幾何構造に基づくバナッハ空間の非線形分類について

東京理科大学　田　中　　亮　太　朗*

概　要

バナッハ空間の非線形分類は, 現代的なバナッハ空間論における主要なトピックの一つであり, 種々の非線形構造が内包する情報の整理, およびそれらが持つ影響力の精査を目的とする. 当該分野においては, 近年に至るまで, バナッハ空間のリプシッツ構造や一様構造等, 距離的な視点からの研究が主流であったが, 最近の研究では, バナッハ空間の幾何構造に着目した分類にも一定の価値があると認められ, それらに関する理論が系統的に発展させられつつある. 本論文では, 特に, 幾何的な視点からのバナッハ空間の非線形分類に焦点を当て, 現在知られている主要な結果について総説する.

1.　はじめに

本論文では, バナッハ空間の非線形分類に関する研究のうち, 幾何構造の観点からアプローチした最近の結果 [26, 27, 28, 29] について総説する. ここで, 「バナッハ空間の非線形分類」とは, 同型写像に線形性を仮定しない同型概念のもとで, バナッハ空間を分類することを指す.

従来のバナッハ空間論では, バナッハ空間の主要な構造である線形構造と距離 (位相) 構造を同時に保存する同型概念のもとで, バナッハ空間の分類を行ってきた. 例えば, バナッハ空間を最も精密に分類する同型概念を得るには, バナッハ空間の線形構造と距離構造を完全に保存する「等距離線形同型写像」を採用すればよく, 二つのバナッハ空間が等距離同型ならば, それらはバナッハ空間として全く同じ構造を持つと理解される. この同型概念は, バナッハ空間の単位球の形状等, 幾何的な構造に着目した研究でよく用いられる.

一方で, 一般のバナッハ空間論においては, 等距離同型による分類ではいささか精密すぎるため, 実際にはもう少し大雑把な同型概念が標準的に用いられる. つまり, 距離構造についてはリプシッツ同型で十分と考えて, 二つのバナッハ空間が「同型」であることを, それらの間に線形同相写像があることと定める. ここで, バナッハ空間の間の線形作用素については, 連続性とリプシッツ連続性とが (有界性を介

本研究は, JSPS 科研費 JP19K14561 の助成を受けたものです.
* 〒125-8585 東京都葛飾区新宿 6-3-1 東京理科大学 教養教育研究院 葛飾キャンパス教養部
email: r-tanaka@rs.tus.ac.jp

して) 同値となることから, 線形同相写像は線形なリプシッツ同相写像であることに注意する. バナッハ空間の性質として重要なもの (例えば, 回帰性やラドン＝ニコディム性, シャウダー基底の存在等) は, 多くがこの同型概念で保存されるため, バナッハ空間論を柔軟に展開していくうえでは, 等距離同型よりもこちらの同型を採用するケースが多い.

以上のように, バナッハ空間論は, 基本的には線形性に基づく同型概念のもとで発展させられてきたが, このような背景のもと, バナッハ空間の非線形分類理論が大きく発展させられるきっかけとなったのは, 次のような結果であると考えられる (Benyamini-Lindenstrauss の本 [5] や, Godefroy-Lancien-Zizler の総説論文 [13] を参照されたい).

定理. バナッハ空間の回帰性, ラドン＝ニコディム性, アスプルンド性はリプシッツ同相写像により保存される. つまり, バナッハ空間 X, Y の間にリプシッツ同相写像が存在するとき, X と Y のいずれか一方が回帰的である (または, ラドン＝ニコディム性を持つ, または, アスプルンドである) ならば, もう一方も同じ性質を持つ.

定理. $1 < p < \infty$ のとき, ℓ_p はその一様構造により決定される. つまり, バナッハ空間 X と ℓ_p $(1 < p < \infty)$ との間に一様同相写像が存在するとき, X と ℓ_p とは同型である.

定理. バナッハ空間の族 $\{\ell_p : 1 < p < \infty\}$ は, 一様構造により分類される.

これらの結果は, いずれも, バナッハ空間の距離構造のみに着目していることに注意する. 実際, 上記の定理におけるリプシッツ同相写像や一様同相写像は, 線形である必要はなく, 距離空間としての同型を与えているに過ぎない. このような研究が示唆するのは, バナッハ空間の性質や分類を論じるうえで, もはや線形性は必須のものではなくなってきているということである. 昨今, この考え方は随分と浸透してきており, バナッハ空間の「距離的」非線形分類理論は, 現在に至るまで多くの数学者により発展させられ, バナッハ空間論における一大分野となっている.

この「非線形解析」の視点でバナッハ空間を見直してみると, バナッハ空間には, 線形構造や距離構造の他にも, ノルムから定まる幾何構造が備わっていることに気付く. ノルムの性質により決定されるという点では, 幾何構造は距離構造の一部とも言えるが, それらの違いを端的に述べるならば, 距離構造は点や集合の大まかな配置から得られる比較的柔らかい情報であるのに対して, 幾何構造は単位球の形状から得られる硬い情報である. 特に, バナッハ空間の幾何学的性質として知られる狭義凸性や平滑性は, 幾何構造に基づいて導入される概念の代表例である. バナッハ空間の幾何構造に関する研究は, これまで様々な形でバナッハ空間論の発展に寄与してきたが, それらの実績から言えることは, 幾何構造が含有する情報量は, 距離構造のそれにも引けを取らないということである. にもかかわらず, 近年に至るまで, 幾何構造に基づくバナッハ空間の非線形分類を系統的に論じる研究は見られなかった. そこで, [26] では, 幾何構造に基づくバナッハ空間の同型概念として「Birkhoff-James 直交構造に関する同型 (以下, 「BJ 同型」と言う) 」の概念を導入し, BJ 同型のもとで, 回帰的平滑バナッハ空間が線形同相的 (isomorphically) に分類されること, および 3 以上の次元を持つヒルベルト空間が等距離同型的 (isometrically) に分類されることを示した. これらのうち, 回帰的平滑バナッハ空間に関する結果に

ついては, Ilišević-Turnšek [14] により仮定と結論の両方が改良された他, Arambašić et al. [4] により関連する興味深い結果も得られている．特に, 3 以上の次元を持つ回帰的平滑バナッハ空間においては, BJ 同型と等距離同型とは概ね同値となることが示された．一方で, これとは対照的に, [28] では, 平滑性を仮定しない場合には, 2 以上のあらゆる次元において, BJ 同型であるが等距離同型でないような実バナッハ空間のペアを構成できるという結論が得られている．また, [26] の続編である [27] では, BJ 同型写像の不変量として「バナッハ空間の幾何学的構造空間」の概念を導入し, その解析に基づいて, 連続関数空間や古典的数列空間が BJ 同型のもとで分類されることを示した．さらに, [29] では, BJ 同型よりも粗い分類を与える「幾何学的構造空間に基づくバナッハ空間の分類理論」を提唱し, 特に, 連続関数空間や古典的数列空間が, 幾何学的構造空間のレベルで分類可能であることを示した．本論文では, これらの結果, およびそこに至るまでの議論の過程を整理し, 一つのストーリーとして再構成することで, バナッハ空間の幾何的非線形分類理論の発展を俯瞰する．

2.　準備

本論文では, $\mathbb{K}$ は係数体 $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表す．バナッハ空間は, 係数体が $\mathbb{R}$ のとき実バナッハ空間, $\mathbb{C}$ のとき複素バナッハ空間と言われる．X が複素バナッハ空間であるとき, その複素共役を $\overline{X}$ により表す．つまり, $\overline{X}$ の台集合, 和, およびノルムは X のそれらと同一に定め, スカラー倍を, X のスカラー倍の共役により定める．

X をバナッハ空間とする．このとき, X の単位球と単位球面を B_X と S_X でそれぞれ表す．つまり,

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$
$$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

である．X の部分集合 C が凸であるとは, $x, y \in C$, および $t \in [0,1]$ のとき, $(1-t)x + ty \in C$ となることを言う．また, 空でない凸集合 C の空でない凸部分集合 D について, D が C の面であるとは, $x, y \in C$, およびある $t \in (0,1)$ について $(1-t)x + ty \in D$ となるとき, $x, y \in D$ となることを言う．C は C 自身の自明な面であり, $D \neq C$ であるような C の面 D は, C の真の面であると言われる．C の真の面 D は, それを真に包含する C の面が C 自身のみであるとき, 極大であると言われる．また, C の一点部分集合 $\{x\}$ が C の面ならば, x は C の端点と言われる．C の端点の全体は, $\mathrm{ext}(C)$ で表される．特に,

$$\mathrm{ext}(B_{\mathbb{R}}) = S_{\mathbb{R}} = \{-1, 1\}$$
$$\mathrm{ext}(B_{\mathbb{C}}) = S_{\mathbb{C}} = \{c \in \mathbb{C} : |c| = 1\}$$

である．

X の (連続) 双対空間は X^* で表される．言い換えれば, X^* は X 上の有界線形汎関数の全体である．$f \in X^* \setminus \{0\}$ が B_X と接するとは, ある $x \in S_X$ に対して $f(x) = \|f\|$ となることを言

う．また，このとき，f は x における B_X の接汎関数であると言われる．f が B_X と接するとき，$f^{-1}(\|f\|) \cap B_X = \{x \in B_X : f(x) = \|f\|\}$ は B_X の真の面となる．このような B_X の面を，露出面と言う．よく知られているように，B_X の極大面はすべて露出面である．

バナッハ空間の狭義凸性と平滑性は，次のように定められる．

定義. X をバナッハ空間とする．このとき，X が狭義凸であるとは，$x, y \in S_X$，および $x \neq y$ のとき，$\|2^{-1}(x+y)\| < 1$ となることを言う．

