距離もどきの関数 τ-DISTANCE について

九州工業大学　鈴　木　智　成

松岡勝男教授のご退職記念の研究紀要に拙稿を掲載する機会を与えていただきまして，大変感謝しております．

1．序

本稿を通して，N を正の整数全体からなる集合とし，R を実数全体からなる集合とする．

2001 年に，筆者は τ-distance を導入し，様々な結果を得た．

定義 1（[3]）． Let (X, d) be a metric space. Then a function p from $X \times X$ into $[0, \infty)$ is called a τ-distance on X if there exists a function η from $X \times [0, \infty)$ into $[0, \infty)$ and the following are satisfied:

(τ1) $p(x, z) \le p(x, y) + p(y, z)$ for any $x, y, z \in X$.

(τ2) $\eta(x, 0) = 0$ and $\eta(x, t) \ge t$ for any $x \in X$ and $t \in [0, \infty)$, and η is concave and continuous in its second variable.

(τ3) $\lim_n x_n = x$ and $\lim_n \sup\{\eta(z_n, p(z_n, x_m)) : m \ge n\} = 0$ imply $p(w, x) \le \liminf_n p(w, x_n)$ for any $w \in X$.

(τ4) $\lim_n \sup\{p(x_n, y_m) : m \ge n\} = 0$ and $\lim_n \eta(x_n, t_n) = 0$ imply $\lim_n \eta(y_n, t_n) = 0$.

(τ5) $\lim_n \eta(z_n, p(z_n, x_n)) = 0$ and $\lim_n \eta(z_n, p(z_n, y_n)) = 0$ imply $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$.

（τ 1）は三角不等式そのものなので，τ-distance は距離関数に非常に近い関数である．また，距離関数 d は τ-distance の 1 つである．実際，次のように簡単に証明できる．

例 2. Let (X, d) be a metric space. Then d is a τ-distance on X with $\eta = ((x, t) \mapsto t)$.

住所．〒 804–8550 北九州市戸畑区九州工業大学工学研究院．
電子メール．suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp.

証明. (τ 1) obviously holds because it is the triangle inequality. From the definition of η, (τ 2) and (τ 4) hold. Since d is continuous, (τ 3) holds. $\lim_n d(z_n, x_n) = \lim_n d(z_n, x_n) = 0$ implies

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} \big(d(z_n, x_n) + d(z_n, y_n)\big) = 0.$$

Thus, (τ 5) holds. Therefore d is a τ-distance. □

条件が 5 つもあるので，一見すると τ-distance は不自然なものに見えるかも知れない．しかしながら，多くの τ-distance の例が存在すること，および，後述する w-distance からの流れもあり，筆者にとっては自然なものに思えた．また τ-distance を導入するにあたり，20 以上の条件を吟味し，その中で一番よいものを τ-distance の定義としたので，当時，筆者は自信を持って論文 [3] を発表した．

その後 Lin と Du[2] によって 2006 年に導入された τ-function に触発されて，2017 年に τ'-distance という概念を導入した．

定義 3 ([5]). Let (X, d) be a metric space and let p be a function from $X \times X$ into $[0, \infty)$. Then p is called a τ'-distance on X if the following hold:

(τ'1) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z)$ for any $x, y, z \in X$.

(τ'2) If $\lim_n \sup\{p(z_n, z_m)$: m > n$\} = 0$ and $\lim_n p(z_n, x_n) = 0$, then $\lim_n d(z_n, x_n) = 0$. Moreover if $\{x_n\}$ converges to some $x \in X$, then $p(w, x) \leq \liminf_n p(w, x_n)$ for any $w \in X$.

(τ'3) If $\lim_n p(z, x_n) = 0$, then $\lim_n d(x_n, x_{n+1}) = 0$ holds. Moreover if {xn} converges to some $x \in X$, then $p(w, x) \leq \liminf_n p(w, x_n)$ for any $w \in X$.

