アダマール空間における非拡大写像族の共通不動点近似

木　村　泰　紀*

概　要

本論文ではアダマール空間上で定義された非拡大写像族に対し，共通不動点の近似点列を生成する新たな手法を提案する．この手法は従来から知られている収縮射影法に類似しているが，固定点を使用せずに点列を生成するという点で従来の手法とは異なっている．

I　はじめに

非線形解析における重要な研究分野の一つである不動点理論は，従来より研究されてきたヒルベルト空間やバナッハ空間等の，いわゆる関数空間上で定義された写像に対してその不動点の存在について解析するものから，近年では測地距離空間上の写像にまで対象を広げ，盛んに研究されている分野である．とくに，不動点の存在を仮定した上で，その近似法を研究する，いわゆる不動点近似理論についても多くの研究が日々進められている．

距離空間 X 上の写像 $T\colon X \to X$ が非拡大であるとは，任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

をみたすことをいう．とくに X がヒルベルト空間のときには，非拡大写像に対するさまざまな不動点近似法が提案されている．本論文では，とくに距離射影を用いた手法の一つである，収縮射影法に注目する．

収縮射影法による不動点近似法は，Takahashi，Takeuchi，Kubota によって次の定理の形で提案された．

定理 1 (Takahashi, Takeuchi, and Kubota [7])**.** H をヒルベルト空間とし，C を H の空でない閉凸集合とする．$\mathcal{T}$ を C から C への非拡大写像の族とし，ある非拡大写像列 $\{T_n\colon C \to C\}$ に対して

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Fix} T_n = \bigcap_{S \in \mathcal{T}} \operatorname{Fix} S \neq \emptyset$$

* 東邦大学理学部情報科学科

であり，かつ NST 条件 (I) をみたすとする． $x_0 \in H$ に対して，点列 $\{x_n\} \subset C$ と X の部分集合列 $\{C_n\}$ を次のように生成する: $C_1 = C$, $x_1 = P_{C_1}x_0$ とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
y_n &= \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T_n x_n, \\
C_{n+1} &= \bigcap_{i\in I}\{z \in X \mid d(y_n, z) \leq d(x_n, z)\} \cap C_n, \\
x_{n+1} &= P_{C_{n+1}}x_0
\end{aligned}
$$

とする．ただし $\{\alpha_n\}$ は $\sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < 1$ をみたす $[0,1]$ の数列であり，$P_K\colon X \to K$ は X から空でない閉凸集合 K への距離射影である．このとき点列 $\{x_n\}$ は $P_F x_0$ に収束する．

その後この手法は，バナッハ空間へと拡張 [4, 6] され，さらに実ヒルベルト球や，実ヒルベルト空間の単位球面の部分集合等の完備測地距離空間を定義域とした写像に対する不動点近似定理 [2, 5] としても証明されている．

さらに，収縮射影法の類似手法として，[3] では一写像に対する不動点への Δ 収束近似点列が提案された．本論文では，この手法をもとに非拡大写像族に対する共通不動点近似手法を新たに提案し，その Δ 収束性を証明した．

II　準　備

距離空間 X 上の 2 点 $x, y \in X$ に対し，写像 $c_{xy}\colon [0,1] \to X$ が x, y を端点とする測地線であるとは，次の条件をみたすことをいう．

- $c_{xy}(0) = x$, $c_{xy}(1) = y$;
- $s, t \in [0,1]$ に対して $d(c_{xy}(s), c_{xy}(t)) = |s-t|\, d(x,y)$.

任意の 2 点に対してこれらを端点とする測地線が存在するとき，X を測地距離空間という．

一般に，与えられた 2 点 x, y に対してそれらを端点とする測地線は一意に定まるとは限らない．とくに x, y を端点とする測地線 c_{xy} が一意であるとき, c_{xy} の像 $c_{xy}([0,1])$ を $[x,y]$ とあらわす．またこのとき, x と y の凸結合が自然に定義される．すなわち, $t \in [0,1]$ に対して $(1-t)x \oplus ty = c_{xy}(t) \in [x,y]$ と定義する．凸結合の定義から, $w_t = (1-t)x \oplus ty$ は $d(x, w_t) = td(x,y)$ および $d(w_t, y) = (1-t)d(x,y)$ をみたすことが容易にわかる．

凸結合が定義されると，集合の凸性も自然に定義できる．すなわち，$C \subset X$ が凸であるとは，任意の $x, y \in C$ と $t \in [0,1]$ に対して $(1-t)x \oplus ty \in C$ をみたすことである．線形空間の凸集合の場合と同様に, 凸集合の族 $\{C_i\}$ に対して，$\bigcap_{i\in I} C_i$ も凸集合となることも容易にわかる．

