L^1 における無条件基底の非存在性について

野　井　貴　弘*

概　要

ルベーグ空間やソボレフ空間，ベゾフ空間，トリーベル・リゾルキン空間など多くの関数空間において基底となるようなウェーブレットが存在し，さらに，いくつかのウェーブレットは基底になっているだけでなく無条件基底になっていることが知られている [1, 3, 4]．ルベーグ空間 $L^p(\mathbb{R})$ に対しては，$1 < p < \infty$ の場合は無条件基底になっているウェーブレットの存在が知られている [1]．$L^1(\mathbb{R})$ については，そもそもウェーブレットに関係なく無条件基底が構成できないことが示されており，洋書では Wojtaszczyk[2] などに証明が記載されているが，和書では証明が記載されているものが少ないように思える．

本投稿論文は，$L^1[0,1]$ が無条件基底を持たないことを [2] と Ziemke のノート [5] を参考にまとめた研究ノートである．

1　無条件基底

バナッハ空間 X に対して，そのノルムを $\|\cdot\|_X$ で表すことにする．また，スカラーは複素数とする．まず始めに，バナッハ空間における無条件基底を定義するために，無条件収束の定義を与える．

定義 1.1 (無条件収束)．　$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が全単射であるとき，σ を $\mathbb{N}$ の並び替えという．X をバナッハ空間とし，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ とする．任意の $\mathbb{N}$ の並び替え σ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in X$$

が成り立つとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ は x に無条件収束するという．

無条件収束の特徴付けとして，次の定理が知られている．

定理 1.2 ([1, p 229, 定理 2.4])．　X をバナッハ空間とする．次の条件は同値である．

* 神奈川工科大学教育開発センター
E-mail: noi@gen.kanagawa-it.ac.jp

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ は無条件収束する．

(2) $|\beta_n| \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ を満たすすべてのスカラー列 $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n$ が収束する．

注意 1.3.　[1] では定義 1.1 とは異なる形で無条件収束の定義を与えているが，2 つの定義は同値である ([1, p 226, 補題 2.2])．

次にバナッハ空間における無条件基底の定義を述べる．

定義 1.4 (無条件基底)**.** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ がバナッハ空間 X の無条件基底であるとは，任意の $x \in X$ に対して

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

を満たすスカラー列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が一意に存在し，さらにこの級数が無条件収束するときをいう．

無条件基底の特徴付けとして，例えば，次のような補題が知られている．

補題 1.5 ([1, p 237, 定理 2.10])**.**　X をバナッハ空間とし，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の基底とする．このとき，次は同値である．

(1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は無条件基底である．

(2) ある正定数 $C > 0$ が存在して，任意の $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$ と $|\beta_n| \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ を満たすすべてのスカラー列 $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n a_n x_n \right\|_X \leq C \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|_X$$

が成り立つ．

2　本研究ノートで示す定理

本研究ノートの目的は，次のよく知られた定理の証明をまとめることである．

定理 2.1 ([2, II. D. 10 Theorem])**.** $L^1[0,1]$ には無条件基底は存在しない．

$L^1[0,1]$ は $L^1(\mathbb{R})$ と同型である ([2, II. B. 2 Examples (c)]) ので，$L^1(\mathbb{R})$ には無条件基底が存在しないことがわかる．本研究ノートでは示さないが，より一般に，次の定理が成り立つ．

定理 2.2 ([2, II. D. 10 Theorem])**.**　$L^1[0,1]$ は無条件基底が存在する空間のいかなる部分空間とも同型でない．

2.1　定理 2.1 を示すための準備

以下，定理 2.1 を示すために必要な定義と定理や補題を述べていく．

始めに，ラデマッハー列と（無条件）基底に関する結果を述べる．

定義 2.3 (ラデマッハー列)．　$r_n(t) = \mathrm{sgn}\,\sin 2^n t\pi$ とする．$[0,1]$ 上の関数列 $\{r_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ をラデマッハー列という．ラデマッハー列は

$$r_n(t) = \begin{cases} 1 & \left(t \in \displaystyle\bigcup_{\ell=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{2\ell-2}{2^n}, \frac{2\ell-1}{2^n}\right)\right) \\ -1 & \left(t \in \displaystyle\bigcup_{\ell=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{2\ell-1}{2^n}, \frac{2\ell}{2^n}\right)\right) \end{cases}$$