τ'-distance という名前を付けたのは，「τ-distance の再定義」という意味合いを込めるためである．しかし，第 4 節で述べるように，τ-distance ならば τ'-distance であり，逆が成立しない反例も存在するため，τ'-distance は τ-distance よりも真に弱い条件である．したがって，「再定義」という単語は，数学的にはふさわしくない．

τ-distance を導入した 2001 年に τ'-distance の定義を見たら，筆者は自然な定義とは思えなかったであろう．しかしながら，この稿を書いている 2023 年時点では，筆者にとって τ'-distance の方が自然に見える．本稿では，この辺りについて解説したいと考えている．

2．τ-distance の導入

本節では，τ-distance の導入までの小歴史を述べたい．τ-distance が導入される前，1996 年に，次の w-distance が導入された．

定義 4 (Kada, Suzuki and Takahashi [1]). Let (X, d) be a metric space and let p be a function from $X \times X$ into $[0, \infty)$. Then p is called a *w-distance* on X if the following hold:

(w 1) $p(x, z) \le p(x, y) + p(y, z)$ for all $x, y, z \in X$.

(w 2) p is lower semicontinuous in its second variable.

(w 3) For each $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that $p(z, x) \le \delta$ and $p(z, y) \le \delta$ imply $d(x, y) \le \varepsilon$.

距離関数 d が w-distance であるなど，多くの w-distance の例がある (τ-distance よりは少ないが...). また，縮小写像の不動点定理や Ekeland の変分不等式の w-distance 版が成立すること，および，それまでの距離空間における種々の存在定理を w-distance を通して見ると理解しやすくなること等から，w-distance の導入は意義があったと筆者は感じている.

次のような距離完備性を縮小写像が不動点を持つことで特徴付ける面白い定理も成立する.

定理 5 (Suzuki and Takahashi [7]). Let (X, d) be a metric space. Then the following are equivalent:

(i) X is complete.

(ii) Every contraction on X with respect to w-distance has a fixed point.

That is, if a mapping T on X satisfies

$$p(Tx, Ty) \le rd(x, y) \qquad (\forall x, y \in X)$$

for some w-distance p and $r \in [0, 1)$, then T has a fixed point.

w-distance の 3 条件について考察する前に，距離関数 d の持つ性質について確認したい．三角不等式は，距離関数の定義の一部である．d は連続関数である．したがって，第 2 変数に関して下半連続である．「z と x の距離が 0 に近くて z と y の距離が 0 に近いとき，x と y の距離が 0 に近い」というのは非常に自然なことのように思える.

w-distance p は，距離関数 d の定義に現れる次の条件を必ずしも満たさない.

- $p(x, x) = 0$.
- $p(x, y) = 0 \implies x = y$.
- $p(x, y) = p(y, x)$

実際，次のようなヘンテコな例が存在する.

例 6. Let (X, d) be a metric space and fix $v \in X$. Define a function p from $X \times X$ into $[0, \infty)$ by

$$p(x, y) = d(v, y)$$

for $x, y \in X$. Then p is a w-distance.

以上をふまえて，w-distance の 3 条件について考察してみよう．まず，(w1) は p に関する三角不等

式である．($w2$) は第2変数に関する下半連続性である．ここで重要になるのが，連続性は位相を使って定められるが，その位相は距離関数 d から定義されるということである．すなわち，d のみという1つの尺度ではなく，w-distance について考えるということは，d と p の2つの尺度を同時に考えることを意味する．このことが顕著になるのが ($w3$) である．$p(z, x) = p(x, z)$ が成立しないので，$p(z, x)$ を「z から x を尺度 p で見る」と解釈すると，($w3$) は次のように解釈できる．

- p という尺度で z から x への距離が近く，かつ，p という尺度で z から y への距離が近いとき，d という尺度で x と y 近い．

後に Tataru の距離（定義7）と Zhong の距離（定義8）が w-distance でないことが分かり，w-distance を弱める必要性が出てきた．

定義7 (Tataru[8]). Let $\{T(t): t \in [0, \infty)\}$ be a strongly continuous semigroup of nonexpansive mappings on a subset X of a Banach space. That is, the following hold:

(sg1) For each $t \in [0, \infty)$, $T(t)$ is a nonexpansive mapping on X, i.e.,

$$\|T(t)x - T(t)y\| \leq \|x - y\|$$

for all $x, y \in X$.