測地距離空間 X は，以下の条件をみたすとき CAT(0) 空間と呼ばれる: 任意の $x, y, z \in X$ と x, y を端点とする測地線 c_{xy}, および $t \in [0,1]$ に対して

$$d(c_{xy}(t), z)^2 \le (1-t)d(x,z)^2 + td(y,z)^2 - t(1-t)d(x,y)^2$$

をみたす．X が CAT(0) 空間のときは，任意の 2 点に対する測地線が一意になることが示されるので，この不等式は

$$d((1-t)x \oplus ty, z)^2 \le (1-t)d(x,z)^2 + td(y,z)^2 - t(1-t)d(x,y)^2$$

とあらわすことができる．また，完備な CAT(0) 空間をアダマール空間という．

アダマール空間 X の空でない閉凸部分集合 K と $x \in X$ に対して，

$$d(x, y_x) = \inf_{y \in K} d(x,y)$$

をみたす $y_x \in K$ は一意に存在する．この事実を用いて，距離射影 $P_K \colon X \to K$ を $P_K x = y_x$ で定義する．

距離空間 X 上の写像 $T \colon X \to X$ を考える．$z \in X$ が $z = Tz$ をみたすとき，z を T の不動点という．T の不動点全体からなる集合を $\operatorname{Fix} T$ であらわす．すなわち，

$$\operatorname{Fix} T = \{z \in X \mid z = Tz\}$$

である．任意の $x, y \in X$ に対して $d(Tx, Ty) \le d(x,y)$ をみたすとき, T は非拡大であると呼ばれる．非拡大写像の不動点集合は閉凸集合になることが知られている．とくにアダマール空間上の距離射影 P_K は $\operatorname{Fix} P_K = K$ をみたす非拡大写像である．

距離空間 X の有界点列 $\{x_n\}$ に対し，$y_0 \in X$ が

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, y_0) = \inf_{y \in X} \limsup_{n\to\infty} d(x_n, y)$$

をみたすとき，y_0 を $\{x_n\}$ の漸近的中心という．アダマール空間においては，有界点列の漸近的中心は一意に定められることが知られている．

アダマール空間の有界点列 $\{x_n\} \subset X$ が $x_0 \in X$ に Δ 収束するとは，$\{x_n\}$ の任意の部分列 $\{x_{n_k}\}$ に対し，その漸近的中心が x_0 になることをいう．

測地距離空間およびアダマール空間に関する詳細は [1] を参照せよ．

III　非拡大写像族の共通不動点近似

定理 2.　X をアダマール空間とし，任意の $u, v \in X$ に対して X の部分集合 $\{z \in X \mid d(u,z) \le d(v,z)\}$ がつねに凸であると仮定する．添字集合 I をもつ非拡大写像の族 $\{T_i \colon X \to X \mid i \in I\}$ が $\bigcap_{i \in I} \operatorname{Fix} T_i \ne \emptyset$ をみたすとする．点列 $\{x_n\} \subset X$ と X の部分集合列 $\{C_n\}$ を次のように生成する: $x_1 \in X$, $C_1 = X$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C_{n+1} = \bigcap_{i\in I}\{z \in X \mid d(T_i x_n, z) \le d(x_n, z)\} \cap C_n,$$
$$x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_n$$

とする．ただし $P_K\colon X \to K$ は X から空でない閉凸集合 K への距離射影である．このとき点列 $\{x_n\}$ は $\bigcap_{i\in I}\operatorname{Fix} T_i$ の点に Δ 収束する．

証明.　$F = \bigcap_{i\in I}\operatorname{Fix} T_i$ とする．まずはじめに，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F \subset C_n$ が空でない閉凸集合であり，$x_n \in X$ が定義されることを数学的帰納法によって示す．$n = 1$ のときは x_1 は与えられた点であり，$F \subset C_1 = X$ は明らかである．$n = k$ のときに成り立つと仮定し，$n = k+1$ のときを考える．$x_k \in X$ は定義されており，各 T_i は非拡大であることから，$z \in F$ に対して

$$d(T_i x_k, z) \le d(x_k, z)$$

が成り立つ．帰納法の仮定より $z \in F \subset C_k$ であることから

$$z \in \bigcap_{i\in I}\{z \in X \mid d(T_i x_k, z) \le d(x_k, z)\} \cap C_k = C_{k+1}$$

となり，$F \subset C_{k+1}$ を得る．よって C_{k+1} は空でないことがわかる．さらに，空間の仮定と距離の連続性より C_{k+1} は閉凸であることもわかるので，距離射影 $P_{C_{k+1}}$ が存在する．このことから $x_{k+1} = P_{C_{n+1}} x_n$ も定義され，したがって $n = k+1$ の場合も成り立つことが示された．

任意に $z \in F$ を固定する．アダマール空間における閉凸集合 K への距離射影は，K を不動点集合とする非拡大写像であることから，$z \in F \subset C_{n+1}$ であることを用いて

$$d(x_{n+1}, z) = d(P_{C_{n+1}} x_n, z) \le d(x_n, z)$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ．よって，$\{d(x_{n+1}, z)\}$ は単調減少で下に有界な実数列であり，極限 $c_z = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, z) \in \mathbb{R}$ が存在する．このことから $\{x_n\}$ が有界であることもわかる．また，C_{n+1} の凸性より，$t \in]0,1[$ に対して $tz \oplus (1-t)P_{C_{n+1}} x_n \in C_{n+1}$ が成り立つことから