定義. X をバナッハ空間とする．このとき，X が平滑であるとは，任意の $x \in X \setminus \{0\}$ に対して $\nu(x) = \{f \in B_{X^*} : f(x) = 1\}$ が一点集合となることを言う．

定義からわかるように，X が狭義凸であるとは，S_X が非自明な線分を含まないことを意味する．また，X の平滑性は，ノルムの Gateaux 微分可能性と同値であることが知られている．バナッハ空間の幾何学的性質を含むバナッハ空間論の基本的な知識については，例えば，Megginson [22] で詳しく解説されている．

X, Y をバナッハ空間とし，$T : X \to Y$ とする．このとき，T が等距離同型写像であるとは，T が全単射かつ線形で，すべての $x \in X$ に対して $\|Tx\| = \|x\|$ を満たすことを言う．X と Y の間に等距離同型写像が存在するとき，X と Y は等距離同型であると言われ，$X = Y$ と書かれる．また，T が同型写像であるとは，T が線形同相写像であることを言う．X と Y の間に同型写像が存在するとき，X と Y は同型であると言われ，$X \cong Y$ と書かれる．

3.　Birkhoff-James 直交構造に基づく非線形同型

この節では，Birkhoff-James 直交 (以下，「BJ 直交」と言う) の概念を用いてバナッハ空間の非線形同型 (BJ 同型) を定義し，BJ 同型のもとで，バナッハ空間の分類を考える．この BJ 直交性とは，ヒルベルト空間における直交性の特徴付けを基に，バナッハ空間に直交性の概念を一般化したものであり，次のように定義される．

定義.　X を $\mathbb{K}$ 上のバナッハ空間とし，$x, y \in X$ とする．このとき，x が y に BJ 直交するとは，すべての $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ が成立することを言い，このことを $x \perp_{BJ} y$ により表す．

BJ 直交性という名称は，Birkhoff [6] によりそれが導入され，James [15, 16] により更に発展させられたことに由来する．

BJ 直交性の基本的性質としては，次が挙げられる．

(i) 非退化性: $x \perp_{BJ} x$ ならば，$x = 0$ である．

(ii) 同次性: $x \perp_{BJ} y$，および $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ならば，$\alpha x \perp_{BJ} \beta y$ である．

一方で，一般には，BJ 直交性は対称性や加法性，一意性等の性質を持たない．特に，3 以上の次元を持つバナッハ空間 X において，BJ 直交性が対称 (つまり，$x \perp_{BJ} y$ ならば，$y \perp_{BJ} x$ が成立する) ならば，X はヒルベルト空間であることが結論付けられる (Day [11], James [15], および [26])．このことか

ら, BJ 直交性が大域的に対称となることはほとんどない．また, BJ 直交性の加法性や一意性は, 狭義凸性や平滑性等, バナッハ空間の幾何学的性質との関連が深いことが知られている．これらについては, Alonso-Martini-Wu の総説論文 [2, 3] で網羅的に解説されている．

BJ 直交性の同次性から, その振る舞いは単位球の形状により決定されることがわかる． 実際, $x, y \in X \setminus \{0\}$ のとき, それらの BJ 直交性は, $\|x\|^{-1}x, \|y\|^{-1}y \in S_X$ の BJ 直交性と同値である．また, $x \in S_X$ のとき, $x \perp_{BJ} y$ は, すべての $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して $\|x + \lambda y\| \geq 1$ であることを意味するが, これは, 直線 $\{x + \lambda y : \lambda \in \mathbb{K}\}$ が x において B_X と接することと理解できる．よって, 単位球の形状を見れば, $x \perp_{BJ} y$ かどうかが判断できる．このことから, BJ 直交構造は, バナッハ空間の幾何構造の一種と言える．

前段落の考察を一歩進めると, James [16] による, 単位球の接汎関数を用いた BJ 直交性の特徴付けが得られる．証明には, Hahn-Banach の拡張定理を用いる．

定理 3.1 (James, 1947)**.** X をバナッハ空間とし, $x, y \in X$ とする．このとき, $x \perp_{BJ} y$ であるための必要十分条件は, ある $f \in \nu(x)$ に対して $y \in \ker f$ となることである．

この定理は, 単純ではあるが, BJ 直交性に関する議論の随所で重要な役割を果たす．

次に, 非線形の BJ 同型を考えるきっかけとなった定理を紹介する．BJ 直交性を保存する「線形」写像を特徴付ける次の定理は, 1993 年に, Koldobsky [18] により実バナッハ空間に対する証明が与えられ, その後, Blanco-Turnšek [8] により実バナッハ空間と複素バナッハ空間の両方に対して機能する証明が与えられた．

定理 3.2 (Koldobsky, 1993; Blanco-Turnšek, 2006)**.** X, Y をバナッハ空間とし, $T : X \to Y$ は線形とする．このとき, $x \perp_{BJ} y$ が $Tx \perp_{BJ} Ty$ を導くならば, T は等距離写像の定数倍である．

実バナッハ空間においては, 定理 3.2 の仮定を線形性から加法性に置き換えても同じ結論が得られることが, Wójcik [30] により示されている．

また, 定理 3.2 の系として次が得られる．

系 3.3. X, Y をバナッハ空間とする．このとき, 全単射の線形写像 $T : X \to Y$ で, BJ 直交性を保存する (つまり, $x \perp_{BJ} y$ と $Tx \perp_{BJ} Ty$ とが同値となる) ものが存在するならば, $X = Y$ である．

よって, 線形構造と BJ 直交構造の組合せは, バナッハ空間の構造全体を決定付けるのに十分な情報を含んでいると言える．また, この結果を受けて, 「系 3.3 の仮定から線形性を取り除くとどうなるか」を問うのは自然なことである．[26] では, この問いに答えるために, BJ 直交構造に関するバナッハ空間の非線形同型を導入し, その同型のもとでバナッハ空間の分類を試みた．

定義 3.4 ([26])**.** X, Y をバナッハ空間とし, $T : X \to Y$ とする．このとき, T が BJ 同型写像あるとは, T が全単射であり, かつ, $x \perp_{BJ} y$ と $Tx \perp_{BJ} Ty$ とが同値となることを言う．また, X と Y の間に BJ 同型写像が存在するとき, X と Y は BJ 同型であると言われ, $X \sim_{BJ} Y$ と書かれる．

以下では, いくつかのバナッハ空間のクラスについて, BJ 同型のもとでの分類を考える．

3.1.　有限次元バナッハ空間の分類

この小節では, BJ 同型のもとで, 有限次元バナッハ空間を分類する. 有限次元の場合には, 次の補題の意味で, BJ 直交性に関する完全正規直交基底が存在することがわかる. 証明には, 可分バナッハ空間の単位球面における平滑点の稠密性 (Mazur の定理の帰結) を用いる. Mazur の定理の証明については, 例えば, [23, Theorem 1.20] を参照されたい.

補題 3.5 ([26]). X をバナッハ空間とし, $\dim X = n \in \mathbb{N}$ とする. このとき, X の基底 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ で, 次の性質を満たすものが存在する.

(i) $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S_X$ である.

(ii) すべての j に対して $x_j \perp_{BJ} y$ ならば, $y = 0$ である.

補題 3.5 を用いることで, BJ 同型が, 有限次元バナッハ空間の次元を (有限性を含めて) 保存することが示せる.

定理 3.6 ([26]). X, Y をバナッハ空間とし, X は有限次元とする. このとき, $X \sim_{BJ} Y$ ならば, Y も有限次元であり, $\dim X = \dim Y$ となる.

この定理は, バナッハ空間 X, Y の幾何学的性質を参照せずに, 次元の有限性のみから得られることに注意する. また, この定理から, ただちに次が得られる.

系 3.7 ([26]). X, Y をバナッハ空間とし, X と Y の少なくとも一方は有限次元とする. このとき, $X \sim_{BJ} Y$ ならば, $X \cong Y$ である.

したがって, 有限次元の枠組みでは, BJ 同型は通常の同型よりも強い概念である. 一方で, $X \cong Y$ であっても, $X \sim_{BJ} Y$ であるとは限らない.

例 3.8. $\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|_p$ を

$$\|(a,b)\|_p = \begin{cases} (|a|^p + |b|^p)^{1/p} & (p \in [1,\infty)) \\ \max\{|a|, |b|\} & (p = \infty) \end{cases}$$

により定め, 2 次元ノルム空間 $\ell_p^2 = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ を考える. このとき, ℓ_2^2 はヒルベルト空間であるから, BJ 直交性は ℓ_2^2 において対称である. 一方で, $x = (1,1), y = (0,1)$ とすると, ℓ_∞ においては $x \perp_{BJ} y$ かつ $y \not\perp_{BJ} x$ となる. したがって, $\ell_2^2 \not\sim_{BJ} \ell_\infty^2$ である.

3.2.　回帰的平滑バナッハ空間の分類

この小節では, BJ 同型のもとで, 回帰的平滑バナッハ空間を分類する. この設定では, 次の定理が中心的な役割を果たす.

定理 3.9 ([26]). X, Y を平滑バナッハ空間とし, $T : X \to Y$ を BJ 同型写像とする. このとき, M が X の回帰的部分空間ならば, $T(M)$ は Y の閉部分空間である.

特に, この定理から, 次が得られる.

系 3.10 ([26]). X, Y を回帰的平滑バナッハ空間とし, $T : X \to Y$ を BJ 同型写像とする. このとき, M が X の閉部分空間であることと, $T(M)$ が Y の閉部分空間であることとは同値である.