と表すこともできる．

[2] から basic sequence と block-basic sequence と呼ばれる概念を導入する．basic sequence は次の性質を満たす基底のことである．

定義 2.4 (basic sequence ([2, II. B. 13]))．　X をバナッハ空間とし，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ に対して

$$\mathrm{span}\,(x_n) = \{x \in X \,:\, x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\}$$

とする．ここで $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はスカラー列である．$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\overline{\mathrm{span}\,(x_n)}$ の基底であるとき，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を basic sequence という．

注意 2.5.　基底の任意の部分列は basic sequence である．

次に，block-basic sequence を定義する．

定義 2.6 (block-basic sequence ([2, II. B. 16]))．　X をバナッハ空間とする．$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の basic sequence とする．このとき，

$$u_k = \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_n x_n \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

で定義される $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ で，特に $u_k = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$ でないものを block-basic sequence という．ここで，$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ は狭義単調増加な非負の数列であり $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ はスカラー列である．

命題 2.7 ([2, II. D. 11 Proposition])．　X をバナッハ空間とし，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ を無条件基底とする．無条件基底 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の *block-basic sequence* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は無条件収束する *basic sequence* である．

Proof. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ を無条件基底とし，$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ をその block-basic sequence とする．つまり，u_k $(k = 1, 2, \cdots)$ は，ある狭義単調増加な非負の数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ とスカラー列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ により

$$u_k = \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_n x_n \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

と表すことができる．$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ が無条件収束する basic sequence であることであることを示すには，任意の $x \in \overline{\mathrm{span}\,(u_n)}$ を $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$ と表すとき，この級数が無条件収束することを示せばよい．このことを示すには，補題 1.5 より，$|\beta_k| \leq 1$ $(k \in \mathbb{N})$ を満たす任意のスカラー列 $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して，

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k a_k u_k \right\|_X \leq C \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k \right\|_X \tag{2.1}$$

を満たす正定数 C が存在することを示せばよい．このような正定数 C が存在することを示す．

$\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $|\beta_k| \leq 1$ $(k \in \mathbb{N})$ を満たす任意のスカラー列とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \in [n_k+1, n_{k+1}]$ であるとき $\beta'_n = \beta_k$, $a'_n = a_k$ と定義すると

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k a_k u_k \right\|_X = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k a_k \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_n x_n \right\|_X = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \beta'_n a'_n \alpha_n x_n \right\|_X$$

となる．β'_n $(n = 1, 2, \cdots)$ は定義より $|\beta'_n| \leq 1$ を満たす．このことと $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が無条件基底であることから，補題 1.5 より，ある $C > 0$ が存在して

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \beta'_n a'_n \alpha_n x_n \right\|_X = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \beta'_n a'_n \alpha_n x_n \right\|_X \leq C \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \alpha_n x_n \right\|_X$$

が成り立つ．$x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$ であることに注意すると

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k a_k u_k \right\|_X \leq C \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \alpha_n x_n \right\|_X = C \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a'_n \alpha_n x_n \right\|_X = C \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k \right\|_X$$

が成り立つことがわかる．(2.1) を満たす正定数 C が存在するので，$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は無条件収束する basic sequence である． □

$L^1[0,1]$ のノルムを $\|\cdot\|$ と表す．次の定理は定理 2.1 を示すのに重要な役割を果たす．

定理 2.8 ([2, II. D. 7 Remark])**.**　ある正定数 $C > 0$ が存在して，任意の有限列 $\{x_n\}_{n=1}^{N} \subset L^1[0,1]$ に対して

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2 \right)^{1/2} \leq C \sup_{\epsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n x_n \right\|$$

が成り立つ．ここで，右辺の $\sup\limits_{\epsilon_n=\pm 1}$ は，1 または -1 の値からなる任意の数列 $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ に関して上限をとることを意味する．

注意 2.9.