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n)^2 &= d(P_{C_{n+1}} x_n, x_n)^2 \\
&\le d(tz \oplus (1-t)P_{C_{n+1}} x_n, x_n)^2 \\
&\le td(z, x_n)^2 + (1-t)d(P_{C_{n+1}} x_n, x_n)^2 - t(1-t)d(z, P_{C_{n+1}} x_n)^2 \\
&= td(z, x_n)^2 + (1-t)d(x_{n+1}, x_n)^2 - t(1-t)d(z, x_{n+1})^2
\end{aligned}$$

となる．これを整理して $d(x_{n+1}, x_n)^2 \le d(z, x_n)^2 - (1-t)d(z, x_{n+1})^2$ が得られ，$t \to 0$ とすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$d(x_{n+1}, x_n)^2 \leq d(z, x_n)^2 - d(z, x_{n+1})^2$$

が得られる．$n \to \infty$ とすると

$$d(z, x_n)^2 - d(z, x_{n+1})^2 \to c_z^2 - c_z^2 = 0$$

であることから $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$ を得る．ここで, $x_{n+1} \in C_{n+1}$ であることから，C_{n+1} の定義より，任意の $i \in I$ に対して

$$0 \leq d(T_i x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, x_{n+1}) \to 0,$$

すなわち，$d(T_i x_n, x_{n+1}) \to 0$ を得る．

ここで, $x_0 \in X$ を有界点列 $\{x_n\}$ の漸近的中心とし，$\{x_n\}$ が x_0 に Δ 収束することを示そう．$\{x_{n_k}\}$ を $\{x_n\}$ の任意の部分列とし，y_0 を $\{x_{n_k}\}$ の漸近的中心とする．このとき，任意の $i \in I$ に対して

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} d(x_{n_k}, T_i y_0) &\leq \limsup_{k\to\infty}(d(x_{n_k}, T_i x_{n_k}) + d(T x_{n_k}, T_i y_0)) \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} d(x_{n_k}, T_i x_{n_k}) + \limsup_{k\to\infty} d(T_i x_{n_k}, T_i y_0) \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} d(x_{n_k}, y_0)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $T_i y_0 = y_0$ が任意の $i \in I$ で成り立つこと，すなわち，$y_0 \in F$ が得られる．このとき，$c_{y_0} = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_0)$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, y_0) = c_{y_0} = \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, y_0) \leq \limsup_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x_0) \leq \limsup_{n\to\infty} d(x_n, x_0).$$

よって，有界点列に対する漸近的中心の一意性より $x_0 = y_0 \in F$ が得られ，$\{x_n\}$ は $x_0 \in F$ に Δ 収束することが示された． $\square$

この定理において，写像が 1 つの場合は [3] で得られた次の定理となる．

定理 3 (Kimura [3])**．** X をアダマール空間とし，任意の $u, v \in X$ に対して X の部分集合 $\{z \in X \mid d(u, z) \leq d(v, z)\}$ がつねに凸であると仮定する．$T\colon X \to X$ を非拡大写像とし，$\operatorname{Fix} T \neq \emptyset$ と仮定する．点列 $\{x_n\} \subset X$ と X の部分集合列 $\{C_n\}$ を次のように生成する: $x_1 \in X, C_1 = X$ とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
C_{n+1} &= \{z \in X \mid d(T x_n, z) \leq d(x_n, z)\} \cap C_n, \\
x_{n+1} &= P_{C_{n+1}} x_n
\end{aligned}$$

とする．このとき点列 $\{x_n\}$ は $\operatorname{Fix} T$ の点に Δ 収束する．

参考文献

[1] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[2] Y. Kimura, *Convergence of a sequence of sets in a Hadamard space and the shrinking projection method for a real Hilbert ball*, Abstr. Appl. Anal., 2010, Art. ID 582475, 11.

[3] Y. Kimura, *Comparison of convergence theorems for a complete goedesic space*, RIMS Kôkyûroku, no. 2240, 2023, in press.

[4] Y. Kimura, K. Nakajo, and W. Takahashi, *Convexity of the set of fixed points of a quasi-pseudocontractive type Lipschitz mapping and the shrinking projection method*, Sci. Math. Jpn. **70**, 2009, 213–220.

[5] Y. Kimura and K. Satô, *Two convergence theorems to a fixed point of a nonexpansive mapping on the unit sphere of a Hilbert space*, Filomat **26**, 2012, 949–955.

[6] Y. Kimura and W. Takahashi, *On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **357**, 2009, 356–363.

[7] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341**, 2008, 276–286.