これより, 回帰的平滑バナッハ空間においては, BJ 同型写像は (集合の大小関係から定まる自然な順序を含めて) 閉部分空間を保存することがわかる. この事実は, バナッハ空間の閉部分空間が成す束の間の順序同型に関する次の定理 (Mackey [20, Theorem in p.246], および Fillmore-Longstaff [12, Theorem 1]) と組み合わせることで, 回帰的平滑バナッハ空間の分類において重要な役割を果たす. X をバナッハ空間とするとき, $\mathcal{C}(X)$ を X の閉部分空間の全体とする.

定理 3.11 (Mackey, 1942). X, Y を実バナッハ空間とする. このとき, $\mathcal{C}(X)$ と $\mathcal{C}(Y)$ が順序同型ならば, $X \cong Y$ である.

定理 3.12 (Filmore-Longstaff, 1984). X, Y を無限次元複素バナッハ空間とする. このとき, $\mathcal{C}(X)$ と $\mathcal{C}(Y)$ が順序同型ならば, $X \cong Y$ または $X \cong \overline{Y}$ である.

なお, 定理 3.12 の次元に関する仮定は, 取り除くことができない.

今, X, Y を回帰的平滑バナッハ空間とし, $T : X \to Y$ は BJ 同型写像とすると, 系 3.10 から,

$$\rho(M) = T(M)$$

は順序同型写像 $\rho : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ を定める. これと定理 3.11, および定理 3.12 から, 次が得られる.

定理 3.13 ([26]). X, Y を回帰的平滑実バナッハ空間とする. このとき, $X \sim_{BJ} Y$ ならば, $X \cong Y$ である.

定理 3.14 ([26]). X, Y を回帰的平滑複素バナッハ空間とする. このとき, $X \sim_{BJ} Y$ ならば, $X \cong Y$ または $X \cong \overline{Y}$ である.

注意 3.15 ([26]). X が複素バナッハ空間のとき, 必ずしも $X \cong \overline{X}$ とは限らない (Bourgain [9], および Kalton [17] を参照されたい). しかし, X 上の恒等写像 $x \mapsto x$ が X と $\overline{X}$ の間の反線形等距離同型写像とみなせることから, 常に $X \sim_{BJ} \overline{X}$ であることはわかる. このことから, 定理 3.14 の結論は自然なものと言える.

特に, 定理 3.13, および定理 3.14 から, 古典的数列空間の部分的な分類が得られる. ここで, 数列空間 ℓ_p は, $1 \leq p < \infty$ のとき

$$\ell_p = \left\{ (a_n)_n : \sum_n |a_n|^p < \infty \right\},$$

$p = \infty$ のとき

$$\ell_\infty = \left\{ (a_n)_n : \sup_n |a_n| < \infty \right\}$$

と定められる. また, ℓ_p のノルムは,

$$\|(a_n)_n\|_p = \begin{cases} \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \sup_n |a_n| & (p = \infty) \end{cases}$$

により定められる．このノルムのもとで, $1 < p < \infty$ のとき, ℓ_p は回帰的平滑バナッハ空間となる (例えば, Megginson [22, Theorem C.14, Corollary 5.5.17] を参照されたい)．また, $1 \le p < q \le \infty$ ならば $\ell_p \not\cong \ell_q$ であることはよく知られている (例えば, Albiac-Kalton [1, Corollary 2.1.6] を参照されたい)．なお, 複素 ℓ_p については, $\ell_p = \overline{\ell_p}$ が成立することに注意する．これは, 写像 $(a_n)_n \mapsto (\overline{a_n})_n$ が, ℓ_p から $\overline{\ell_p}$ への等距離同型写像であることによる．これらのことから, 次を得る．

系 3.16 ([26])**.** バナッハ空間の族 $\{\ell_p : p \in (1, \infty)\}$ は, BJ 同型により分類される．つまり, $1 < p < q < \infty$ ならば, $\ell_p \not\sim_{BJ} \ell_q$ である．

一方で, c_0, ℓ_1, ℓ_∞ を含む古典的数列空間の完全な分類を得るには, (平滑でない) 一般のバナッハ空間に対する理論を発展させる必要がある．ここで, c_0 は, 0 に収束する数列の全体から成る ℓ_∞ の閉部分空間である．

この小節の残りでは, (回帰的) 平滑バナッハ空間の分類について, いくつかの関連する結果を紹介する．次の定理は, Ilišević-Turnšek [14, Theorem 4.2, Theorem 4.9] による, BJ 同型写像の保存子問題 (preserver problem) の観点からの解析結果である．

定理 3.17 (Ilišević-Turnšek, 2022)**.** X, Y を平滑実バナッハ空間とし, $\dim X \ge 3$ とする．このとき, $T : X \to Y$ が BJ 同型写像ならば, 等距離同型写像 $U : X \to Y$ と汎関数 $\tau : X \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が存在して, すべての $x \in X$ に対して $Tx = \tau(x)Ux$ となる．

定理 3.18 (Ilišević-Turnšek, 2022)**.** X, Y を無限次元平滑複素バナッハ空間とし, X と Y の少なくとも一方は回帰的とする．このとき, $T : X \to Y$ が BJ 同型写像ならば, 等距離同型写像 (または, 反線形等距離同型写像) $U : X \to Y$ と汎関数 $\tau : X \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が存在して, すべての $x \in X$ に対して $Tx = \tau(x)Ux$ となる．

これらの結果から, 特に, 定理 3.13 と定理 3.14 の改良版として次が得られる．なお, 実バナッハ空間の場合の結果は, [28, Theorem 2.5] にも見られる．

系 3.19 (Ilišević-Turnšek, 2022; [28])**.** X, Y を平滑実バナッハ空間とし, $\dim X \ge 3$ とする．このとき, $X \sim_{BJ} Y$ となるための必要十分条件は, $X = Y$ となることである．

系 3.20 (Ilišević-Turnšek, 2022)**.** X, Y を無限次元平滑複素バナッハ空間とし, X と Y の少なくとも一方は回帰的とする．このとき, $X \sim_{BJ} Y$ となるための必要十分条件は, $X = Y$ または $X = \overline{Y}$ となることである．

したがって, 平滑バナッハ空間の設定では, 多くの場合, BJ 同型と等距離同型とは (概ね) 同値である．

次に, 有向グラフの観点から BJ 直交構造を解析した Arambašić et al. [4] の研究を紹介しよう．

定義 3.21 (Arambašić et al., 2023)**.** X をバナッハ空間とし,

$$V(\hat{\Gamma}(X)) = \{[x] : x \in X \setminus \{0\}\}$$

$$E(\hat{\Gamma}(X)) = \{([x], [y]) : x \perp_{BJ} y\}$$

とする．ここで, $[x]$ は x により生成される X の 1 次元部分空間である．このとき, X の di-orthograph とは, $V(\hat{\Gamma}(X))$ を頂点集合, $E(\hat{\Gamma}(X))$ を有向辺とする有向グラフ $\hat{\Gamma}(X)$ である．また, $([x],[y]) \in E(\hat{\Gamma}(X))$ のとき, $[x] \to [y]$ と書く．

このグラフは, BJ 直交性の同次性により, 曖昧さなく定義される．

バナッハ空間の di-orthograph に基づく同型概念を得るため, 有向グラフの同型について思い出そう．G_1, G_2 を有向グラフとし, $V(G_1), V(G_2)$ を G_1, G_2 の頂点集合とする．このとき, $f : V(G_1) \to V(G_2)$ がグラフ同型写像であるとは, f が全単射であり, $x \to y$ と $f(x) \to f(y)$ とが同値となることを言う．Arambašić et al. [4, Theorem 3.5] では, 3 以上の次元を持つ回帰的平滑バナッハ空間の di-orthograph 間のグラフ同型写像が, 全体空間の間の (反線形) 等距離同型写像の存在性を導くことが示されている．

定理 3.22 (Arambašić et al., 2023)**.** X, Y を回帰的平滑バナッハ空間とし, $\dim X \geq 3$ とする．このとき, グラフ同型写像 $f : \hat{\Gamma}(X) \to \hat{\Gamma}(Y)$ が存在するならば, 等距離同型写像 (または, 反線形等距離同型写像) $U : X \to Y$ が存在する．

この定理は, 系 3.19, および系 3.20 と同じ方向性の結果と言える．BJ 同型と di-orthograph 間のグラフ同型との間の関係については議論の余地があるが, BJ 直交構造そのものと di-orthograph とは密接に関連していることが予想されるため, 定理 3.22 も BJ 直交構造に関する定理として捉え直すことができるのではないかと考えられる．この予想については, 今後の検証が待たれる．また, 定理 3.22 の重要な貢献の一つは, 有限次元複素バナッハ空間を対象に含めていることである．これは, 系 3.20 では捉えきれていなかった部分である．

この小節の最後に, 定理 3.22 の証明において重要な役割を果たした補題 (Arambašić et al. [4, Lemma 3.4]) を紹介しておく．

補題 3.23 (Arambašić et al., 2023)**.** X, Y を平滑バナッハ空間とし, $\dim X \geq 2$, および $\dim Y \geq 2$ とする．また, $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ を体の同型写像とする．このとき, BJ 同型写像 $T : X \to Y$ が σ 準線形ならば, σ は恒等写像であるか, または, 複素共役である．

特に, 有限次元の場合には, この補題は重要である．

3.3. ヒルベルト空間の分類

この小節では, BJ 同型のもとで, ヒルベルト空間を分類する．このケースでは, ヒルベルト空間 H の次元が 2 であるか, 3 以上であるかによって, 結論が大きく異なる．まずは, より単純な $\dim H \geq 3$ の場合を見よう．

H をヒルベルト空間とし, $\dim H \geq 3$ とする．このとき, バナッハ空間 X に対して, $H \sim_{BJ} X$ ならば, 定理 3.6 より $\dim X \geq 3$ である．また, $H \sim_{BJ} X$ より, BJ 直交性は X においても対称であるから, X もヒルベルト空間となる．さらに, (ヒルベルト空間の次元を考えたとき) $\dim H = \dim X$ であることは, ヒルベルト空間において BJ 直交性が通常の直交性に一致すること, および $H \sim_{BJ} X$ からわかる．この議論を要約すると, 次が得られる．

定理 3.24 ([26])**.** H をヒルベルト空間とし, X をバナッハ空間とする. このとき, $\dim H \geq 3$ かつ $H \sim_{BJ} X$ ならば, $H = X$ である.

