環の関係を知ることは困難であるが，作用も含めた共変系として同型である場合，それぞれの解析的部分環も同型となる．すなわち，以下が成立する．

命題 2.4. 共変系 (M, α, G) および (D, β, G) が同型であるとき，M から D への同型写像を Φ とすれば，任意の $x \in M$ に対して，$\mathrm{Sp}_\alpha(x) = \mathrm{Sp}_\beta(\Phi(x))$ が成立する．このとき，共変系 (M, α, G) および (D, β, G) それぞれの部分共変系 $(H^\infty(\alpha), \alpha, G)$ および $(H^\infty(\beta), \beta, G)$ は同型である．

Landstad は，[6] において共変系 (M, α, G) が双対共変系 $(N \rtimes_\theta \hat{G}, \tilde{\theta}, G)$ と同型になるための必要十分条件を与えている．ここではその類似として，部分共変系の同型問題について以下の結果を得た．

定理 2.5. (cf [17, Theorem 19.9]) 共変系 (M, α, G) の部分共変系 $(H^\infty(\alpha), \alpha, G)$ が，ある双対共変系 $(N \rtimes_\theta \hat{G}, \tilde{\theta}, G)$ の部分共変系 $(N \rtimes_\theta \hat{G}_+, \tilde{\theta}, G)$ と同型になることの必要十分条件は，$\hat{G}$ の M への強連続ユニタリ表現 $u(\cdot)$ が存在して，全ての $\hat{g} \in \hat{G}$ に対して，

$$\mathrm{Sp}_\alpha(u(\hat{g})) = \{\hat{g}\}$$

を満たすことである．

例 2.6. [11, Theorem 2.2] ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の *von Neumann* 環 N およびユニタリ作用素 v が $vNv^* = N$ を満たすとき，N および v で生成されるフォンノイマン環を M とし，N および $\{v^n\}_{n\geq 0}$ で生成される M の σ-弱閉部分環を $\mathfrak{A}$ とする．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathfrak{M}$ が $\mathfrak{A}$-不変とは $\mathfrak{A}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ を満たすときをいい, $\mathfrak{M}$ が *reducing* とは $M\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ を満たすときをいう．$\mathfrak{M}$ が自明でない *reducing* 部分空間を持たないとき *pure* といい，$\mathfrak{M}$ を含む最小の *reducing* 部分空間は $\mathcal{H}$ であるとき *full* という．もしも，*pure* かつ *full* である $\mathfrak{A}$-不変な $\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathfrak{M}$ が存在するならば，M の $*$-自己同型群 $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ が $\alpha_t(v) = e^{-it}v$ $(t \in \mathbb{T})$ を満たすように存在する．このとき $\mathfrak{A} = H^\infty(\alpha) = M^\alpha(\mathbb{Z}_+)$ であり，N の $*$-同型写像 θ を $\theta(x) = vxv^*$ $(x \in N)$ により与えれば，部分共変系 $(\mathfrak{A}, \alpha, \mathbb{T})$ は，双対共変系 $(N \rtimes_\theta \mathbb{Z}, \tilde{\theta}, \mathbb{T})$ の部分共変系 $(N \rtimes_\theta \mathbb{Z}_+, \tilde{\theta}, \mathbb{T})$ と同型となる．

3　非可換 Hardy 空間を含む部分環

本章では，共変系 $(M, \alpha, \mathbb{R})$ に関する非可換 Hardy 空間 $H^\infty(\alpha)$ を含む σ-弱閉部分環の構造についてまとめる．Solel は [16] で非可換 Hardy 空間を含む全ての σ-弱閉部分環は，非可換 Hardy 空間となることを示した．

定理 3.1. [16, Theorem 2.19] 共変系 $(M, \alpha, \mathbb{R})$ に対して，$\mathfrak{B}$ を $H^\infty(\alpha)$ を含む M の σ-弱閉部分環とする．このとき，射影作用素 $F \in Z(M) \cap M^\alpha$ および $Z(M^\alpha)$ の強連続ユニタリ群 $\{v_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が存在して，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\gamma_t(x) = \begin{cases} x & (x \in MF) \\ v_t^* \alpha_t(x) v_t & (x \in M(I-F)) \end{cases}$$

により与えられる $\mathbb{R}$ の M の上への作用 γ によって，$\mathfrak{B} = H^\infty(\gamma)$ となる．

この結果の類似として，非可換 Hardy 空間を解析的接合積 $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ で考えるとき，$N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ を含む σ-弱閉部分環はふたたび解析的接合積として表されるかという問題が自然に生じる．解析的接合積 $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ は双対作用 $\tilde{\alpha}$ に関する非可換 Hardy 空間 $H^\infty(\tilde{\alpha})$ であったので，定理 3.1 から $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ を含む σ-弱閉部分環は解析的部分環であることに注意する．