(sg2) $T(0)x = x$ for all $x \in X$.

(sg3) $T(s + t) = T(s) \circ T(t)$ for all $s, t \in [0, \infty)$.

(sg4) For each $x \in X$, the mapping $T(\cdot)x$ from $[0, \infty)$ into X is continuous.

Then the function p from $X \times X$ into $[0, \infty)$ defined by

$$p(x, y) = \inf\{t + \|T(t)x - y\| : t \in [0, \infty)\}$$

for all $x, y \in X$ is called *Tataru's distance*.

定義8 (Zhong[9]). Let (X, d) be a metric space and let b be a nonincreasing function from $[0, \infty)$ into $(0, \infty)$ satisfying $\int_0^\infty b(t)\, dt = \infty$. Fix $z \in X$. Then the function p from $X \times X$ into $[0, \infty)$ defined by

$$p(x, y) = \int_{d(z,x)}^{d(z,x)+d(x,y)} b(t)\, dt$$

for all $x, y \in X$ is called *Zhong's distance*.

具体的には，($w3$) が強すぎて，w-distance になることができない．上述したように，($w3$) というのは，p という尺度で近いというものと d という尺度で近いというものの関係であった．この関係をもう少しゆるくするために，関数 η を挟んだ．それが ($\tau5$) である．その上で，存在定理などが証明できるように，関数 η に ($\tau2$) と ($\tau4$) という条件を付けた．

また，様々な例を検討し，($w2$) も条件として強いことが分かったので，存在定理などが証明できる

ために必要な程度まで弱めることにした．それが (τ3) である．

3． τ'-distance

前節では，τ-distance の５条件が考え出されたいきさつ，並びにその意味合いについて解説した．本節では，τ-distance と τ'-distance を比較する前に，τ'-distance の３条件の意味を解説したい．

τ'-distance は次の Condition（CL）という条件を考えると理解しやすくなる．CL というのは Cauchy 列と下半連続性 (Lower semicontinuity) の頭文字からネーミングされている．

定義 9（[5]）． Let p be a τ'-distance on a metric space (X, d). Let $\{x_n\}$ be a sequence in X. Then $\{x_n\}$ is said to satisfy *Condition*（*CL*） if the following hold:

（CL1） $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence in the usual sense.

（CL2） Either of the following hold:

- $\{x_n\}$ does not converge.
- If $\{x_n\}$ converges to x, then $p(w, x) \le \liminf_n p(w, x_n)$ holds for any $w \in X$.

補助定理 10（[6]）． Let (X, d) be a metric space and let p be a function from $X \times X$ into $[0, \infty)$ satisfying (τ'2). Let $\{z_n\}$ be a sequence in X satisfying $\lim_n \sup\{p(z_n, z_m): m > n\} = 0$. Then the following hold:

（i） If a sequence $\{x_n\}$ in X satisfies $\lim_n p(z_n, x_n) = 0$, then $\{x_n\}$ satisfies Condition（CL） and $\lim_n d(z_n, x_n) = 0$ holds.

（ii） $\{z_n\}$ satisfies Condition（CL）.

補助定理 11（[6]）． Let (X, d) be a metric space and let p be a function from $X \times X$ into $[0, \infty)$ satisfying (τ'3). Let $\{x_n\}$ be a sequence in X satisfying $\lim_n p(z, x_n) = 0$ for some $z \in X$. Then the following hold:

（i） $\{x_n\}$ satisfies Condition（CL）.

（ii） If a sequence $\{y_n\}$ in X also satisfies $\lim_\alpha p(z, y_n) = 0$, then $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$ holds.

上の補助定理を用いると，τ'-distance は次のように書き換えられる．

命題 12． Let (X, d) be a metric space and let p be a function from $X \times X$ into $[0, \infty)$. Then p is a τ'-distance if and only if the following hold:

(τ'1) $p(x, z) \le p(x, y) + p(y, z)$ for any $x, y, z \in X$.