一方で, $\dim H = 2$ の場合には, 定理 3.24 とは異なる結論が得られる. これを示すため, ラドン平面の概念を用いる.

定義 3.25. X を 2 次元実ノルム空間とする. このとき, X がラドン平面であるとは, X において BJ 直交性が対称であることを言う.

ラドン平面の名称は, はじめてそれらを特徴付けた Radon [24] に由来する. 2 次元空間の世界では, ヒルベルト空間でないようなラドン平面が無数に存在する. このことは, いくつか存在するラドン平面の具体的な構成法からもわかる. 例えば, Birkhoff [6] や Day [11] においてラドン平面の構成法が与えられており, Busemann [10] にも関連する結果が見られる. また, Martini-Swanepoel [21] では, ラドン平面の歴史が詳述され, 双対ノルムを用いたラドン平面の構成法も示されている. 最近の研究では, [19] において, 単位区間上の凸関数を用いたラドン平面の構成法が与えられている.

次の結果は, 本質的には [26, Theorem 4.7] で示されたものであり, [28, Theorem 3.11] において, BJ 同型写像の追加の性質について言及された.

定理 3.26 ([26, 28])**.** X を平滑ラドン平面とする. このとき, BJ 同型写像 $T : X \to \ell_2^2$ で, 次の性質を満たすものが存在する.

(i) T はノルムを保存する. つまり, すべての $x \in X$ に対して, $\|Tx\| = \|x\|$ が成立する.

(ii) T は同次である. つまり, すべての $x \in X$ とすべての $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $T(\lambda x) = \lambda Tx$ が成立する.

(ii) T は同相写像である.

特に, $X \sim_{BJ} \ell_2^2$ である.

2 次元実ノルム空間は, それがヒルベルト空間でない限り, ℓ_2^2 と等距離同型にならない. したがって, 定理 3.26 は, 2 次元ヒルベルト空間が BJ 同型のもとで等距離同型的に特徴付けられないことを示す.

以下に, ヒルベルト空間でない平滑ラドン平面の具体例を挙げよう.

例 3.27. $1 < p < \infty$ および $p^{-1} + q^{-1} = 1$ のとき, $\mathbb{R}^2$ 上のノルムを

$$\|(a,b)\|_{p,q} = \begin{cases} (|a|^p + |b|^p)^{1/p} & (ab \geq 0) \\ (|a|^q + |b|^q)^{1/q} & (ab \leq 0) \end{cases}$$

により定めると, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$ は平滑ラドン平面となる. この空間は $\ell_{p,q}^2$ により表される. 特に, $p \neq 2$ のとき, $\ell_{p,q}^2$ はヒルベルト空間とならないことから, 定理 3.26 により, $\ell_{p,q}^2 \sim_{BJ} \ell_2^2$ かつ $\ell_{p,q}^2 \neq \ell_2^2$ がわかる.

この例は, BJ 同型であるが等距離同型でないような 2 次元実バナッハ空間のペアが無数に存在することをも示す. このようなペアの存在は, 同様の現象が 3 以上の次元においても起こることを示すうえで, 有用である.

3.4. BJ 鋭角同型

この小節では, 実バナッハ空間において BJ 鋭角と BJ 鈍角の概念を導入し, 特に, BJ 鋭角を保存するような写像について考える. 応用として, 3 以上の次元において, BJ 同型であるが等距離同型でないような実バナッハ空間のペアを構成する. BJ 鋭角と BJ 鈍角の概念は, 次のように定義される.

定義 3.28. X を実バナッハ空間とし, $x, y \in X$ とする. このとき, x が y と BJ 鋭角を成すとは, すべての $\lambda \geq 0$ に対して $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ が成立することを言い, このことを $x \perp_{BJ}^{+} y$ により表す. また, $x \perp_{BJ}^{+} y$ であるが $x \perp_{BJ} y$ でないとき, x は y と狭義の BJ 鋭角を成すと言い, このことを $x \perp_{BJ}^{++} y$ で表す.

定義 3.29. X を実バナッハ空間とし, $x, y \in X$ とする. このとき, x が y と BJ 鈍角を成すとは, すべての $\lambda \leq 0$ に対して $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ が成立することを言い, このことを $x \perp_{BJ}^{-} y$ により表す. また, $x \perp_{BJ}^{-} y$ であるが $x \perp_{BJ} y$ でないとき, x は y と狭義の BJ 鈍角を成すと言い, このことを $x \perp_{BJ}^{--} y$ で表す.

BJ 鋭角と BJ 鈍角の概念は, Sain [25] により研究され, 特に, [25, Proposition 2.1] において, 次が示された. X を実バナッハ空間とし, $x, y \in X$ とする.

(i) $x \perp_{BJ} y$ であるための必要十分条件は, $x \perp_{BJ}^{+} y$ かつ $x \perp_{BJ}^{-} y$ となることである.
(ii) $x \perp_{BJ}^{+} y$ ならば, すべての $\alpha, \beta \geq 0$ に対して $\alpha x \perp_{BJ}^{+} \beta y$ である.
(iii) $x \perp_{BJ}^{-} y$ ならば, すべての $\alpha, \beta \geq 0$ に対して $\alpha x \perp_{BJ}^{-} \beta y$ である.
(iv) $x \perp_{BJ}^{+} y$ であるための必要十分条件は, $x \perp_{BJ}^{-} (-y)$ となることである.

また, 定理 3.1 の類似物として, 次が得られる.

補題 3.30 ([28]). X を実バナッハ空間とし, $x, y \in X$ とする. このとき, 次が成立する.

(i) $x \perp_{BJ}^{+} y$ となるための必要十分条件は, ある $f \in \nu(x)$ に対して $f(y) \geq 0$ となることである.
(ii) $x \perp_{BJ}^{++} y$ となるための必要十分条件は, すべての $f \in \nu(x)$ に対して $f(y) > 0$ となることである.

BJ 鋭角の概念を用いることで, 実バナッハ空間の BJ 鋭角同型の概念が定められる.

定義 3.31. X, Y を実バナッハ空間とし, $T : X \to Y$ とする. このとき, T が BJ 鋭角同型写像であるとは, T が全単射であり, かつ, $x \perp_{BJ}^{+} y$ と $Tx \perp_{BJ}^{+} Ty$ とが同値となることを言う. また, X と Y の間に BJ 鋭角同型写像が存在するとき, X と Y は BJ 鋭角同型であると言われ, $X \sim_{BJ}^{+} Y$ と書かれる.

次の 2 つの結果は, BJ 同型と BJ 鋭角同型との間の部分的な関係を示す.

定理 3.32 ([28]). X, Y を実バナッハ空間とし, $T : X \to Y$ は BJ 同型写像とする. このとき, T が連続ならば, $x \perp_{BJ}^{+} y$ は $Tx \perp_{BJ}^{+} Ty$ を導く. また, したがって, T が双連続ならば, T は BJ 鋭角同型写像である.

命題 3.33 ([28]). X, Y を実バナッハ空間とし, $T : X \to Y$ は BJ 鋭角同型写像とする. このとき, T が同次ならば, T は BJ 同型写像である.

以上の準備のもとで, 3 以上の次元において, BJ 同型であるが等距離同型でないバナッハ空間のペ

アを構成する．その際には, バナッハ空間 X, Y の直和空間 $X \oplus_\infty Y$ が重要な役割を果たす．ここで, $X \oplus_\infty Y$ とは, 直積空間 $X \times Y$ に,

$$\|(x,y)\|_\infty = \|(\|x\|, \|y\|)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

により定まるノルムを導入したバナッハ空間である．

$X \oplus_\infty Y$ における BJ 鋭角は, 次のように特徴付けられる．

補題 3.34 ([28])**.**　X, Y をバナッハ空間とし, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \oplus_\infty Y$ とする． このとき, $(x_1, y_1) \perp_{BJ}^+ (x_2, y_2)$ であるための必要十分条件は, 次のいずれかが成立することである．

(i) $\|x_1\| > \|y_1\|$, かつ $x_1 \perp_{BJ}^+ x_2$ である．

(ii) $\|x_1\| = \|y_1\|$, かつ $x_1 \perp_{BJ}^+ x_2$ または $y_1 \perp_{BJ}^+ y_2$ である．

(iii) $\|x_1\| < \|y_1\|$, かつ $y_1 \perp_{BJ}^+ y_2$ である．

求める性質を持つ具体例を構成するためには, バナッハ空間 $c_0(I)$ を用いる．ここで, I が空でない集合のとき, $c_0(I)$ は, すべての $\varepsilon > 0$ に対して $\{n \in I : |a_n| \geq \varepsilon\}$ が有限集合であるような実数の系 $(a_n)_{n \in I}$ の全体を表し, $c_0(I)$ 上のノルムは

$$\|(a_n)_{n \in I}\|_\infty = \sup_{n \in I} |a_n|$$

で与えられる．

定理 3.32, 命題 3.33, および補題 3.34 を定理 3.26 と組み合わせることにより, 次が得られる．

定理 3.35 ([28])**.**　X を平滑ラドン平面とし, $X \neq \ell_2^2$ とする．また, I を空でない集合とする．このとき, $X \oplus_\infty c_0(I) \sim_{BJ} \ell_2^2 \oplus_\infty c_0(I)$, かつ $X \oplus_\infty c_0(I) \neq \ell_2^2 \oplus_\infty c_0(I)$ である．