以後，双対共変系 $(N \rtimes_\alpha \mathbb{R}, \tilde{\alpha}, \mathbb{R})$ について $M = N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ とおく．このとき $\mathfrak{B}$ を $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ を含む M の σ-弱閉部分環として，$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}^*$ とおく．

まずは，解析的接合積 $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ を含む σ-弱閉部分環の構造について，以下が成立する．

定理 3.2. 双対共変系 $(N \rtimes_\alpha \mathbb{R}, \tilde{\alpha}, \mathbb{R})$ について $M = N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ とし，$C = \pi_\alpha(N) \cap Z(M)$ とする．このとき $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ を含む M の σ-弱閉部分環 $\mathfrak{B}$ に対して，C の射影作用素 P および $\pi_\alpha(Z(N))$ の強連続ユニタリ群 $\{v_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が存在して，以下の (i), (ii) を満たす．

(i) $\mathfrak{B}P = (N \rtimes_\alpha \mathbb{R})P$

(ii) $\mathfrak{B}(I-P) = (M^\gamma[0,\infty))(I-P)$ ここで

$$\gamma_t(x) = v_t^* \tilde{\alpha}_t(x) v_t \qquad (x \in M(I-P)).$$

特に，各 $t \in \mathbb{R}$ に対して β を

$$\beta_t(x) = \begin{cases} x & (x \in MP) \\ v_t^* \tilde{\alpha}_t(x) v_t & (x \in M(I-P)), \end{cases}$$

により与えれば，β は $\mathbb{R}$ の M の上への作用であり

$$\mathfrak{B} = H^\infty(\beta) = M^\beta(\mathbb{R})$$

を満たす.

いま，$M = N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ の元 $\lambda(t)$ は

$$\{\lambda(t)\xi\}(s) = \xi(s-t) \quad (\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}),\ s,t \in \mathbb{R})$$

で与えられていたが，$x \in M$ に対して $\theta_t(x) = \lambda(t)x\lambda(t)^*$ $(t \in \mathbb{R})$ と定めれば，$M = N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ の生成元 $\{\pi_\alpha(x)\}_{x\in N}$ および $\{\lambda(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ に対して

$$\theta_t(\pi_\alpha(x)) = \pi_\alpha(\alpha_t(x)), \quad \theta_t(\lambda(s)) = \lambda(s) \qquad (x \in N,\ s,t \in \mathbb{R}).$$

が成立する．よって $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は M の一径数 $*$-自己同型群である．ここで M の部分環 $\mathfrak{C}$ に対して，すべての $x \in \mathfrak{C}$ および $t \in \mathbb{R}$ において $\theta_t(x)$ が $\mathfrak{C}$ の元となるとき，$\mathfrak{C}$ は θ 不変であるといい，$\theta_t(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C}$ $(t \in \mathbb{R})$ で表す.

$G = \mathbb{T}$, $\hat{G} = \mathbb{Z}$ の場合，McAsey-Muhly-Saito は [8] で解析的接合積 $N \rtimes_\beta \mathbb{Z}_+$ を含む $M = N \rtimes_\beta \mathbb{Z}$ の σ-弱閉部分環 $\mathfrak{B}$ は，$Z(N)$ の任意の元 x が $\beta(x) = x$ を満たすならば，$\pi_\beta(Z(N))$ の射影作用素 P が存在して

$$\mathfrak{B} = MP \oplus (N \rtimes_\beta \mathbb{Z}_+)(I-P),$$

であることを示した．$G = \mathbb{R}$, $\hat{G} = \mathbb{R}$ の場合，まず次が成立する.

定理 3.3.　定理 *3.2* および上で定めた記号のもとで，以下は同値である.

(i) $\theta_t(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \quad (t \in \mathbb{R})$.

(ii) $\gamma_t(\lambda(s)(I-P)) = e^{-ist}\lambda(s)(I-P) \quad (s,t \in \mathbb{R})$.

このとき $\mathfrak{B} = MP \oplus (N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+)(I-P)$ となる.

定理 3.3 より直ちに以下が得られる.