(τ'2) If $\lim_n \sup\{p(z_n, z_m): m > \mathrm{n}\} = 0$ and $\lim_n p(z_n, x_n) = 0$, then $\lim_n d(z_n, x_n) = 0$ holds and $\{x_n\}$

satisfies Condition (CL).

($\tau'3$) If $\lim_n p(z, x_n) = 0$, then $\{x_n\}$ satisfies Condition (CL).

なお，補助定理10と補助定理11から，それぞれ，次の有用な補助定理が得られる．

補助定理13. Let (X, d) and p be as in Lemma 10. Let $z \in X$ satisfy $p(z, z) = 0$. Then the following hold:

(i) If a sequence $\{x_n\}$ in X satisfies $\lim_n p(z, x_n) = 0$, then $\{x_n\}$ satisfies Condition (CL) and $\lim_n d(z, x_n) = 0$ holds.

(ii) If $x \in X$ satisfies $p(z, x) = 0$, then $z = x$ holds.

補助定理14. Let (X, d) and p be as in Lemma 11. If $p(z, x) = p(z, y) = 0$ holds, then $x = y$ holds.

縮小写像の不動点定理を証明してみよう．

定理15. Let (X, d) be a complete metric space and let p be a τ'-distance on X. Let T be a mapping on X. Assume that there exists $r \in [0, 1)$ satisfying

$$p(Tx, Ty) \leq rp(x, y)$$

for all $x, y \in X$. Then T has a unique fixed point z. Moreover $p(z, z) = 0$ holds and $\{T^n x\}$ converges to z for any $x \in X$.

証明. Fix $u \in X$. For $m, n \in \mathbb{N}$ with $m > n$, we have

$$\begin{aligned} p(T^n u, T^m u) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} p(T^j u, T^{j+1} u) \leq \sum_{j=n}^{m-1} r^j\, p(u, Tu) \\ &\leq \sum_{j=n}^{\infty} r^j\, p(u, Tu) = \frac{r^n}{1-r}\, p(u, Tu) \end{aligned}$$

and hence

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m>n} p(T^n u, T^m u) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{1-r}\, p(u, Tu) = 0.$$

By Lemma 10, $\{T^n u\}$ satisfies Condition (CL). Since X is complete, $\{T^n u\}$ converges to some $z \in X$. We have

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} p(T^n u, Tz) \leq \lim_{n\to\infty} r\, p(T^{n-1} u, z) \leq \lim_{n\to\infty} \liminf_{m\to\infty} r\, p(T^{n-1} u, T^m u) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{1-r}\, p(u, Tu) = 0. \end{aligned}$$

By ($\tau'2$), $\{T^n u\}$ converges to Tz. Hence $Tz = z$ holds. We also have

$$p(z,z) = \lim_{n\to\infty} p(T^n z, T^n z) \leq \lim_{n\to\infty} r^n p(z,z) = 0.$$

In order to show the uniqueness of z, let w be a fixed point of T. Then we have

$$p(z, w) = p(Tz, Tw) \leq rp(z, w).$$

and hence $p(z, w) = 0$. By Lemma 13, we obtain $z = w$. Therefore the fixed point z is unique. □

次に強形の Ekeland の変分不等式を証明してみよう．(i) と (ii) を満たす v の存在に関する証明は省略する．

定理 16 ([4, 6])． Let (X, d) be a complete metric space and let p be a τ'-distance on X. Let f be a function from X into $(-\infty, +\infty]$ which is proper lower semicontinuous and bounded from below. Then for $u \in X$, there exists $v \in X$ satisfying the following:

(i) $f(v) \leq f(u)$.

(ii) $f(w) > f(v) - p(v, w)$ for all $w \in X \setminus \{v\}$.

(iii) If a sequence $\{x_n\}$ in X satisfies $\lim_n (f(x_n) + p(v, x_n)) = f(v)$, then $\{x_n\}$ satisfies Condition (CL); and $\lim_n x_n = v$ and $p(v, v) = \lim_n p(v, x_n) = 0$ hold.