この定理の証明には, X が平滑ラドン平面であり, かつ $X \neq \ell_2^2$ ならば, $X \oplus_\infty c_0(I)$ は 2 次元ヒルベルト空間を部分空間として含まないことを用いる．添字集合 I を有限集合にとることで, $X \oplus_\infty c_0(I)$ は 2 以上のすべての有限次元を網羅することができ, また, I を無限集合にとることで, 無限次元でも同じ結論が得られることがわかる．

一方で, 複素バナッハ空間に対しても同様の現象が起こるかどうかはわかっていない．

3.5.　バナッハ空間の幾何学的構造空間

この小節では, 平滑でないバナッハ空間の BJ 直交構造を解析する準備として,「バナッハ空間の幾何学的構造空間」の概念を導入し, その基本的性質について述べる．

X をバナッハ空間とし, 各 $x \in X$ に対して $R_x = \{y \in X : x \perp_{BJ} y\}$ と定める．BJ 直交性の非退化性から, R_x は, $x = 0$ のとき, またそのときに限って X と一致することに注意する．さらに, X 上の二項関係 $\precsim$ を, $R_x \subset R_y$ であるとき $x \precsim y$ と定める．この $\precsim$ は, X 上の前順序となる．以下では, 前順序を備えた集合 $(X, \precsim)$ を考える．

X の部分集合 F が $(X, \precsim)$ 上のフィルターであるとは, それが以下の条件を満たすことを言う．

(i) F は空でない.

(ii) $x \in F$ かつ $x \precsim y$ ならば, $y \in F$ である.

(iii) F は下向き有向集合である.

また, フィルター F が極大であるとは, それが他のフィルターの真部分集合とならないことを言う. ここでの極大性は, 便宜上, F が X の真部分集合であることは要求しない. これは, $\dim X = 1$ のとき, X 自身が唯一の極大フィルターであること, および $\dim X \geq 2$ のとき, $(X, \precsim)$ 上のフィルターは自動的に X の真部分集合となることによる ([29, Remark 3.1] を参照されたい).

ツォルンの補題を用いることで, $(X, \precsim)$ のフィルターについて, 次がわかる.

補題 3.36 ([27]). X をバナッハ空間とし, D_0 を X の空でない下向き有向集合とする. このとき, $(X, \precsim)$ 上の極大フィルター U で, $D_0 \subset U$ を満たすものが存在する.

この補題により, $(X, \precsim)$ 上には十分多くの極大フィルターが存在することが保証される. また, すべての $x \in X$ とすべての $c \in \mathbb{K}$ に対して $x \precsim cx$ となることから, $(X, \precsim)$ のフィルター F について, $x \in F$ ならば $cx \in F$ であることがわかる.

バナッハ空間 X の幾何学的構造空間は, $(X, \precsim)$ 上の極大フィルターを用いて定義される.

定義 3.37 ([27]). X をバナッハ空間とし, $(X, \precsim)$ 上の極大フィルター U に対して,

$$I_U = \bigcap_{x \in U} R_x = \bigcap_{x \in U} \bigcup_{f \in \nu(x)} \ker f$$

と定める. このとき, X の幾何学的構造空間を

$$\mathfrak{S}(X) = \{I_U : U \text{ は } (X, \precsim) \text{ 上の極大フィルター}\}$$

により定める.

幾何学的構造空間を位相的な視点から解析するため, 閉包作用素を導入しよう.

命題 3.38 ([27]). X をバナッハ空間とし, 各 $S \subset \mathfrak{S}(X)$ に対して

$$S^= = \left\{ I \in \mathfrak{S}(X) : \bigcap_{J \in S} J \subset I \right\}$$

と定める. このとき, 次が成立する.

(i) $\emptyset^= = \emptyset$ である.

(ii) すべての $S \subset \mathfrak{S}(X)$ に対して, $S \subset S^=$ である.

(iii) すべての $S \subset \mathfrak{S}(X)$ に対して, $(S^=)^= = S^=$ である.

(iv) $S_1 \subset S_2 \subset \mathfrak{S}(X)$ ならば, $S_1^= \subset S_2^=$ となる.

言い換えれば, $S \mapsto S^=$ は $\emptyset^= = \emptyset$ を満たす閉包作用素であり, $\mathfrak{S}(X)$ はこの閉包作用素のもとで閉包空間となる.

この閉包作用素は, C^* 環の原始イデアルの集合における hull-kernel 位相の定義を参考に導入された (例えば, [7, II.6.5 Primitive Ideal Space and Spectrum] を参照されたい)．以下では, 幾何学的構造空間を, 命題 3.38 の閉包作用素を備えた閉包空間として扱う.

バナッハ空間の幾何学的構造空間における閉包作用素は, 命題 3.38 の意味で, 閉集合族を考えるのに適した性質をいくつか備えている. しかし, この閉包作用素は, 必ずしも Kuratowski の閉包公理を満たすとは限らず, 幾何学的構造空間に位相が導入されるかどうかは, バナッハ空間の幾何的特徴に強く依存することが知られている. そこで, 幾何学的構造空間の位相化可能性について, 次のように定式化しておく.

定義 3.39 ([27])**.** X をバナッハ空間とし, $\mathfrak{C}(X) = \{S \subset \mathfrak{S}(X) : S^= = S\}$ と定める. このとき, $\mathfrak{S}(X)$ が位相化可能 (topologizable) であるとは, $\mathfrak{C}(X)$ が閉集合の公理を満たすことを言う.

注意 3.40. バナッハ空間 X の幾何学的構造空間 $\mathfrak{S}(X)$ が位相化可能であるための必要十分条件は, 閉包作用素 $S \mapsto S^=$ が Kuratowski の閉包公理を満たすことである.

以下では, バナッハ空間の幾何学的構造空間の基本的性質について述べる. バナッハ空間 X の元 x に対して,

$$\alpha(x) = \{f \in B_{X^*} : |f(x)| = \|x\|\}$$

と定める. このとき, 次がわかる.

補題 3.41 ([27])**.** X をバナッハ空間とし, $x, y \in X$ とする. このとき, 次は同値:

(i) $x \precsim y$

(ii) $\alpha(x) \subset \alpha(y)$

次に, $(X, \precsim)$ 上の極大フィルター U に対して,

$$\alpha(U) = \bigcap_{x \in U} \alpha(x)$$

と定める. この集合を用いて, $\mathfrak{S}(X)$ の元を特徴付けることができる.

定理 3.42 ([27])**.** X をバナッハ空間とし, U を $(X, \precsim)$ 上の極大フィルターとする. このとき,

$$I_U = \bigcup_{f \in \alpha(U)} \ker f$$

が成立する.

定理 3.43 ([27])**.** X をバナッハ空間とし, U を $(X, \precsim)$ 上の極大フィルターとする. もし $f \in \alpha(U)$ ならば,

$$I_U = \bigcap \{R_x : x \in f^{-1}(1) \cap B_X\}$$

が成立する.

また, 定理 3.43 の応用として, 次を得る.

定理 3.44 ([27])**.** X をバナッハ空間とし, U を $(X, \precsim)$ 上の極大フィルターとする. もし $x_0 \in S_X$ が $(x_0 + I_U) \cap B_X \subset S_X$ を満たすならば,

$$I_U = \bigcap \{R_x : x \in (x_0 + I_U) \cap B_X\}$$

が成立する.

定理 3.44 を応用することにより, 幾何学的構造空間が T_1 様空間であることがわかる.

定理 3.45 ([27])**.** X をバナッハ空間とし, U, V を $(X, \precsim)$ 上の極大フィルターとする. このとき, $I_U \subset I_V$ ならば, $I_U = I_V$ となる. また, したがって, 各 $I \in \mathfrak{S}(X)$ に対して, $\{I\} \in \mathfrak{C}(X)$ である.

幾何学的構造空間の位相化可能性の議論において, 定理 3.45 の次の結論は, 特に重要である.

系 3.46 ([27])**.** X をバナッハ空間とする. このとき, $\mathfrak{S}(X)$ が位相化可能ならば, $\mathfrak{S}(X)$ のすべての有限部分集合は $\mathfrak{C}(X)$ に属する.

次に, バナッハ空間 X の単位球の面構造と幾何学的構造空間との間の関係について述べる. バナッハ空間 X の単位球 B_X の面 F に対して,

$$\Phi^*(F) = \{f \in B_{X^*} : \text{各 } x \in F \text{ に対して, } f(x) = 1\}$$

と定める. このとき, B_X の極大面から $\mathfrak{S}(X)$ が生成されることが示せる.

補題 3.47 ([27])**.** X をバナッハ空間とし, F を B_X の極大面とする. また,

$$I_F = \bigcup \{\ker f : f \in \Phi^*(F)\}$$

とする. このとき, $(X, \precsim)$ 上の極大フィルター U が存在して, $\Phi^*(F) \subset \alpha(U)$ かつ $I_F = I_U$ となる. 特に, $I_F \in \mathfrak{S}(X)$ である.