系 3.4. $\mathfrak{B}$ は $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ を含む $M = N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ の σ-弱閉部分環であるとする．このとき，任意の $t \in \mathbb{R}$ および $x \in Z(N)$ に対して，$\alpha_t(x) = x$ が成り立つならば，$\pi_\alpha(N) \cap Z(M)$ の元として射影作用素 P が存在して

$$\mathfrak{B} = MP \oplus (N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+)(I-P)$$

を満たす．

例 3.5. 共変系 $(N, \alpha, \mathbb{R})$ について α が内部的，すなわち N の強連続ユニタリ群 $\{v_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が存在して，任意の N の元 x および $t \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha_t(x) = v_t x v_t^*$ を満たすならば $Z(N)$ の元 x について $\alpha_t(x) = v_t x v_t^* = v_t v_t^* x = x$ となるので系 *3.4* の仮定を満たす．よって $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ を含む $M = N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ の σ-弱閉部分環 $\mathfrak{B}$ に対して $\pi_\alpha(N) \cap Z(M)$ の射影作用素 P が存在して

$$\mathfrak{B} = MP \oplus (N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+)(I-P)$$

となる．ただし，α が内部的であるとき $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ は $N \otimes L^\infty(\mathbb{R})$ と同型であり，この同型対応により $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ は $N \otimes H^\infty(\mathbb{R})$ と同型となっていることに注意する．

von Neumann 環 M の σ-弱閉部分環 $\mathfrak{B}$ が σ-弱閉部分環として極大であるとは，$\mathfrak{B}$ を真に含む M の σ-弱閉部分環は M だけである場合をいう．Muhly-Saito は [10] で解析的接合積 $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ が $M = N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ の σ-弱閉部分環として極大であるための必要十分条件は，N が factor であることを不変部分空間の理論を用いて示した．系 3.4 は Muhly-Saito による方法とは異なるアプローチによって，N が factor であるならば，$N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ は $M = N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ の σ-弱閉部分環として極大であることを主張する．

実際に N が factor，すなわち $Z(N) = \mathbb{C}I$ であるならば，任意の $t \in \mathbb{R}$ および $x \in Z(N)$ に対して，$\alpha_t(x) = x$ が明らかに成り立つので，系 3.4 より $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ を真に含む M の σ-弱閉部分環 $\mathfrak{B}$ に対して $\pi_\alpha(N) \cap Z(M)$ の射影作用素 P が存在して

$$\mathfrak{B} = MP \oplus (N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+)(I-P)$$

を満たす．さらに $\pi_\alpha(N) \cap Z(M) \subset Z(N)$ であることに注意すると，P は $Z(N)$ に属するので $P = I$ となる．故に $\mathfrak{B} = M$ であるから $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ は M の σ-弱閉部分環として極大である．以上より次が成立する．

系 3.6. 共変系 $(N, \alpha, \mathbb{R})$ について，N が *factor* であるならば $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ は $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ の σ-弱閉部分環として極大である．

最後に，解析的接合積はその双対作用による解析的部分環であったが，逆に解析的部分環は解析的接合積になるかについて考察する．

共変系 $(N, \alpha, \mathbb{R})$ について，α が N の中心でエルゴード的であるとは，$Z(N)$ の α での不動点環 $Z(N)^\alpha$ が $Z(N)^\alpha = \mathbb{C}I$ を満たすときをいい，α が N の中心でエルゴード的であり，かつ

$Z(N)^\alpha = Z(N)$ を満たすことと，N が factor であることが同値であることは容易に確かめることができる．よって，α が N の中心でエルゴード的であり, かつ $Z(N)^\alpha \neq Z(N)$ であるとき，$Z(N)^\alpha = \mathbb{C}I$ であるが N は factor ではない．このとき，解析的接合積 $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ は極大ではないので $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ を含む $M = N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ に含まれる σ-弱閉部分環 $\mathfrak{B}$ が存在する．このとき,

$$N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+ \subsetneq \mathfrak{B} \subsetneq N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$$

であることに注意する．仮に $\mathfrak{B}$ が θ-不変であるとすれば，$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}^*$ も θ-不変であるから，定理 3.3 より $\pi_\alpha(Z(N)^\alpha)$ の射影作用素 P が存在して $\gamma_t(\lambda(s)(I-P)) = e^{-ist}\lambda(s)(I-P) \quad (s,t \in \mathbb{R})$ であり，このとき $\mathfrak{B} = MP \oplus (N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+)(I-P)$ となる．しかし，P は $\pi_\alpha(Z(N)^\alpha)$ の射影作用素であるから $P = 0$ または $P = I$ となるので，いずれの場合も $\mathfrak{B}$ が

$$N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+ \subsetneq \mathfrak{B} \subsetneq M$$

であることに矛盾する．故に，$\mathfrak{B}$ は θ-不変でないことが分かる．更にこのとき，部分共変系 $(\mathfrak{B}, \tilde{\alpha}, \mathbb{R})$ が，ある部分双対共変系 $(D \rtimes_\beta \mathbb{R}_+, \tilde{\beta}, \mathbb{R})$ と同型であると仮定すれば，$D \rtimes_\beta \mathbb{R}_+$ は θ-不変であるから，$\mathfrak{B}$ も θ-不変となり矛盾する．