証明. We note that $(x, y) \mapsto (1/2)\ p(x, y)$ is also a τ-distance on X. We know that there exists $v \in X$ such that $f(v) \leq f(u)$ and $f(w) > f(v) - (1/2)\ p(v, w)$ for all $w \in X \setminus \{v\}$. It is easy to show that v satisfies (i) and (ii). Let us prove (iii). Let $\{x_n\}$ be a sequence in X satisfying $\lim_n (f(x_n) + p(v, x_n)) = f(v)$,

Since

$$f(x_n) > f(v) - (1/2)\ p(v, x_n),$$

we have

$$p(v, x_n) < 2(f(x_n) + p(v, x_n) - f(v))$$

and hence

$$\lim_{n\to\infty} p(v, x_n) \leq \lim_{n\to\infty} 2\left(f(x_n) + p(v, x_n) - f(v)\right) = 0.$$

By Lemma 11, $\{x_n\}$ satisfies Condition (CL). Since X is complete, $\{x_n\}$ converges to some $x \in X$. We have

$$p(v, x) \leq \liminf_{n\to\infty} p(v, x_n) = 0.$$

We also have

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} \left(f(x_n) + p(v, x_n)\right) = f(v).$$

Thus, if $v \neq x$, then we have

$$f(x) > f(v) - (1/2)\ p(v, x) = f(v) \geq f(x).$$

This is a contradiction. Hence we obtain $v = x$. This completes the proof. □

命題 12 と上記の証明から分かるように，τ-distance の 3 条件は存在定理を証明するために必要な条件が直接的に記述されている所に特徴がある．また $(\tau'2)$ と $(\tau'3)$ を分離できる所にも特徴がある．

4．τ-DISTANCE と τ'-DISTANCE の比較

本節では，τ-distance と τ'-distance の比較を行う．特に，「τ-distance ならば τ'-distance である」ことを議論する．

第 3 節では，Condition (CL) という概念を用いて，τ'-distance について解説した．本節では p-Cauchy という概念を用いて，τ-distance について解説したい．

定義 17 ([3]). Let p be a τ-distance on a metric space (X, d). Then a sequence $\{x_n\}$ in X is called *p-Cauchy* if there exist a function η from $X \times [0, \infty)$ into $[0, \infty)$ satisfying $(\tau2)$–$(\tau5)$ and a sequence $\{z_n\}$ in X such that $\lim_n \sup \{\eta(z_n, p(z_n, x_m)) : m \geq n\} = 0$.

p-Cauchy に関して，以下の補助定理が成立する．

補助定理 18 ([3]). Let p be a τ-distance on a metric space (X, d). If $\{x_n\}$ is a p-Cauchy sequence, then $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence in the usual sense.

補助定理 19 ([3]). Let p be a τ-distance on a metric space (X, d). If a sequence $\{x_n\}$ in X satisfies $\lim_n \sup \{p(x_n, x_m) : m > n\} = 0$, then $\{x_n\}$ is a p-Cauchy sequence. Moreover if a sequence $\{y_n\}$ in X satisfies $\lim_n p(x_n, y_n) = 0$, then $\{y_n\}$ is also a p-Cauchy sequence and $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$.

補助定理 20 ([3]). Let p be a τ-distance on a metric space (X, d). If a sequence $\{x_n\}$ in X satisfies $\lim_n p(z, x_n) = 0$ for some $z \in X$, then $\{x_n\}$ is a p-Cauchy sequence. Moreover, if a sequence $\{y_n\}$ in X also satisfies $\lim_n p(z, y_n) = 0$, then $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$. In particular for $x, y, z \in X$, $p(z, x) = 0$ and $p(z, y) = 0$ imply $x = y$.

補助定理 18 と $(\tau3)$ より，以下の補助定理が成り立つ．

補助定理 21. Let p be a τ-distance on a metric space (X, d) and let $\{x_n\}$ be a p-Cauchy sequence. Then $\{x_n\}$ satisfies Condition (CL).

この補助定理により，補助定理 19 と補助定理 20 における「p-Cauchy である」の部分は「Condition (CL) を満たす」に置き換えることができる．このようにすると，補助定理 19 から命題 12 の $(\tau'2)$ が出る．同様に，補助定理 20 から命題 12 の $(\tau'3)$ が成立する．したがって，次の命題が証明できる．

命題 22（[6]）． Let p be a τ-distance on a metric space (X, d). Then p is a τ'-distance.