バナッハ空間 X に対して, B_X のすべての極大面から成る集合を $\mathcal{F}_{\max}(X)$ で表す. また, $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{\max}(X)$ に対して, ある $c \in S_{\mathbb{K}}$ を用いて $F_1 = cF_2$ と書けるとき $F_1 \simeq F_2$ と定めれば, $\simeq$ は $\mathcal{F}_{\max}(X)$ 上の同値関係となる. この同値関係による $\mathcal{F}_{\max}(X)$ の商集合を $\mathcal{F}_{\mathrm{ess}}(X)$ により表し, F の同値類を $C(F)$ と書く. この準備のもとで, 次を得る.

定理 3.48 ([27])**.** X をバナッハ空間とし, 各 $F \in \mathcal{F}_{\mathrm{ess}}(X)$ に対して $\kappa(C(F)) = I_F$ と定める. このとき, $\kappa : \mathcal{F}_{\mathrm{ess}}(X) \to \mathfrak{S}(X)$ は全単射である. 特に,

$$\mathfrak{S}(X) = \{I_F : F \text{ は } B_X \text{ の極大面 }\}$$

が成立する.

したがって, バナッハ空間の幾何学的構造空間は, 単位球の極大面のみを用いて定義することも可能である. しかし, BJ 同型の理論への応用という観点からは, BJ 直交性を用いたオリジナルの定義の方が都合が良い. そのため, この小節では, 定義 3.37 を出発点として採用した.

この小節の最後に, 幾何学的構造空間を BJ 同型の研究に応用する上で有用な, 2 つの定理を紹介する. それらの中では, 閉包空間の間の同相写像が極めて重要な役割を果たす. ここで, 閉包空間 K, L の間の写像 $f : K \to L$ が連続であるとは, すべての $A \subset K$ に対して $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ となることを言い, f が同相写像であるとは, f が双連続であることを言う. K, L が位相空間の場合には, f の連続性に関して, 閉包空間における定義と位相空間における定義とは同値となる.

定理 3.49 ([27]). X, Y をバナッハ空間とし, $T : X \to Y$ を BJ 同型写像とする. このとき, $(X, \precsim)$ 上の各極大フィルター U に対して $\Phi_T(I_U) = T(I_U)$ と定めれば, $\Phi_T : \mathfrak{S}(X) \to \mathfrak{S}(Y)$ は同相写像となる.

定理 3.50 ([27]). X, Y をバナッハ空間とし, $\mathfrak{S}(X)$ と $\mathfrak{S}(Y)$ は閉包空間として同相とする. このとき, $\mathfrak{S}(X)$ が位相化可能ならば, $\mathfrak{S}(Y)$ も位相化可能であり, $\mathfrak{S}(X)$ と $\mathfrak{S}(Y)$ は位相空間として同相である.

これらの結果から, 幾何学的構造空間とその位相化可能性は, BJ 同型写像の不変量であることがわかる.

3.6. 連続関数空間と古典的数列空間の分類

この小節では, 幾何学的構造空間の解析を通して, BJ 同型のもとで, 連続関数空間と古典的数列空間を分類する.

K を局所コンパクトハウスドルフ空間とするとき, $C_0(K)$ は, 無限遠点で消える K 上の連続関数空間の全体が成すバナッハ空間を表す. ここで, $f : K \to \mathbb{K}$ が無限遠点で消えるとは, すべての $\varepsilon > 0$ に対して $\{t \in K : |f(t)| \geq \varepsilon\}$ がコンパクトとなることを言う. また, $C_0(K)$ 上のノルムは, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in K} |f(t)|$ で与えられる.

連続関数空間のケースでは, 次の定理がマイルストーンとなる.

定理 3.51 ([27]). K を局所コンパクトハウスドルフ空間とする. このとき,

$$\mathfrak{S}(C_0(K)) = \{\ker \delta_t : t \in K\}$$

である. ここで, δ_t は, $\delta_t(f) = f(t)$ により定まる $C_0(K)^*$ の元である. また, $\mathfrak{S}(C_0(K))$ は位相化可能であり, $\mathfrak{S}(C_0(K))$ と K は同相である.

この事実を定理 3.49 と組み合わせることで, 次を得る.

系 3.52 ([27]). K, L を局所コンパクトハウスドルフ空間とする. このとき, 次は同値:

(i) K と L は同相である.

(ii) $C_0(K) = C_0(L)$ である.

(iii) $C_0(K) \sim_{BJ} C_0(L)$ である.

したがって, 連続関数空間のクラスは, BJ 同型のもとで等距離同型的に分類される. 特に, 数列空間 c_0, ℓ_∞ は, 局所コンパクトハウスドルフ空間上の連続関数空間とも見られるから, 定理 3.51 より, ただちに次を得る.

系 3.53 ([27])**.** $\mathfrak{S}(c_0)$ と $\mathfrak{S}(\ell_\infty)$ は位相化可能である.

次に, 古典的数列空間の分類を考える. このケースでは, 次の定理が有用である.

定理 3.54 ([27])**.** X を平滑バナッハ空間とする. このとき,

$$\mathfrak{S}(X) = \{\ker \nu(x) : x \in X \setminus \{0\}\}$$

である. さらに, X が回帰的かつ $\dim X \geq 2$ ならば, $\mathfrak{S}(X)$ は位相化不可能である.

$1 < p < \infty$ のとき, ℓ_p は回帰的平滑バナッハ空間であるから, $\mathfrak{S}(\ell_p)$ は位相化不可能である. さらに, 直接的な計算から, 次がわかる.

定理 3.55 ([27])**.** $\mathfrak{S}(\ell_1) = \{\ker f : f \in \mathrm{ext}(B_{\ell_1^*})\}$ である. また, $\mathfrak{S}(\ell_1)$ は位相化不可能である.

したがって, 定理 3.49 と 3.50 の観点から, $1 \leq p < \infty$ のとき, $c_0 \not\sim_{BJ} \ell_p \not\sim_{BJ} \ell_\infty$ がわかる. また, $c_0 \not\sim_{BJ} \ell_\infty$ は, 定理 3.52 と $c_0 \neq \ell_\infty$ から従う. よって, $1 < p < \infty$ のとき $\ell_1 \not\sim_{BJ} \ell_p$ であることを示せば, BJ 同型のもとでの古典的数列空間の分類が完了する. この目的においては, 次の概念が有用である.

定義 3.56 ([27])**.** X をバナッハ空間とする. このとき, $\mathfrak{S}(X)$ が BJ 同次であるとは, 各 $I, J \in \mathfrak{S}(X)$ に対して, X 上の BJ 同型写像 T が存在して, $T(I) = J$ となることを言う.

この概念は, BJ 同型のもとで保存されることがわかる.

定理 3.57 ([27])**.** X, Y をバナッハ空間とし, $X \sim_{BJ} Y$ とする. このとき, $\mathfrak{S}(X)$ が BJ 同次ならば, $\mathfrak{S}(Y)$ も BJ 同次である.

BJ 同次性の観点から, ℓ_p を分類しよう.

定理 3.58 ([27])**.** $\mathfrak{S}(\ell_1)$ は BJ 同次である.

定理 3.59 ([27])**.** $1 < p < \infty$ かつ $p \neq 2$ のとき, $\mathfrak{S}(\ell_p)$ は BJ 同次でない.

したがって, 定理 3.57 より, $1 < p < \infty$ かつ $p \neq 2$ のとき, $\ell_1 \not\sim_{BJ} \ell_p$ である. また, $\ell_1 \not\sim_{BJ} \ell_2$ であることは, ヒルベルト空間に対する結果から従う. 以上より, 次を得る.

系 3.60 ([27])**.** 古典的数列空間 $\{c_0\} \cup \{\ell_p : 1 \leq p \leq \infty\}$ は, BJ 同型のもとで分類される.

4. 幾何学的構造空間に基づく非線形同型

この節では, 前節で重要な役割を果たした幾何学的構造空間を用いて, バナッハ空間の非線形同型 ($\mathfrak{S}$ 同型) を定義し, $\mathfrak{S}$ 同型のもとで, バナッハ空間の分類を考える.

定義 4.1 ([29])**.** X, Y をバナッハ空間とする. このとき, X と Y が $\mathfrak{S}$ 同型であるとは, $\mathfrak{S}(X)$ と $\mathfrak{S}(Y)$ の間に同相写像が存在することを言い, このことを $X \sim_{\mathfrak{S}} Y$ により表す.

定理 3.49 から, $\mathfrak{S}$ 同型は BJ 同型よりも粗い分類を与えることがわかる.

定理 4.2 ([29])**.** X, Y をバナッハ空間とする. このとき, $X \sim_{BJ} Y$ ならば, $X \sim_{\mathfrak{S}} Y$ である.