以上をまとめると，以下のことが分かる．ただし, $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ を含む $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ の σ-弱閉部分環は $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ および $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ と等しくないものとする．

定理 3.7. 共変系 $(N, \alpha, \mathbb{R})$ について，α が N の中心でエルゴード的であり, かつ $Z(N)^\alpha \neq Z(N)$ であるとする．このとき，$N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ を含む $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ の σ-弱閉部分環 $\mathfrak{B}$ が $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ および $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ と等しくないならば，次の (i), (ii) が成立する．

(i) $\mathfrak{B}$ は θ-不変ではない

(ii) 部分共変系 $(\mathfrak{B}, \tilde{\alpha}, \mathbb{R})$ は，いかなる部分双対共役系とも同型でない

定理 3.7 より, 共変系 $(N, \alpha, \mathbb{R})$ について, α が N の中心でエルゴード的であり, かつ $Z(N)^\alpha \neq Z(N)$ であるとき, $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ を含む $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ の σ-弱閉部分環 $\mathfrak{B}$ で $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}_+$ および $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ と等しくないとき，$\mathfrak{B}$ は解析的接合積にならないが，一方で定理 3.1 より $\mathfrak{B}$ は解析的部分環になることが分かる．III$_\lambda$ $(0 \leq \lambda < 0)$ 型の factor により，定理 3.7 の仮定を満たす例が実際に構成出来るので，2 つの非可換 Hardy 空間として解析的部分環および解析的接合積の関係および，それらを含む部分環の構造に関する幾つかの疑問が解決した．すなわち，解析的接合積はいつも解析的部分環となるが，解析的部分環で解析的接合積にならないものが存在する．また, 解析的部分環を含む σ-弱閉部分環はいつも解析的部分環になるが，析的接合積を含む σ-弱閉部分環は解析的接合積になるとは限らないことが示された．

参考文献

[1] W.B. Arveson, *Analyticity in operator algebras,* Amer. J. Math. **89** (1967), 578–642.

[2] A. Connes and M. Takesaki, *The flow of weights on a factor of type III,* Tôhoku Math. J. **29** (1977), 473–575.

[3] H. Helson and D. Lowdenslager, *Prediction theory and Fourier series in several variables,* Acta Math. **89** (1958), 165–202.

[4] D. Larson and B. Solel, *Nests and inner flows,* J. Operator Theory **16** (1986), 157–164.

[5] R. I. Loebl and P.S. Muhly, *Analyticity and flows in von Neumann algebras,* J. Funct. Anal. **29** (1978), 214–252.

[6] M. Landstad, *Duality for dual covariant algebras,* Comm. Math. Phys. **52** (1977), 214–252.

[7] M. McAsey, P.S. Muhly and K-S. Saito, *Non-selfadjoint crossed products* (Invariant subspaces and maximality)*,* Trans. Amer. Math. Soc. **248** (1979), 381–409.

[8] M. McAsey, P.S. Muhly and K-S. Saito, *Non-selfadjoint crossed products II,* J. Math. Soc. Japan **33** (1981), 485–495.

[9] M. McAsey, P.S. Muhly and K-S. Saito, *Non-selfadjoint crossed products III,* J. Operator Theory **12** (1984), 3–22.

[10] P.S. Muhly and K-S. Saito, *Analytic subalgebras of von Neumann algebras,* Can. J. Math. **39** (1987), 72–99.

[11] T. Ohwada, G. Ji and K-S. Saito, *Invariant subspaces and representations of certain von Neumann algebras,* Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 3501–3510.

[12] K-S. Saito, *Invariant subspaces and cocycles in nonselfadjoint crossed products,* J. Funct. Anal. **45** (1982), 177–193.

[13] B. Solel, *The invariant subspace structure of nonselfadjoint crossed products,* Trans. Amer. Math. Soc. **279** (1983), 825–840.

[14] B. Solel, *On some subalgebras of a von Neumann algebra crossed product,* Trans. Amer. Math. Soc. **281** (1984), 297–308.

[15] B. Solel, *Algebras of analytic operators associated with a periodic flow on a von Neumann algebras,* Can. J. Math. **37** (1985), 405–429.

[16] B. Solel, *Maximality of analytic operator algebras,* Israel J. Math. **62** (1988), 63–89.

[17] S. Strătilă, *Modular theory in operator algebras,* (Abacus Press, Tunbridge, England, 1981).

[18] M. Takesaki, *Theory of operator algebras I,* (Springer-Verlag, Berlin, 2002).

[19] M. Takesaki, *Theory of operator algebras II,* (Springer-Verlag, Berlin, 2003).