第 3 節で論じたように，τ'-distance は Condition(CL) を中心に据えている．一方で，τ-distance は p-Cauchy という概念が，強いて言えば，中心になるが，この概念を用いて，τ-distance の同値条件を記述できてはいない．そして，補助定理 21 により，p-Cauchy の方が Condition(CL) より強い条件になる．そして，その分 τ-distance の方が τ'-distance よりも強い条件になる．

さらに，τ-distance が τ'-distance よりも真に強い条件であることが分かっている．実際，τ'-distance であって，τ-distance でない例が存在する．簡単に記述することはできないので，ここでは省く．[6] を参照のこと．

また，τ'-distance では，(τ'2) と (τ'3) を分離できた．しかし，τ-distance ではそのようなことはできない．

現在まで証明された τ-distance に関する存在定理（定理 15 や定理 16 のような存在定理）は，すべて p-Cauchy から Condition(CL) を経由して証明されているので，証明を変えることなく，τ'-distance に関する存在定理を証明することができる．存在定理以外では，τ'-distance に対して成立していて，τ-distance に対して成立不明な補助定理がある．最後にこれらの中から 2 つ紹介したい．

補助定理 23（[5]）． Let p be a τ'-distance on a metric space (X, d) and let $z \in X$ be fixed. Let b be a nonincreasing function from $[0, \infty)$ into $(0, \infty)$ with $\int_0^\infty b(t)\ dt = \infty$. Then a function q from $X \times X$ into $[0, \infty)$ defined by

$$q(x, y) = \int_{p(z,x)}^{p(z,x)+p(x,y)} b(t)\, dt$$

for $x, y \in X$ is also a τ'-distance on X.

補助定理 24（[5]）． Let (X, d) be a metric space. Let $\{p_j : j \in J\}$ be a set of τ'-distances on X. If a function q defined by

$$q(x, y) = \sup_{j \in J} p_j(x, y)$$

is a real-valued function, then q is a τ'-distance on X.

両方とも τ'-distance から，別の τ'-distance を生成する補助定理であるが，これらの τ-distance 版が成り立つかどうか真偽不明である．

以上の議論により，筆者は現時点で，τ'-distance の方が τ-distance よりも自然に見えている．このことが起こった原因については，よく分かっていない．p-Cauchy を Condition(CL) にする (τ3) の役割が雑なのか，それとも，τ-distance を用いて表現したかったものを η という 1 つの関数でつくることができなかったからなのか．それとも他に原因があるのか．

τ'-distance の導入によって，w-distance から始まった一連の研究にひとまず区切りが付いたと筆者は

考えている．筆者が 2001 年時点で考えた方向とは別な形にはなったため，残念という気持ちもあるが，一方で，予想が外れたため，非常に興味深い方向に発展して面白かったという気持ちもある．

参考文献

[1] O. Kada, T. Suzuki and W. Takahashi, *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*, Math. Japon., 44 (1996), 381–391.

[2] L.J. Lin and W.-S. Du, *Ekeland's variational principle, minimax theorems and existence of nonconvex equilibria in complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., 323 (2006), 360–370.

[3] T. Suzuki, *Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., 253 (2001), 440–458.

[4] T. Suzuki, *The strong Ekeland variational principle*, J. Math. Anal. Appl., 320 (2006), 787–794.

[5] T. Suzuki, *Redefinition of τ-distance in metric spaces*, J. Funct. Spaces, 2017, Art. ID 4168486, 8 pp.

[6] T. Suzuki, *Some comments on τ-distance and existence theorems in complete metric spaces*, Filomat, 37 (2023), 7979–7900.

[7] T. Suzuki and W. Takahashi, *Fixed point theorems and characterizations of metric completeness*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 8 (1996), 371–382.

[8] D. Tataru, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations with unbounded nonlinear terms*, J. Math. Anal. Appl., 163 (1992), 345–392.

[9] C.-K. Zhong, *On Ekeland's variational principle and a minimax theorem*, J. Math. Anal. Appl., 205 (1997), 239–250.