$\mathfrak{S}$ 同型は BJ 同型よりも弱い概念であるが, 前節における BJ 同型に関する結果の一部は, $\mathfrak{S}$ 同型に

対しても有効である．例えば, 定理 3.51 を応用することで, 連続関数空間は $\mathfrak{S}$ 同型のレベルでも分類できることがわかる．

定理 4.3 ([29])**.**　K, L を局所コンパクトハウスドルフ空間とする．このとき, 次は同値:

(i) K と L は同相である．

(ii) $C_0(K) = C_0(L)$ である．

(iii) $C_0(K) \sim_{\mathfrak{S}} C_0(L)$ である．

他方, $\mathfrak{S}$ 同型のもとで回帰的平滑バナッハ空間や古典的数列空間を分類するためには, 新たな道具を準備する必要がある．以下では, 幾何学的構造空間に関する理論をさらに発展させることで, いくつかのバナッハ空間のクラスを $\mathfrak{S}$ 同型のもとで分類する．

4.1.　有限次元バナッハ空間の分類

この小節では, $\mathfrak{S}$ 同型のもとで, 有限次元バナッハ空間を分類する．はじめに, $\mathfrak{S}$ 同型が, 有限次元バナッハ空間の次元を保存することを見よう．

補題 4.4 ([29])**.**　X をバナッハ空間とし, $S \subset \mathfrak{S}(X)$ とする．このとき, $S^{=} = \mathfrak{S}(X)$ となるための必要十分条件は, $\bigcap_{J \in S} J = \{0\}$ となることである．

補題 4.5 ([29])**.**　X をバナッハ空間とし, $\dim X = n$ とする．このとき, ある n 元集合 $\{I_{U_1}, \ldots, I_{U_n}\} \subset \mathfrak{S}(X)$ に対して, $\bigcap_{j=1}^{n} I_{U_j} = \{0\}$ となる．

定理 4.6 ([29])**.**　X, Y をバナッハ空間とし, X は有限次元とする．このとき, $X \sim_{\mathfrak{S}} Y$ ならば, Y も有限次元であり, $\dim X = \dim Y$ となる．

この定理から, 定理 3.6 が系として得られる．

次に, 濃度の観点から, 幾何学的構造空間を解析してみよう．まずは, 無限次元の場合を考える．

命題 4.7 ([29])**.**　X を無限次元バナッハ空間とする．このとき, $\mathfrak{S}(X)$ は無限集合である．

有限次元の場合には, バナッハ空間 X の幾何学的構造空間の濃度 $\mathrm{card}(\mathfrak{S}(X))$ は, X の次元と比較できる．

命題 4.8 ([29])**.**　X を有限次元バナッハ空間とする．このとき, $\mathrm{card}(\mathfrak{S}(X)) \geq \dim X$ である．

また, この不等式における等号成立条件は, 次の通りである．

定理 4.9 ([29])**.**　X をバナッハ空間とし, $\dim X = n$ とする．このとき, 次は同値:

(i) $\mathrm{card}(\mathfrak{S}(X)) = n$ である．

(ii) $X = \ell_\infty^n$ である．ここで, ℓ_∞^n とは, $\mathbb{K}^n$ 上に

$$\|(a_1, \ldots, a_n)\|_\infty = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$$

により定まるノルムを導入したバナッハ空間である．

(iii) $\mathfrak{S}(X)$ は位相化可能である．

したがって, ℓ_∞^n は, $\mathfrak{S}(X)$ が位相化可能である唯一の n 次元バナッハ空間 X として, 等距離同型的

に特徴付けられる．また，これより，線形同相が $\mathfrak{S}$ 同型を一般には導かないことがわかる．実際，$n \geq 2$ のとき，ℓ_2^n を n 次元ヒルベルト空間とすると，$\ell_2^n \cong \ell_\infty^n$，および $\ell_2^n \not\simeq_{\mathfrak{S}} \ell_\infty^n$ である．

4.2. 準平滑バナッハ空間

この小節では，準平滑バナッハ空間の概念を導入し，その設定のもとで，$\mathfrak{S}$ 同型の理論を発展させる．バナッハ空間の準平滑性は，次のように定義される．

定義 4.10 ([29])**.** X をバナッハ空間とする．このとき，X が準平滑であるとは，すべての $I \in \mathfrak{S}(X)$ に対して，$I = \ker f$ となるような $f \in X^*$ が存在することを言う．

注意 4.11. 定理 3.54 より，平滑バナッハ空間は準平滑である．また，定理 3.51 と定理 3.55 より，$C_0(K)$ と ℓ_1 は平滑でない準平滑バナッハ空間の例を与える．

バナッハ空間の準平滑性は，単位球の極大面における平滑性と同義であることが示せる．

定理 4.12 ([29])**.** X をバナッハ空間とする．このとき，X が準平滑であるための必要十分条件は，B_X のすべての極大面 F に対して，$\Phi^*(F)$ が一点集合となることである．

準平滑という名称は，この定理に由来する．準平滑バナッハ空間 X においては，$\mathfrak{C}(X)$ の元は，X や X^* の特殊な部分空間と対応する．これを示すため，次の定義を与える．

定義 4.13 ([29])**.** X を準平滑バナッハ空間とする．このとき，X の部分空間 M が $\mathfrak{S}$ 閉であるとは，ある $S \in \mathfrak{C}(X)$ に対して $M = \bigcap\{\ker f : f \in X^*,\ \ker f \in S\}$ となることを言う．また，X^* の部分空間 N が $\mathfrak{S}$ 汎弱閉であるとは，ある $S \in \mathfrak{C}(X)$ に対して $N = [\{f \in X^* : \ker f \in S\}]^{w^*}$ となることを言う．ここで，$[\{f \in X^* : \ker f \in S\}]^{w^*}$ は，$\{f \in X^* : \ker f \in S\}$ の汎弱閉線形包を表す．X の $\mathfrak{S}$ 閉部分空間の全体を $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}(X)$ で，X^* の $\mathfrak{S}$ 汎弱閉部分空間の全体を $\mathcal{C}_{w^*}^{\mathfrak{S}}(X^*)$ で，それぞれ表す．

例 4.14. K を局所コンパクトハウスドルフ空間とし，$S \subset \mathfrak{S}(C_0(K))$ とする．このとき，$S \in \mathfrak{C}(C_0(K))$ となるための必要十分条件は，K のある閉集合 A に対して $S = \{\ker \delta_t : t \in A\}$ となることである．したがって，$C_0(K)$ の部分空間 M が $\mathfrak{S}$ 閉であるための必要十分条件は，K のある閉集合 A に対して $M = \{f \in C_0(K) : f(A) = \{0\}\}$ となること，つまり，M が $C_0(K)$ の閉イデアルとなることである．これより，特に，$\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}(C_0(K)) \neq \mathcal{C}(C_0(K))$ であることに注意する．

X を準平滑バナッハ空間とするとき，$\mathfrak{C}(X), \mathcal{C}^{\mathfrak{S}}(X), \mathfrak{C}_{w^*}^{\mathfrak{S}}(X^*)$ は通常の包含関係のもとで半順序集合となる．次の定理は，これらの集合間の対応関係を示す．

定理 4.15 ([29])**.** X を準平滑バナッハ空間とし，各 $S \in \mathfrak{C}(X)$ に対して

$$\Pi(S) = \bigcap\{\ker f : f \in X^*,\ \ker f \in S\}$$

$$\Pi^*(S) = [\{f \in X^* : \ker f \in S\}]^{w^*}$$

とする．このとき，$\Pi : \mathfrak{C}(X) \to \mathcal{C}^{\mathfrak{S}}(X)$ は反順序同型写像であり，$\Pi^* : \mathfrak{C}(X) \to \mathcal{C}_{w^*}^{\mathfrak{S}}(X^*)$ は順序同型写像である．さらに，各 $S \in \mathfrak{C}(X)$ に対して $\Pi(S) = \Pi^*(S)_\perp$ が成立する．ここで，$\Pi^*(S)_\perp$ は，$\Pi^*(S)$ の X における零化域 (annihilator) を表す．したがって，$\Pi(S) \mapsto \Pi^*(S)$ は，$\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}(X)$ から $\mathfrak{C}_{w^*}^{\mathfrak{S}}(X^*)$ へ

の反順序同型写像となる.

注意 4.16.　X を準平滑バナッハ空間とする. このとき, 定理 4.15, および $\emptyset, \mathfrak{S}(X) \in \mathfrak{C}(X)$ から, $\{0\}, X \in \mathcal{C}^{\mathfrak{S}}(X)$, および $\{0\}, X^* \in \mathcal{C}^{\mathfrak{S}}_{w^*}(X^*)$ がわかる.

この小節の結果は, 次の定理を通して, $\mathfrak{S}$ 同型のもとでの準平滑バナッハ空間の分類に応用される.

定理 4.17 ([29]).　X, Y をバナッハ空間とする. このとき, 次は同値:

(i) $X \sim_{\mathfrak{S}} Y$ である.

(ii) $\mathfrak{C}(X)$ と $\mathfrak{C}(Y)$ は順序同型である.

さらに, X, Y が準平滑ならば, (i), (ii) は次の条件とも同値である.

(iii) $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}(X)$ と $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}(Y)$ は順序同型である.

(iv) $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}_{w^*}(X^*)$ と $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}_{w^*}(Y)$ は順序同型である.

4.3.　回帰的平滑バナッハ空間の分類

この小節では, $\mathfrak{S}$ 同型のもとで, 回帰的平滑バナッハ空間を分類する. このケースでは, 次の定理が本質的な役割を果たす.

定理 4.18 ([29]).　X を回帰的平滑バナッハ空間とする. このとき, $\mathfrak{C}(X)$ から $\mathcal{C}(X^*)$ への順序同型写像が存在する.

また, X が回帰的平滑バナッハ空間ならば, X^* の閉部分空間はすべて汎弱閉であるから, $M \mapsto M^{\perp}$ は $\mathcal{C}(X)$ から $\mathcal{C}(X^*)$ への反順序同型写像を与える. このことと定理 4.18 から, 次がわかる.

系 4.19 ([29]).　X を回帰的平滑バナッハ空間とする. このとき, $\mathfrak{C}(X)$ から $\mathcal{C}(X)$ への順序同型写像が存在する.

この系を定理 4.17 と組み合わせることで, 定理 3.11 と定理 3.12 を通して, $X \sim_{\mathfrak{S}} Y$ が $X \cong Y$ または $X \cong \overline{Y}$ を導くことがわかる. また, $\mathfrak{S}$ 同型に関しては, この逆も成立することが示せる. これらを纏めると, 次を得る.