1. $\|\cdot\|$ をバナッハ空間 X のノルム $\|\cdot\|_X$ に置き換えても成り立つとき，バナッハ空間 X は Orlicz property を持つという．
2. 本研究ノートでは示さないが，定理 2.2 を示す際にも定理 2.8 は重要な役割を果たす．

2.2 定理 2.1 の証明

$x \in L^1[0,1]$ とし $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ をラデマッハー列とする．次の 3 段階に分けて証明する．

(1) $r_n x$ は $L^1[0,1]$ において 0 に弱収束する．つまり，任意の $h \in (L^1[0,1])^* = L^\infty[0,1]$ に対して

$$\int_0^1 r_n(t)x(t)h(t)\,dt \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ．

(2) $\|x + r_n x\| \to \|x\|$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．

(3) $L^1[0,1]$ に無条件基底が存在すると仮定すると定理 2.8 がなりたたないことを示す．

(1) の証明.

$k \in \mathbb{N}$ に対して $\ell \in \{0, 1, \cdots, 2^k - 1\}$ とし，$j \in \mathbb{N}$ に対して $i = 0, 2, \cdots, 2^j - 1$ とする．k, ℓ, j, i を固定して

$$A = \left[\frac{\ell}{2^k}, \frac{\ell+1}{2^k}\right), \quad (\ell = 0, 1, \cdots, 2^k - 1)$$

$$B = \left[\frac{i}{2^j}, \frac{i+1}{2^j}\right), \qquad (i = 0, 1, \cdots, 2^j - 1)$$

とおき，$x = \chi_A$, $y = \chi_B$ とおく．このとき $n > k, j$ であれば

$$\int_0^1 r_n(t)x(t)y(t)\,dt = 0 \tag{2.2}$$

であることを示す．まず A と B の共通部分が 1 点のみである場合は自明である．よって，$A \subset B$ または $B \subset A$ の場合を示せばよいことになる．どちらの場合も同様であるので，$B \subset A$ の場合のみを示す．このとき

$$B = \left[\frac{i}{2^j}, \frac{i+1}{2^j}\right) = \left[\frac{2^{n-j}i}{2^n}, \frac{2^{n-j}(i+1)}{2^n}\right)$$

であるのでラデマッハー列の定義から

$$\int_0^1 r_n(t)x(t)y(t)\,dt = 0$$

が成り立つ．これらのことより，$n > k, j$ であるとき，(2.2) が成り立つ．

次に

$$B_{j,i} = \left[\frac{i}{2^j}, \frac{i+1}{2^j}\right)$$

とおき，2 進区間上の特性関数の線形結合 $g = \displaystyle\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{2^j-1} a_{j,i}\chi_{B_{j,i}}$ を考える．ここで $\{a_{j,i}\}$ はスカラー列である．$n > k, j$ であるとき (2.2) が成り立つことから，このような g に対して

$$\int_0^1 r_n(t)x(t)g(t)\,dt \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{2.3}$$

が成り立つ．

任意に $h \in L^\infty[0,1]$ をとる．このとき，$h \in L^1[0,1]$ である．任意の $L^1[0,1]$ に属する関数は 2 進区間の特性関数の線形結合で近似できる．つまり，任意の $\epsilon > 0$ に対して，2 進区間上の特性関数の線形結合 $g \in L^1[0,1]$ で $\|h - g\| < \epsilon$ を満たすものが存在する．このことから

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 r_n(t)x(t)h(t)\,dt\right| &\le \int_0^1 |r_n(t)x(t)(h(t) - g(t))|\,dt + \left|\int_0^1 r_n(t)x(t)g(t)\,dt\right| \\
&\le \int_0^1 |h(t) - g(t)|\,dt + \left|\int_0^1 r_n(t)x(t)g(t)\,dt\right| \\
&\le \epsilon + \left|\int_0^1 r_n(t)x(t)g(t)\,dt\right|
\end{aligned}$$

を得る．この不等式と (2.3) より $\displaystyle\int_0^1 r_n(t)x(t)h(t)\,dt \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．

よって，任意の $x \in L^1[0,1]$ に対して $r_n x$ は 0 に弱収束する．

(2) の証明.