定理 4.20 ([29]).　X, Y を回帰的平滑実バナッハ空間とする. このとき, $X \sim_{\mathfrak{S}} Y$ となるための必要十分条件は, $X \cong Y$ となることである.

定理 4.21 ([29]). X, Y を回帰的平滑複素バナッハ空間とする. このとき, $X \sim_{\mathfrak{S}} Y$ となるための必要十分条件は, $X \cong Y$ または $X \cong \overline{Y}$ となることである.

これらの定理をヒルベルト空間に適用することで, 次を得る. ここで, 複素ヒルベルト空間 H については, 正規直交基底に関する座標を考えることで, $H = \overline{H}$ がわかることを思い出そう.

系 4.22 ([29]).　X を回帰的平滑バナッハ空間とし, H をヒルベルト空間とする. このとき, $X \sim_{\mathfrak{S}} H$ となるための必要十分条件は, $X \cong H$ となることである.

この系と定理 3.24 から, 3 以上の次元を持つ回帰的平滑バナッハ空間 X で, $X \neq H$ かつ $X \cong H$ となるものをとれば, $X \not\sim_{BJ} H$ かつ $X \sim_{\mathfrak{S}} H$ となることがわかる. このような X としては, 例えば, $1 < p < \infty$ かつ $p \neq 2$ であるような p に対して, $\ell_p^2 \oplus_2 \ell_2$ を考えればよい. ここで, $\ell_p^2 \oplus_2 \ell_2$ とは, 直積

空間 $\ell_p^2 \times \ell_2$ に

$$\|(x,y)\|_2 = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$$

により定まるノルムを導入したバナッハ空間である．特に, BJ 同型と $\mathfrak{S}$ 同型は, 互いに異なるバナッハ空間の分類を与えることに注意する．

4.4. 古典的数列空間の分類

この小節では, $\mathfrak{S}$ 同型のもとでの古典的数列空間の分類について述べる．まず, 前節の結果から, $1 \leq p < \infty$ のとき $\mathfrak{S}(\ell_p)$ は位相化不可能であり, 一方で, $\mathfrak{S}(c_0)$ と $\mathfrak{S}(\ell_\infty)$ は位相化可能であった．よって, $1 \leq p < \infty$ に対して $c_0 \not\sim_{\mathfrak{S}} \ell_p \not\sim_{\mathfrak{S}} \ell_\infty$ がわかる．また, $c_0 \not\sim_{\mathfrak{S}} \ell_\infty$ は, 定理 4.3 と $c_0 \neq \ell_\infty$ から従う．さらに, 前小節の結果から次がわかる．ここで, 複素 ℓ_p 空間については, $\ell_p = \overline{\ell_p}$ であったことを思い出そう．

補題 4.23 ([29])**.** X を回帰的平滑バナッハ空間とし, $1 < p < \infty$ とする．このとき, $X \sim_{\mathfrak{S}} \ell_p$ となるための必要十分条件は, $X \cong \ell_p$ となることである．

これより, $1 < p < q < \infty$ ならば $\ell_p \not\sim_{\mathfrak{S}} \ell_q$ であることがわかる．したがって, $1 < p < \infty$ のとき $\ell_1 \not\sim_{\mathfrak{S}} \ell_p$ であることを示せば, $\mathfrak{S}$ 同型のもとでの古典的数列空間の分類が完了する．この目的においては, 準平滑バナッハ空間に関する結果が重要な役割を果たす．

はじめに, 平滑バナッハ空間 X における $\mathfrak{C}(X)$ の極大元の振る舞いを見よう．

補題 4.24 ([29])**.** X をバナッハ空間とし, 各 $x \in X$ に対して $S(x) = \{I \in \mathfrak{S}(X) : x \in I\}$ と定める．このとき, $x \neq 0$ ならば, $S(x) \in \mathfrak{C}(X)$ かつ $S(x) \neq \mathfrak{S}(X)$ である．

補題 4.25 ([29])**.** X を平滑バナッハ空間とし, $x \in X \setminus \{0\}$ とする．このとき, $\Pi^*(S(x)) = \ker Qx$ である．ここで, $Q : X \to X^{**}$ は自然な埋め込みを表す．

補題 4.26 ([29])**.** X を平滑バナッハ空間とし, $S \in \mathfrak{C}(X)$ とする．このとき, S が $\mathfrak{C}(X)$ において極大であるための必要十分条件は, ある $x \in X \setminus \{0\}$ に対して $S = S(x)$ となることである．

補題 4.27 ([29])**.** X を平滑バナッハ空間とし, $\dim X \geq 3$ とする．このとき, S_1, S_2 が $\mathfrak{C}(X)$ の極大元ならば, $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ である．

次に, $\mathfrak{C}(\ell_1)$ における極大元の振る舞いを見ると, $\mathfrak{C}(\ell_1)$ のある極大元 S_1, S_2 について, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ となることがわかる．一方で, 定理 4.15 によれば, 準平滑バナッハ空間 X に対して, $X \sim_{\mathfrak{S}} \ell_1$ であるための必要十分条件は, $\mathfrak{C}(X)$ と $\mathfrak{C}(\ell_1)$ が順序同型となることであったから, 上述のことと補題 4.27 から, 次が得られる．

定理 4.28 ([29])**.** X を平滑バナッハ空間とする．このとき, $\ell_1 \not\sim_{\mathfrak{S}} X$ である．

したがって, $1 < p < \infty$ のとき $\ell_1 \not\sim_{\mathfrak{S}} \ell_p$ である．ここまでの議論を纏めると, 本小節の主定理として, 次が得られる．

定理 4.29 ([29])**.** 古典的数列空間 $\{c_0\} \cup \{\ell_p : 1 \leq p \leq \infty\}$ は, $\mathfrak{S}$ 同型のもとで分類される．

参考文献

[1] F. Albiac and N.J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, Springer, New York, 2006.

[2] J. Alonso, H. Martini and S. Wu, *On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces*, Aequationes Math., **83** (2012), 153–189.

[3] J. Alonso, H. Martini and S. Wu, *Orthogonality types in normed linear spaces*, Surveys in geometry I, 97–170, Springer, Cham, 2022.

[4] L. Arambašić, A. Guterman, R. Rajić, B. Kuzma and S. Zhilina, *What does Birkhoff-James orthogonality know about the norm?*, Publ. Math. Debrecen, **102** (2023), 197–218.

[5] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis*, Vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[6] G. Birkhoff, *Orthogonality in linear metric spaces*, Duke Math. J., **1** (1935), 169–172.

[7] B. Blackadar, *Operator algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[8] A. Blanco and A. Turnšek, *On maps that preserve orthogonality in normed spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **136** (2006), 709–716.

[9] J. Bourgain, *Real isomorphic complex Banach spaces need not be complex isomorphic*, Proc. Amer. Math. Soc., *96* (1986), 221–226.

[10] H. Busemann, *The isoperimetric problem in the Minkowski plane*, Amer. J. Math., **69** (1947), 863–871.

[11] M.M. Day, *Some characterizations of inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **62** (1947), 320–337.

[12] P.A. Fillmore and W.E. Longstaff, *On isomorphisms of lattices of closed subspaces*, Canad. J. Math., **36** (1984), 820–829.

[13] G. Godefroy, G. Lancien and V. Zizler, *The non-linear geometry of Banach spaces after Nigel Kalton*, Rocky Mountain J. Math., **44** (2014), 1529–1583.

[14] D. Ilišević and A. Turnšek, *Nonlinear Birkhoff-James orthogonality preservers in smooth normed spaces*, J. Math. Anal. Appl., **511** (2022), 126045, 10 pp.

[15] R.C. James, *Inner product in normed linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **53** (1947), 559–566.

[16] R.C. James, *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., *61* (1947), 265–292.

[17] N.J. Kalton, *An elementary example of a Banach space not isomorphic to its complex conjugate*, Canad. Math. Bull., **38** (1995), 218–222.

[18] A. Koldobsky, *Operators preserving orthogonality are isometries*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **123** (1993), 835–837.

[19] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, *A characterization of Radon planes using generalized Day-James spaces*, Ann. Funct. Anal., **11** (2020), 62–74.

[20] G.W. Mackey, *Isomorphisms of normed linear spaces*, Ann. of Math. (2), **43** (1942), 244–260.

[21] H. Martini and K. J. Swanepoel, *Antinorms and Radon curves*, Aequationes Math., **72** (2006), 110–138.

[22] R.E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[23] R.R. Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.

[24] J. Radon, *Über eine besondere Art ebener Kurven*, Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig. Math.-Phys. Kl., **68** (1916), 23–28.

[25] D. Sain, *Birkhoff-James orthogonality of linear operators on finite dimensional Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **447** (2017), 860–866.

[26] R. Tanaka, *Nonlinear equivalence of Banach spaces based on Birkhoff-James orthogonality*, J. Math. Anal. Appl., **505** (2022), 125444, 12pp.

[27] R. Tanaka, *Nonlinear equivalence of Banach spaces based on Birkhoff-James orthogonality, II*, J. Math. Anal. Appl., **514** (2022), 126307, 19pp.

[28] R. Tanaka, *On Birkhoff-James orthogonality preservers between real non-isometric Banach spaces*, Indag. Math. (N.S.), **33** (2022), 1125–1136.

[29] R. Tanaka, *Nonlinear classification of Banach spaces based on geometric structure spaces*, J. Math. Anal. Appl., **521** (2023), 126944, 17 pp.

[30] P. Wójcik, *Mappings preserving B-orthogonality*, Indag. Math. (N.S.), **30** (2019), 197–200.