A を (1) の証明で定義したものとし $x = \chi_A$ とする．$\{r_n\}_{n=1}^\infty$ をラデマッハー列とし，各 n に対して

$$D_+^{(n)} = \{t \in [0,1] : r_n(t) = 1\}, \qquad D_-^{(n)} = \{t \in [0,1] : r_n(t) = -1\}$$

とする．$n > k$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |x(t) + r_n(t)x(t)|\,dt &= \int_0^1 x(t)|1 + r_n(t)|\,dt = \int_A |1 + r_n(t)|\,dt \\
&= \int_{A\cap D_+^{(n)}} 2\,dt + \int_{A\cap D_-^{(n)}} 0\,dt = 2\cdot\frac{|A|}{2} = \|x\|
\end{aligned} \tag{2.4}$$

が成り立つ．2 進立方区間の特性関数の線形結合の集合は $L^1[0,1]$ で稠密であるので，任意の $x \in L^1[0,1]$ に対して $\|x + r_n x\| \to \|x\|$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．

(3) の証明.

$L^1[0,1]$ に無条件基底 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在するとする．$P_n : L^1[0,1] \to L^1[0,1]$ を

$$P_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

により定義する．$x_0 \in L^1[0,1]$ を $x_0 \equiv 1$ とする．P_N の定義から $P_n x_0 \to x_0$ であるので，ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\|x_0 - P_{N_0} x_0\| \le \dfrac{1}{2}$ が成り立つ．P_n の定義より，

$$R(P_{N_0}) = \{P_{N_0} x : x \in L^1[0,1]\}$$

に対して

$$\dim(R(P_{N_0})) < \infty$$

であるので P_{N_0} はコンパクトである．このことと $n \to \infty$ とするとき $r_n x_0 \to 0$ (弱収束) であることから，L^1 の意味で $P_{N_0} r_n x_0 \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．よって，ある $m_1 \in \mathbb{N}$ が存在し，$k \ge m_1$ であるとき $\|P_{N_0} r_k x_0\| \le \dfrac{1}{2^2}$ が成り立つ．さらに $\|x_0 + r_n x_0\| \to \|x_0\| = 1$ であるので，ある $m_2 \in \mathbb{N}$ が存在し $k \ge m_2$ であるとき $|\|x_0 + r_n x_0\| - 1| \le \dfrac{1}{2^2}$ が成り立つ．$k_1 > \max\{m_1, m_2\}$ とし，$x_1 = r_{k_1} x_0$ と定義する．さらに，ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在し $\|x_1 - P_{N_1} x_1\| < \dfrac{1}{2^2}$ であり，先と同様の議論で

$$\|P_{N_1}(r_{k_2}(x_0 + x_1))\| \le \frac{1}{2^3}, \quad |\|x_0 + x_1 + r_{k_2}(x_0 + x_1)\| - \|x_0 + x_1\|| \le \frac{1}{2^3}$$

を満たす $k_2 \in \mathbb{N}$ が存在する．以下 $x_2 = r_{k_2}(x_0 + x_1)$ と定義して同様の議論を続けることにより，次の性質を満たす狭義単調増加な自然数列 $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ と $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ を帰納的に構成できる:

$$\|P_{N_{i-1}}(r_{k_i}(x_0 + \cdots + x_{i-1}))\| \le \frac{1}{2^{i+1}}, \tag{2.5}$$

$$|\|x_0 + \cdots + x_{i-1} + r_{k_i}(x_0 + \cdots + x_{i-1})\| - \|x_0 + \cdots + x_{i-1}\|| \le \frac{1}{2^{i+1}}, \tag{2.6}$$

$$x_i = r_{k_i}(x_0 + \cdots + x_{i-1}), \tag{2.7}$$

$$\|x_i - P_{N_i} x_i\| \le \frac{1}{2^{i+1}}. \tag{2.8}$$

上記の評価式から

$$\frac{1}{2} \le \|x_n\| = \|x_0 + \cdots + x_{n-1}\| \le 2 \tag{2.9}$$

が成り立つことを示す.

まず (2.7) と (2.6) より

$$
\begin{aligned}
\|x_n\| &= \|x_0 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1}\| \\
&= \|x_0 + \cdots + x_{n-2} + r_{k_{n-1}}(x_0 + \cdots + x_{n-2})\| \quad ((2.7)\text{ より}) \\
&\leq \frac{1}{2^n} + \|x_0 + \cdots + x_{n-2}\| \quad ((2.6)\text{ より}) \\
&\leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \quad (\text{同じ議論を繰り返すことにより}) \\
&\leq 2
\end{aligned}
$$

が成り立つので，(2.9) の右側の不等式が成り立つ.

(2.9) の左側の不等式が成り立つことを示す．$\|x_0\| = 1$ であることから $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|x_n\| &= \|x_0 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1}\| \\
&= \|x_0 + \cdots + x_{n-2} + r_{k_{n-1}}(x_0 + \cdots + x_{n-2})\| \quad ((2.7)\text{ より}) \\
&\geq \|x_0 + \cdots + x_{n-2}\| - \frac{1}{2^n} \quad ((2.6)\text{ より}) \\
&\geq \|x_0\| - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{2^n} \quad (\text{同じ議論を繰り返すことによる.}) \\
&= 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{2^n} \\
&\geq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

定理 2.8 が成り立たないことを示すために，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を用いて block-basic sequence $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定義する．$u_n = P_{N_n}x_n - P_{N_{n-1}}x_n$ とおくと $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は無条件基底 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の block-basic sequence である．このことを確認するには，$u_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ ではないことを示せばよい．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して (2.8) と (2.5) より

$$
\begin{aligned}
\|u_n - x_n\| &= \|P_{N_n}x_n - P_{N_{n-1}}x_n - x_n\| \leq \|P_{N_n}x_n - x_n\| + \|P_{N_{n-1}}x_n\| \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

が成り立つ．この不等式と (2.9) より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\|u_n\| \geq |\|u_n - x_n\| - \|x_n\|| \geq \|x_n\| - \|u_n - x_n\| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}
$$

が成り立つ．特に，$n \geq 2$ であるとき $\|u_n\| \geq \dfrac{1}{4}$ である．よって，$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は無条件基底 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の block-basic sequence である．定理 2.8 が成り立たないことを示すためには，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，

(2.9) と (2.10) より

$$\begin{aligned}\|u_1 + u_2 + \cdots + u_N\| &\leq \|\sum_{k=1}^{N}(u_k - x_k)\| + \|x_1 + x_2 + \cdots + x_N\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} + 2 \leq 3 \qquad (2.11)\end{aligned}$$

が成り立つことも必要になる．

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を用いて定理 2.8 が成り立たないことを示す．$u_n = P_{N_n}x_n - P_{N_{n-1}}x_n$ であるので，命題 2.7 より $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は無条件収束する block-basis sequence である．任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1, 2, \cdots, N) \\ 0 & (n \geq N) \end{cases}$$

によりスカラー列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定義し，$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $|\beta_n| \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ を満たすスカラー列とする．このとき，補題 1.5 より正定数 C が存在し，(2.1) と (2.11) が成り立つことから

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \beta_n u_n\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n a_n u_n\right\| \leq C \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n\right\| \leq 3C \qquad (2.12)$$

を得る．一方，$\|u_n\| \geq \dfrac{1}{4}$ $(n \geq 2)$ であるので

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \|u_n\|^2\right)^{1/2} \to \infty \qquad (N \to \infty) \qquad (2.13)$$

が成り立つ．(2.12) と (2.13) より定理 2.8 が成り立たないことがわかる．

よって，$L^1[0,1]$ に無条件基底が存在すると仮定すると，定理 2.8 が成り立たないことから，$L^1[0,1]$ には無条件基底は存在しない．

謝　辞

松岡勝男先生には研究集会で講演の機会をいただくなど，大変感謝しております．また，本研究ノートを発表する機会を与えていただき，御礼申し上げます．

参考文献

[1] ヘルナンデス ワイス, 芦野隆一, 萬代武史, 浅川秀一,『ウェーブレットの基礎』科学技術出版, 2000 年.

[2] P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysis,* Cambridge University Press, 1991 年.
[3] H. Triebel, *Theory of function spaces III,* Birkhäuser, Basel, Boston, 2006 年.
[4] H. Triebel, *Function Spaces and Wavelet on Domains,* European Mathematical Society, 2008 年.
[5] M. Ziemke, *RIESZ BASES AND UNCONDITIONAL BASES,* Lecture note, 2012 年.